Espaces Topologiques

1 Introduction

Le concept de mesure est culturel. Les peuples aborigènes, par exemple, n'en ont pas la connaissance et ont du développer d'autres outils pour localiser les lieux dans l'espace. Ainsi, si l'on se pose le problème de décrire un chemin permettant, partant d'un point A, de rejoindre un point B (comme sur la figure ci contre), on pourrait proposer deux types de réponse:

– la première, qui est celle à laquelle nous sommes habituée: "Pour aller de A à B, longer le chemin sur 5 km, puis à votre droite, la rivière sur 3 km"
– la seconde, du type aborigène, serait: "Avancer sur le chemin jusqu'à arriver au **voisinage** d'un grand arbre, longer alors la rivière sur votre droite et ce jusqu'à approcher à la fois la périphérie de la forêt et celle de la colline.

Il en est des espaces mathématiques comme des cultures humaines. Certains sont en effet étrangers à toute métrique (penser à par exemple $C(IR,IR)$, l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), d'autres aussi échappent suffisamment à notre perception pour qu'aucune métrique naturelle ne s'impose (quelle métrique mettre sur un tore ou sur $IRP[2] = S^2/(x \sim -x)$, l'espace projectif réél de dimension 2 (qui est aussi l'ensemble de toutes les droites vectorielles non orientées de l'espace $\mathbb{R}^3$)). Devons nous alors renoncer, pour de tels ensembles, aux notions de convergences (pour lesquelles il est justement nécessaire de définir ce que signifie *être près de*)? C'est à ce niveau qu'intervient la topologie et son formalisme.

2 Topologie sur un ensemble et sous ensemble ouvert

Dans toute la suite, X désignera un ensemble et $\mathcal{O}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$.

Définition On dit que $(X,\mathcal{O})$ est **un espace topologique** si $\mathcal{O}$ vérifie:

– $X, \emptyset \in \mathcal{O}$.
– Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore élément de $\mathcal{O}$.
– Une réunion quelconque d'éléments de $\mathcal{O}$ est encore élément de $\mathcal{O}$.

Un élément de $\mathcal{O}$ sera appelé un **sous ensemble ouvert** de X. (On utilisera le plus souvent le mot ouvert à la place de sous ensemble ouvert). Se donner $\mathcal{O}$ sur X vérifiant les 3 axiomes précédents revient à se donner une **topologie** sur X.

Définition On appelle **topologie discrète** sur un ensemble X la topologie sur X pour laquelle tout sous ensemble de X est ouvert. (En particulier, tout point de X définit un sous ensemble ouvert de X). Cette topologie est égale à $\mathcal{P}(X)$.

Définition On appelle **topologie grossière** sur un ensemble X la topologie $\mathcal{O}$ donnée par $\mathcal{O}=\{\emptyset,X\}$.

On considère désormais un espace topologique $(X,\mathcal{O})$.

Définition Soit $V \in \mathcal{P}(X)$ et $x \in X$. On dira que V est **un voisinage de x** si il existe un ouvert U de X tel que x soit élément de U et U soit inclus dans V.

Notation On notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x.

Remarque Si $O \in \mathcal{O}$ et si $x \in O$ alors $O \in \mathcal{V}(x)$.

Proposition Un sous ensemble O de X est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.

Démonstration D'après la remarque précédente, le sens direct est évident. Montrons la réciproque. Supposons donc que O est un ensemble voisinage de chacun de ses points. Pour tout x dans O, on peut alors trouver un sous ensemble O(x) de O tel que O(x) soit ouvert et x élément de O(x). On peut même écrire:

$$O = \bigcup_{x \in O} O(x).$$

O est donc réunion quelconque d'ouverts. Ceci implique évidemment que O est ouvert.

Définition Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$ deux topologies sur X. On dira que $\mathcal{O}$ est **plus fine** que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P}$ est incluse dans $\mathcal{O}$.

Remarque "Etre plus fine que" est une relation d'ordre (non totale) sur l'ensemble de toutes les topologies de X.

