Appendice 3: Annales des problèmes de probabilités de Deug et de licence

Mia 03, Université Paul Sabatier, Devoir 4, à remettre au premier TD de la semaine du 15 au 19 décembre 1997.

Exercice 1

Soit $0 < p < 1$, soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{N}$ on ait $P(X = x) > 0$ et soit enfin une v.a. Y sur le même espace de probabilité telle que pour tout x et pour tout $y = 0,1,\ldots,x$ on ait $P(Y = y|X = x) = C_x^y(1-p)^{x-y}p^y$. On pose $Z = X - Y$.

1. On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson de moyenne λ. Montrer qu'alors Y suit une loi de Poisson de moyenne $p\lambda$ (Méthode: on peut ou bien calculer $P(Y = y)$ par le principe des probabilités totales, ou bien calculer la fonction génératrice f_Y). Montrer que Y et Z sont indépendantes (Méthode : calculer $P(Y = y; Z = z)$). Montrer que Z suit une loi de Poisson de moyenne $(1-p)\lambda$.
2. Trouver la loi de X si on sait que Y et Z sont indépendantes. Méthode: si $0 < z < 1$ et $0 < s < 1$, montrer que $\mathbf{E}(s^Y z^Z) = f_X((1-p)z + ps)$, et chercher à quelle condition $g((1-p)z + ps) = \log f_X((1-p)z + ps)$ est la somme d'une fonction de s seul d'une autre fonction de z seul: penser à introduire la dérivée seconde de g.

Exercice 2

Soit N un entier fixé, et soit Ω l'ensemble des parties de taille N de l'ensemble $\{1,2,\ldots,2N\}$ des 2N premiers entiers. On le munit de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité équiprobable. Si $n = 1,\ldots,2N$, on note pour $\omega \in \Omega$ $X_n(\omega) = 1$ si $n \in \omega$ et $X_n(\omega) = -1$ sinon. On note $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit u_N le nombre d'éléments de Ω. Calculer u_N. Quelle est la valeur de S_{2N}? Les variables aléatoires X_n sont elles indépendantes? Sont elles de même loi? Quelle est la loi de X_n?
2. Pour k entier entre 0 et N on note A_k l'évènement $S_{2k} = 0$. Calculer $P(A_k)$. Soit $Y = \sum_{k=0}^N \mathbf{1}_{A_k}$ Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ le terme général de la série qui est le produit de Cauchy de la série de terme général u_n par elle même. Montrer que $\mathbf{E}(Y) = \frac{v_N}{u_N}$.
3. Calculer les sommes des séries entières suivantes à l'intérieur de leur intervalle de convergence $\sum_{k=0}^\infty u_n z^n$, $\sum_{k=0}^\infty v_n z^n$ (Méthode: donner une présentation du développement en série entière de $(1-x^2)^{-1/2}$ en termes de (u_n)). En déduire une approximation de $\mathbf{E}(Y)$ si N est grand à l'aide de la formule de Stirling.
4. Dans un jeu de 52 cartes, je tire une carte; avant de la regarder, je devine sa couleur: rouge ou noir, et je marque un point si j'ai deviné juste. Je recommence avec le paquet des 51 cartes restantes, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des 52 cartes. Je joue avec la meilleure stratégie, qui choisit la couleur la mieux représentée dans le paquet restant et choisit au hasard en cas d'égalité. Quelle est la moyenne des points marqués? (Méthode: observer que cette stratégie garantit

au moins 26 points, et que les points supplémentaires arrivent une fois sur 2 durant les Y_{26} fois où il y a égalité).

Université Paul Sabatier. Examen blanc de Deug MIA 03, Dec.97
(Durée: 3 heures. Aucun document.)

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans les entiers ≥ 1 telles que pour $|z| \leq 1$ leur fonction génératrice soit égale à $f_X(z) = 1 - \sqrt{1-z}$. Calculer f_{X+Y}, $P(X = n)$ pour $n \geq 1$ et $P(X + Y = n)$ pour $n \geq 2$.

