Topologie produit

1 Introduction

La topologie produit va nous permettre de fabriquer des espaces topologiques. Mais il faudra la définir en sorte que les propriétés topologiques des espaces qui composent le produit remontent sur la topologie du produit. Ainsi, si les espaces de départ sont compacts, ou connexes, il sera appréciable qu'il en soit de même sur de leur produit.

2 Notions de base

On considère dans ce chapitre une famille d'espaces topologiques $((X_i, \mathcal{O}_i))_{i=1..k}$ et soit

$$X = \prod_{i=1}^{k} X_i.$$

Définition Pour tout i=1..k, on appelle **projecteur de X sur X**$_i$ l'application $\Pi_i : X \longrightarrow X_i$ qui a un élément $x = (x_1, ..., x_k)$ de X associe $\Pi_i(x) = x_i$.

Définition On appelle **topologie produit**, la topologie la moins fine sur X qui rend continue les applications $\Pi_i : X \longrightarrow X_i$ pour i=1..k. C'est à dire: si O_i est un ouvert de X_i, alors on veut que $\Pi^{-1}(O_i)$ soit un ouvert de X.

Remarque Cette définition est bien posée car il existe toujours une topologie sur X rendant continue les Π_i. Au pire, il suffit de mettre sur X la topologie discrète .

Notation On notera $\mathcal{O}$ la topologie produit.

Proposition La topologie produit est la topologie engendrée par l'ensemble $\{\Pi^{-1}(O_i); O_i \in \mathcal{O}_i; i = 1..k\}$.

Démonstration Il suffit de relire la définition de la topologie engendrée par un ensemble: c'est la topologie la moins fine pour laquelle les éléments de l'ensemble sont des ouverts de cette topologie.

On a d'ailleurs la définition suivante.

Définition Les sous-ensembles $O_1 \times ... \times O_k$ où $O_1 \in \mathcal{O}_1, .., O_k \in \mathcal{O}_k$ sont appelés **les ouverts élémentaires** de la topologie produit.

Remarque La propriété précédente pourrait s'exprimer comme suit: La topologie produit est la topologie engendrée par les ouverts élémentaires.

3 Suites dans un espace topologique produit

Théorème Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente sur X pour la topologie produit alors les suites coordonnées $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes pour i=1,...,k et ce pour le topologie de l'espaces auxquels elles appartiennent.

Démonstration Soit la suite d'éléments de X $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_n^1,\ldots,x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque suite coordonnée $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ est incluse dans X_i.
Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X. Alors il existe $x=(x_1,\ldots,x_n)\in X$ tel que $\forall V\in\mathcal{V}(x)\,\exists N; n>N\Rightarrow x_n\in V$. Choisissons i tel que $1\leq i\leq k$ et montrons que $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_i. Prenons pour cela un voisinage V_i de x_i. Choisissons d'autre part des voisinages $V_1,\ldots.V_{i-1},V_{i+1},\ldots,V_k$ de, respectivement, $x_1,\ldots.x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_k$ dans, respectivement, $X_1,\ldots.X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_k$. $V=V_1\times\ldots\times V_k$ est donc un voisinage de x dans X. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, pour N assez grand, si $n>N$,$x_n\in V$ et donc , en particulier, si $n>N$,$x_n^i\in V_i$. Cela prouve que la suite $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_i.

Remarque On aurait pu prouver cette propriété en utilisant le caractère continue des projecteurs.

4 Application continue sur un espace métrique

On considérera ici, en plus de l'espace topologique produit (X,$\mathcal{O}$) déjà définit précédemment, un espace topologique (Y,$\mathcal{O}'$).

Proposition Si l'application $f:Y\longrightarrow X$ est continue sur Y pour les topologies respectives de X et Y alors les applications $\Pi\circ f$ sont continues sur Y pour tout i=1,..,k.

Démonstration Supposons que f est continue. Alors comme la composée de deux applications continues est continue , les applications $\Pi\circ f$ sont continues pour tout i=1,..,k.

5 Propriétés des espaces topologiques produits

On renvoit ici au cours sur les espaces connexes, les espaces métriques produits et les espaces métriques compacts.