3 Topologie induite et engendrée

On considère ici une partie A de X.

Proposition l'ensemble $\{A \cap O; O \in \mathcal{O}\}$ definit une topologie sur A que l'on appelle **topologie induite** de $(X,\mathcal{O})$ sur A.

Démonstration C'est trivial, il suffit de vérifier les trois axiomes définissants une topologie.

Remarque Si A est ouvert alors les ouverts de la topologie induite de celle de X sur A et les ouverts de X coincident.

Définition Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. La topologie la moins fine contenant $\mathcal{P}$ est appelée **topologie engendrée** par la famille $\mathcal{P}$.

Remarque Cette topologie existe toujours. Au pire, c'est la topologie discrète (pour laquelle chaque point est un ensemble ouvert). Chaque élément de $\mathcal{P}$ est alors bel et bien ouvert (comme réunion quelconque d'ouvert de X).

Exemple

- La notion de topologie induite permet en particulier de définir la topologie d'un espace métrique (X,d): C'est la topologie engendrée par les boules ouvertes de cette métrique.
- Cette notion permet aussi de définir la topologie produit d'un produit d'espace métrique. C'est la topologie engendrée sur le produit par les produits de boules incluses dans les espaces composants le produit.

4 Intérieur d'un sous ensemble de X

Définition Soit U une partie de X.On appelera **intérieur** de U le plus grand ouvert de O contenu dans U. On notera

$$\overset{\circ}{U} \ ou\, int(U)$$

l'intérieur de U.

Proposition Si A et B désignent deux parties de X :

1. L'intérieur de l'intersection de deux ensembles est égale à l'intersection des intérieurs de ces deux ensembles.
2. L'intérieur de la réunion de deux ensembles est égale à la réunion des intérieurs de ces deux ensembles.
3. L'intérieur de l'intérieur d'un ensemble est égale à l'intérieur de cet ensemble.

5 Sous ensemble fermé

Définition Le complémentaire d'un sous ensemble ouvert de X sera appelé **sous ensemble fermé**.

Remarque On utilisera le mot fermé à la place de sous ensemble fermé.

Proposition

- X et $\emptyset$ sont fermés.
- Une réunion finie de fermés est fermée.
- Une intersection quelconque de fermés est fermée.

Démonstration C'est trivial, via les égalités suivantes (A et B désigne deux ensembles quelconques):

$$(A\bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c et (A\bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$$

6 Valeur d'adhérence et adhérence d'un sous ensemble de X

Définition Soit U une partie de X.On appelera **adhérence de U** le plus petit fermé de X contenant U. On notera

$$\overline{U}$$

l'adhérence de U.

Définition On dira qu'un élément **x de X est adhérent au sous ensemble U** de X si: $\forall V \in \mathcal{V}$(x), V $\bigcap U \neq \emptyset$

Remarque Tout élément d'un ensemble donné est valeur d'adhérence de cet ensemble.

Proposition L'adhérence d'un sous ensemble de X est égale à l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de cet ensemble.

Démonstration Soit U un sous ensemble de X et notons $Adh(U)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de U.
Montrons tout d'abord que $Adh(U)$ est fermé. Soit x un élément de $Adh(U)^c$. Alors on peut trouver un voisinage V de x tel que ce voisinage n'intersecte pas $Adh(U)$. Ce voisinage est donc dans $Adh(U)^c$. x possède alors un voisinage tout entier dans $Adh(U)^c$. Cela étant vrai pour tout élément x de $Adh(U)^c$ on en déduit que $Adh(U)^c$ est ouvert et donc que $Adh(U)$ est fermé. De plus, d'après la remarque précédente, U est tout entier dans $Adh(U)$. Donc, $Adh(U)$ est un fermé qui contient U. On peut alors affirmer que l'adhérence de U est une partie de $Adh(U)$.
Montrons maintenant que si F est un fermé de X contenant U alors F contient nécessairement $Adh(U)$. Soit donc F un fermé de X contenant U et soit x un élément de F^c. Comme F^c est ouvert, on peut trouver un voisinage V de x inclus dans F^c.Ce voisinage et F sont donc disjoints. Il en est donc de même pour ce voisinage et $Adh(U)$. Donc x est élément de $Adh(U)^c$. On a alors montré que $F^c \subseteq Adh(U)^c$ et donc que $Adh(U) \subseteq F$.
Concluons: $Adh(U)$ est un fermé contenant U et tout fermé contenant U contient $Adh(U)$. Ce dernier est donc le plus petit fermé contenant U et est donc égale à l'adhérence de U.