$\mathbb{E}(X)$ existe-t-elle?

Exercice 2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans les entiers ≥ 0 telles que pour $|z| \leq 1$ leurs fonctions génératrices soient respectivement $f_X(z) = 2 - \sqrt{2-z}$ et $f_Y(z) = 1/(2-z)$. Pour $n \geq 0$ calculer

$$P(X = n), P(Y = n), P(X + Y = n).$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X-1))$, et le second moment et la variance de X. Calculer de même la variance de Y et en déduire la variance de $X + Y$.

Exercice 3

Soit X et Y deux variables aléatoires strictement positives, indépendantes et de même loi. Soit $Z = X/Y$. Montrer que $1 \leq \frac{1}{2}(Z + \frac{1}{Z})$. En prenant l'espérance des deux membres de cette égalité, montrer que $1 \leq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\frac{1}{X})$.

On suppose maintenant que la fonction de répartition F de X est égale à $(x-1)$ si $1 \leq x \leq 2$. Quelles sont les valeurs de F en dehors de cet intervalle? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(\frac{1}{X})$.

Université Paul Sabatier. Examen de Deug MIA 03, 6 Janv.98

(Durée: 4 heures. Aucun document. Faites les calculs lentement et au brouillon. Le correcteur peut déduire des points pour le manque de soin ou les absurdités. Les trois exercices sont indépendants.) On désigne par $\log x$ le logarithme népérien de x.

Exercice 2 (*6,5 points*)

1. Soit $0 < p \leq q < 1$. Développer en série entière les fonctions de z suivantes
$$\frac{1}{(1-pz)(1-qz)} \quad , \quad \frac{z^2}{(1-pz)(1-qz)},$$
et préciser leurs rayons de convergence (on distiguera les cas $p = q$ et $p < q$). (*2,5 points*)
2. Soit $0 < p \leq 1/2$ et $q = 1 - p$. On considère les variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans les entiers ≥ 1 de lois respectives
$$P_X = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} p \delta_n, \text{ et } P_Y = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q \delta_n,$$
c'est-à-dire que pour $n \geq 1$ entier on a $P[X = n] = q^{n-1}p$ et $P[Y = n] = p^{n-1}q$. Calculer pour $|z| \leq 1$ les fonctions génératrices $f_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$, $f_Y(z)$ et $f_{X+Y}(z)$. Développer f_{X+Y} en série entière et préciser son rayon de convergence (on distinguera les cas $p = 1/2$ et $p < 1/2$). Déduire du résultat $P[X + Y = n]$ pour $n \geq 2$ entier. Calculer également la moyenne et la variance des trois variables aléatoires X, Y et $X + Y$. (*3,5 points*)
3. Dans le schéma Succès Echec où la probabilité d'un succès est p, soit Z la variable aléatoire qui prend la valeur n si pour la première fois on a un succès au rang $n - 1$ suivi d'un échec au rang n. Montrer que Z est de même loi que la variable aléatoire $X + Y$ considérée à la question précédente. (*0,5 points*)

Exercice 3 (*5,5 points*)

On rappelle que $\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, et que pour $x \neq 0$
$$\mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{sh}(2x)}{2\,\mathrm{sh}x}.$$

1. Soit U une variable aléatoire de fonction de répartition $F_U(x) = P[U \leq x]$ telle que $F_U(x) = 0$ si $x \leq -1$, $F_U(x) = \frac{1+x}{2}$ si $-1 \leq x \leq 1$ et $F_U(x) = 1$ si $1 \leq x$. Tracer le graphe de F_U ainsi que celui de la densité de U. Calculer ensuite $L_U(z) = \mathbb{E}(e^{zU})$ pour z réel non nul. (*1 point*)
2. Si z est réel non nul, montrer par récurrence sur n que
$$\sum_{k=1}^{n} \log \mathrm{ch}\left(\frac{z}{2^k}\right) = \log \frac{\mathrm{sh}(z)}{2^n \mathrm{sh}\left(\frac{z}{2^n}\right)}.$$
En déduire que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \log \mathrm{ch}(\frac{z}{2^k})$ converge, et calculer sa somme en fonction de z. (*2 points*)

3. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, c'est-à-dire telles que $P[X_1 = 1] = P[X_1 = -1] = \frac{1}{2}$. On forme la nouvelle variable aléatoire

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}.$$

Calculer à l'aide du 2) pour z réel non nul $L_{S_n}(z) = \mathbb{E}(e^{zS_n})$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}$$

est convergente. On désigne par S la somme de cette série. On admet que $L_S(z) = \mathbb{E}(e^{zS}) = \lim_{n\to\infty} L_{S_n}(z)$. A l'aide du 2) et du 1), comparer L_S et L_U. (*2,5 points*)

Corrigé de l'examen de Mia 03 du 6 janvier 1998.

Exercice 2: Si $p = q$, d'après la formule du binŞme de Newton on a $(1-pz)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p^n z^n$ et donc

$$z^2(1-pz)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p^n z^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)p^{n-2}z^n.$$

Ces deux séries entières convergent si et seulement si $|pz| < 1$ et donc sont de rayon de convergence $R = 1/p$.

Si $p < q$ on décompose la première fraction rationnelle en éléments simples:

$$\frac{1}{(1-pz)(1-qz)} = \frac{1}{q-p}\left(\frac{q}{1-qz} - \frac{p}{1-pz}\right) =$$

$$\frac{1}{q-p}\left(q\sum_{n=0}^{\infty}q^n z^n - p\sum_{n=0}^{\infty}p^n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1}-p^{n+1}}{q-p}z^n.$$

D'après le théorème sur le rayon de convergence de la somme de deux séries entières, le rayon de convergence est ici le plus petit des deux nombres $1/p$ et $1/q$, soit donc $R = 1/q$. Quant à la deuxième série, il suffit de tout décaler de deux:

$$\frac{z^2}{(1-pz)(1-qz)} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q-p}z^n.$$

2) D'après la définition d'une fonction génératrice on a immédiatement pour ces deux lois de Pascal

$$f_X(z) = \sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}pz^n = \frac{pz}{1-qz},\ f_Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty}p^{n-1}qz^n = \frac{qz}{1-pz}.$$

Donc, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, d'après le théorème du cours on a donc

$$f_{X+Y}(z) = f_X(z)f_Y(z) = \frac{pqz^2}{(1-pz)(1-qz)}.$$

Si $p = q = 1/2$ d'après la première partie de 1) on a donc

$$f_{X+Y}(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}z^n,$$

avec pour rayon de convergence 2, et $P[X+Y=n] = \frac{n-1}{2^n}$ si $n \geq 2$.

Si $p < 1/2 < q$, d'après la seconde partie de 1) on a donc

$$f_{X+Y}(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{pq^n - qp^n}{q-p}z^n,$$

avec pour rayon de convergence $1/q$, et $P[X+Y=n] = \frac{pq^n-qp^n}{q-p}$ si $n \geq 2$.

Enfin, on calcule $f'_X(z) = p/(1-qz)^2$, $f''_X(z) = 2pq/(1-qz)^3$, et on en tire, puisque le rayon de convergence est > 1 :

$$\mathbb{E}(X) = f'_X(1), \mathbb{E}(X(X-1)) = f''_X(1) = 2q/p^2,$$

$$\sigma^2(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = q/p^2.$$

Puisque p et q jouent des rŞles symétriques, $\mathbb{E}(Y) = 1/q$ et $\sigma^2(Y) = p/q^2$. Enfin $\mathbb{E}(X+Y) = 1/p + 1/q$ par la linéarité de l'espérance, et $\sigma^2(X+Y) = q/p^2 + p/q^2$ par l'indépendance de X et Y.