Définition On dit que le sous ensemble U de X est **dense** dans X si

$$\overline{U} = X$$

ou, ce qui est équivalent, si l'intérieur de U^c est vide.

Exemple $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

7 Suite dans un espace topologique

On considère dans ce paragraphe une suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ de X.

Définition On appelle **valeur d'adhérence de la suite** $(x_n)_{n\in I\!N}$ tout point adhérent à $\{x_n/n \in I\!N\}$.

Exemple Un élément de la suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ est un point adhérent à $(x_n)_{n\in I\!N}$.

Définition On appelle **point d' accumulation** de la suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ toute valeur d' adhérence de cette suite qui n' est pas élément de la suite.

Définition On dira que $(x_n)_{n\in I\!N}$ est **convergente vers le point x** de X si :

$$\forall V \in V(x) \exists N(V) \in I\!N \,;\, \{x_n; n > N(V)\} \subset V.$$

Le point x sera appelé **la limite de la suite** $(x_n)_{n\in I\!N}$ dans X et on notera:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Remarque Si x est limite de la suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ alors x est valeur d'adhérence de cette suite.

Définition Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite définie par $(x_{\varphi(n)})_{n\in I\!N}$ est appelée **sous suite** (ou **suite extraite**) de $(x_n)_{n\in I\!N}$.

Remarque Soit φ l'aplication définie précédemment. On a l'inclusion:

$$\{x_{\varphi(n)}; n \in I\!N\} \subset \{x_n; n \in I\!N\}.$$

Ce qui justifie le nom donné à la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in I\!N}$.

8 Espaces topologiques à base dénombrable de voisinage

Proposition Soit F un fermé de $(X, \mathcal{O})$. Soit $(x_n)_{n\in I\!N}$, une suite d'éléments de F qui converge vers un élément x de X. Alors x est élément de F.

Démonstration Par définition de la convergence d'une suite, tout voisinage V de x rencontre F en un point x_n (où n est choisis comme il faut). D'après la définition d'un point adhérent à un ensemble,x est donc point adhérent à F. Mais comme F est fermé, l'ensemble des points adhérents à F se confond avec F.

Le but de ce paragraphe est de travailler sur la réciproque de cette propriété.

Définition On dit qu'un espace topologique $(X,\mathcal{O})$ possède **une base dénombrable de voisinage** si pour tout x de X, on a:
$\exists (V_n)_{n\in I\!N} \subset \mathcal{V}(x) \,/\, \forall V \in V(x) \, \exists n \in \mathbb{N} \, V_n \subset V$ et $\forall i \in I\!N \, V_{i+1} \subset V_i$.

Théorème Soit $(X,\mathcal{O})$ possédant une base dénombrable de voisinage et soit U un sous ensemble de X. On a équivalence entre:

- x est une valeur d'adhérence de U.
- Il existe une suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ d'éléments de U convergeant vers x.

Démonstration Occupons nous du sens direct: Supposons que x est valeur d'adhérence de U. Alors tout voisinages V de x rencontre U. En particulier, comme $(X,\mathcal{O})$ est à base dénombrable de voisinages, pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un voisinage de x: V_n et ce voisinage rencontre U. Choisissons alors, pour n donné dans $\mathbb{N}$, x_n dans $V_n \cap U$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in I\!N}$. Enfin, pour montrer que cette suite converge vers x, il suffit de remarquer que si V est élément de $\mathcal{V}(x)$ alors il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel V_{n_0} est inclus dans V, et donc $\{x_n; n > n_0\} \subset V$, ce qui nous prouve la convergence souhaitée.
Pour la réciproque, on choisit une suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ convergeant vers x. Pour tout V de $\mathcal{V}(x)$, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que x_n est élément de $V\cap U$. Ainsi pour tout V de $\mathcal{V}(x)$, $V\cap U$ est non vide. Ceci nous assure du fait que x est bien valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in I\!N}$.

Voici maintenant un corollaire fondamentale car il donne un critère très pratique pour vérifier qu'un sous ensemble de X est fermé.

Corollaire Soit $(X,\mathcal{O})$ un espace topologique à base dénombrable de voisinage et F un sous ensemble de X. On a équivalence entre:

- F est fermé.
- Pour toute suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ convergente d'éléments de F ,on a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ est élément de F.

Démonstration Supposons que F est fermé. Alors tout point x de F est point adhérent à F. Donc, d'après la propriété précédente, on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ d'éléments de F ayant x pour limite.
Réciproquement, supposons que toute suite convergente $(x_n)_{n\in I\!N}$ d'éléments de F ait sa limite dans F. Prenons un point x de l'adhérence de F. Comme x est un point adhérent à F, on peut construire une suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ d'éléments de F qui converge vers x. Mais ceci implique, par hypothèse, que x est élément de F et donc que l'adhérence de F est incluse dans F. Ceci équivaut évidemment au fait que F est fermé.

9 Application continue

Soient $(X,\mathcal{O})$ et $(Y,\mathcal{P})$ deux espaces topologiques.

Définition On dira qu'une fonction f: X$\longrightarrow$ Y **est continue en** $x \in$**X** si $\forall V \in \mathcal{V}(f(x)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$

Définition Une application f: X$\longrightarrow$ Y sera dite **continue** sur X si pour tout O de $\mathcal{P}$, $f^{-1}(O)$ est élément de $\mathcal{O}$.

Remarque Voir la définition d'une fonction continue dans un espace métrique (et) ainsi que la définition d'une fonction mesurable en théorie de la mesure.

La proposition suivante nous assure de la cohérence entre la définition de la continuité en un point et la définition de la continuité sur un espace tout entier (Une fonction est continue sur un espace si et seulement si elle est continue en chaque point de cet espace):

Proposition Soit f: X$\longrightarrow$ Y On a la série d'équivalence:

1. f est continue sur X.
2. $\forall$ F fermé de Y,$f^{-1}(F)$ est un fermé de X.
3. $\forall x \in X, \forall V \in \mathcal{V}(f(x)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$

Démonstration 1$\Leftrightarrow$2:On sait que pour tout ensemble A, $f^{-1}(A^c) = f(A)^c$. L'équivalence s'en déduit aussi tôt.

1$\Rightarrow$3 Soit x un point de x et y=f(x). Soit V un élément de $\mathcal{V}(f$(x)). Nous devons prouver que f^{-1}(V) est un voisinage de x. Comme V est un voisinage de f(x), il contient un ouvert O de Y, cet ouvert contenant y. $f^{-1}(O)$ est donc, puisque f est continue, un ouvert de X contenant x. Mais cet ouvert est contenu dans f^{-1}(V). Ce dernier est donc bien un voisinage de x.

3$\Rightarrow$1 Soit O un ouvert de Y. Montrons que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X. Soit x un élément de $f^{-1}(O)$. Comme O est ouvert, on peut trouver un élément V de $\mathcal{V}(f$(x)) tel que V soit inclus dans O. Mais $f^{-1}(V)$ est alors un élément de $\mathcal{V}$(x) inclus dans $f^{-1}(O)$.Cqfd.

Théorème Soient f: X$\longrightarrow$ Y et $x \in$X. Si f est continue en x alors $\forall$ $(x_n)_{n\in I\!N}$ convergeantes vers x, $\lim\limits_{n\to+\infty}$ f(x_n)=f(x).