3) Une suite de succès et d'échecs telle que $Z = n \geq 2$ est nécessairement telle que ses n premiers termes $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ soient de la forme $EE...EESS...SSE$, c'est-à-dire que il existe un entier $1 \leq x \leq n-1$ avec $\omega_i = E$ si $i < x$, $w_j = S$ si $x \leq j \leq n-1$ et $\omega_n = E$. Si X est le temps d'attente du premier succès, si Y est le temps d'attente du premier échec après qu'on ait eu le premier succès, alors X et Y sont indépendantes et suivent les lois de Pascal ci dessus, et de plus $Z = X + Y$. D'où le résultat demandé.

Exercice 3: 1) La fonction F est continue et est dérivable sauf aux points 1 et -1 et sa dérivée est $\frac{1}{2}\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)$. Les graphes sont immédiats. Ensuite

$$L_U(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{zx}dx = \frac{\text{sh}z}{z}.$$

2) Pour $n = 1$ la formule est triviale. Supposons la vraie à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a donc par cette hypothèse de récurrence, puis par la formule rappelée appliquée à $x = z/2^n$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \log \text{ch}(\frac{z}{2^k}) = \log \frac{\text{sh}(z)}{2^n \text{sh}(\frac{z}{2^n})} + \log \text{ch}(\frac{z}{2^{n+1}}) =$$

$$\log \frac{\text{sh}(z)}{2^n \text{sh}(\frac{z}{2^n})} + \log \frac{\text{sh}(\frac{2z}{2^{n+1}}))}{2\,\text{sh}(\frac{z}{2^{n+1}})} = \log \frac{\text{sh}(z)}{2^{n+1}\text{sh}(\frac{z}{2^{n+1}})},$$

et la récurrence est étendue. Ensuite, on sait que le premier terme du développement limité de sh$x$ est x, donc la limite de $2^n\text{sh}(\frac{z}{2^n})$ quand n tend vers l'infini est z. Les sommes partielles de la série considérée tendent donc vers $\log \frac{\text{sh}(z)}{z}$, c'est dire que la série converge et a pour somme $\log \frac{\text{sh}(z)}{z}$.

3) Puisque les v.a. X_k sont indépendantes, il en est de même pour les v.a. $\exp(zX_k/2^k)$ et on a donc, à l'aide de la première partie du 2):

$$\mathbb{E}(\exp zS_n) = \mathbb{E}(\prod_{k=1}^{n} \exp(zX_k/2^k)) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\exp(zX_k/2^k)) =$$

$$\prod_{k=1}^{n} \text{ch}(\frac{z}{2^k}) = \frac{\text{sh}(z)}{2^n\text{sh}(\frac{z}{2^n})}.$$

La série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{2^k}$ est absolument convergente car $|X_n| = 1$, que la série géométrique de terme général $1/2^n$ est de raison < 1. La deuxième partie du 2) permet d'affirmer que

$$L_S(z) = \lim_{n \to \infty} L_{S_n}(z) = \frac{\operatorname{sh}(z)}{z} = L_U(z).$$

D'après un théorème admis du cours, on peut remarquer d'ailleurs que cela entraŇne que S et U sont de même loi, c'est à dire que F_U est la fonction de répartition de S.

Université Paul Sabatier. Licence de mathématiques fondamentales, contrôle intermédiaire du 13 avril 2000.

Durée: 2heures. Aucun document. Affichage des résultats le 5 mai à 14:00.

Exercice 1. Soit $n \geq 2$, et soit $U_1,U_2,\dots,U_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$.
On note $X = \min(U_1,U_2,\dots,U_n)$ et $Y = \max(U_1,U_2,\dots,U_n)$. On fixe a et b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$.