Démonstration
Supposons que f est continue en x. Alors pour tout voisinage V de f(x), f^{-1}(V) est un voisinage de x. Soit $(x_n)_{n\in I\!N}$ une suite convergeant vers x et soit V un voisinage de f(x). Par définition de la convergence d'une suite , il existe $N \in I\!N$ tel que si $n > N$ alors $x_n \in f^{-1}$(V) Donc, si n>N alors $f(x_n)$ est élément de V. Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty}$ f(x_n)=f(x).

La réciproque de cette propriété est vraie si l'espace est à base dénombrable de voisinage:

Théorème Si (X,$\mathcal{O}$) est à base dénombrable de voisinages et si $(x_n)_{n\in I\!N}$ est une suite convergeant vers x, on a équivalence entre:

– f est continue en x.

– Pour toute suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ convergeant vers x, $\lim\limits_{n\to+\infty}$ f(x_n)=f(x).

Démonstration Supposons que f n'est pas continue en x. Ceci implique qu'il existe un voisinage V de f(x) tel que f^{-1}(V) n'est pas un voisinage de x. Donc U=$\{y \in X; f(y) \in$V$\}$ ne contient pas d'ouvert contenant x. Autrement dit, prenant un système fondamentale de voisinage au point x :$(V_n)_{n\in I\!N}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un élément x_n de V_n tel que $x_n \in V_n\backslash$U. La suite x_n ainsi construite converge vers x mais la suite $(f(x_n))_{n\in I\!N}$ ne rencontre, par construction, jamais V et donc ne converge pas vers $f(x)$. Cqfd.

Définition Soit f: X$\longrightarrow$ Y. On dira que f est une **application ouverte** si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y.

Proposition Si f est bijective, on a équivalence entre:

– f est une application ouverte.

– f^{-1} est continue comme application de Y dans X.

Démonstration C'est évident!.

Nous considérerons, pour la dernière propriété de ce paragraphe, un troisième espace topologique (Z,$\mathcal{Q}$).

Proposition (**Continuité de la composée de deux applications continues**) Si f: X$\longrightarrow$ Y est continue sur X et que g: Y$\longrightarrow$ Z est continue sur Y alors $g\circ f$: X$\longrightarrow$ Z est continue sur X.

Démonstration Soit O un ouvert de Z. Comme g est continue, $g^{-1}(O)$ est un ouvert de Y. Mais comme f est continue , $f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert de X. Ce qui prouve que, pour O ouvert quelconque de Z, $(g\circ f)^{-1}(O)$ est un ouvert de X, et que $g\circ f$ est continue sur X.

10 Homéomorphismes

Soient (X,$\mathcal{O}$) et (Y,$\mathcal{P}$) deux espaces topologiques.

Définition On dit que f: X$\longrightarrow$ Y est un **homéomorphisme** si:

– f est bijective.

– f^{-1} et f sont continues.

Définition On dira que deux espaces sont **homéomorphes** si l'on peut définir un homéomorphisme entre ces deux espaces.

Ainsi, si l'on peut définir un homéomorphisme entre deux espaces topologiques, au delà d'une correspondance ponctuelle de chacun de ces deux espaces, c'est aussi un correspondance aux niveaux des éléments de leur topologie. Les homéomorphimes jouent en topologie un rôle absolument équivalent à celui des isomorphismes en algèbre. On dira d'ailleurs de deux espaces homéomorphes qu'ils sont topologiquement équivalent. Toute propriété topologique vérifiée par l'un le sera par l'autre. Ainsi, prenant un peu d'avance sur les leçons prochaines, si l'un des espaces est compact (connexe,...), il en sera de même pour l'autre.
L'intérêt d'une telle notion est double. En plus de servir à la classification des espaces topologiques, l'homéomorphie sert à transporter des propriétés topologiques d'un objet vers un autre. Une propriété topologique difficile à prouver pour un espace A sera peut-être plus facile à montrer sur un espace B qui lui est homéomorphe.

Proposition $f: \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est un homéomorphisme si et seulement si f vérifie les trois propriétés suivantes:

- f est bijective.
- f est continue.
- f est ouverte .

Proposition "Etre homéomorphe à" est une relation d'équivalence.