1. Dessiner l'ensemble du plan
$$E_{a,b} = \{(x,y); 0 \leq a \leq x \leq y \leq b \leq 1\}.$$
2. Calculer $G(a,b) = \Pr(0 \leq a \leq X \leq Y \leq b \leq 1)$.
3. Montrer que $\Pr(X \leq a\ ;\ Y \leq b) = G(0,b) - G(a,b)$, et en déduire la densité de (X,Y).
4. Soit $D = Y - X$. Quelle est la densité de la loi jointe de (X,D)?

Exercice 2. Soit a et b fixés dans $]0,1[$. Soit X et Y des v.a. indépendantes, à valeurs dans l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers ≥ 0 et de lois respectives données par $\Pr(X = x) = (1-a)a^x$ et $\Pr(Y = y) = (1-b)b^y$. Soit $M = \min(X,Y)$ et $D = X - Y$. Pour $m \in \mathbf{N}$, calculer
$$\Pr(X \geq m),\ \Pr(Y \geq m),\ \Pr(M \geq m),\ \Pr(M = m).$$
Pour $m \in \mathbf{N}$ et pour d dans l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs, calculer $\Pr(M = m; D = d)$. En déduire $\Pr(D = d)$. Les v.a. M et D sont elles indépendantes?

Exercice 3. Les tables montrent que
$$\int_{-\infty}^{0,5} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = 0,6914....$$
Soit X une variable aléatoire normale de moyenne -1 et d'écart-type 2. Calculer les nombres suivants:
$$\Pr(X \geq 0),\ \Pr(-2 \leq X \leq -1),\ \Pr(X \notin [-2,0]).$$

Université Paul Sabatier. NT 07, Licence de mathématiques fondamentales, Examen du 23 juin 2000.

Durée: 2heures. Aucun document. Affichage des résultats le 27 juin à 14:00.

Question de cours. Enoncer sans démonstration la loi forte des grands nombres pour une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, avec sa réciproque.

Problème. Dans tout le problème, si W est une variable aléatoire (v.a.) réelle, on note par φ_W sa transformée de Fourier, définie pour z réel par $\varphi_W(z) = \mathbb{E}(e^{izW})$.

a) Soit U et V deux v.a. indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$, et soit $Z = U - V$. Montrer que la densité de Z est $f_Z(z) = (1 - |z|)_+$ (où la notation a_+ signifie $a_+ = 0$ si $a \leq 0$ et $a_+ = a$ si $a \geq 0$). On pourra pour cela considérer la fonction $z \mapsto \Pr(U - V \leq z)$ et sa dérivée.

b) Les notations étant celles du a), calculer $\varphi_Z(t)$ (Méthode: calculer φ_U et en déduire $\varphi_{-V} = \varphi_{-U}$). La formule d'inversion

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} \varphi_Z(t) dt$$

est elle applicable?

c) On considère une v.a. X réelle telle que $\varphi_X(z) = (1 - |z|)_+$. Donner sa densité à l'aide du b).

d) On considère des v.a. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ indépendantes et de même loi que X, définie au c), et on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Calculer $\varphi_{S_n}(z)$, $\varphi_{S_n/n}(z)$ et $\lim_{n\to\infty} \varphi_{S_n/n}(z)$. En déduire que la suite des lois des S_n/n converge vers une loi limite. A l'aide de la formule d'inversion de Fourier, donner la densité de cette loi limite.

e) La suite S_n/n du d) converge t-elle presque-sûrement?

Barême: Q=3, a=3, b=4, c=2, d=6, e=2.

NL 07, corrigé de l'examen du 23 juin 2000.

Question de cours. Soit $X_1,\dots,X_n,\dots$ des v.a. réelles indépendantes et de même loi. Alors la suite $\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$ converge presque-sûrement si et seulement si $\mathbb{E}(|X_1|)<\infty$. Dans ces conditions,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)=\mathbb{E}(X_1).$$

Question a). On sait que la fonction de répartition $F=F_U$ est $F(u)=u$ si $0<u<1$ et est égale à 1 pour $1\leq u$ et à 0 pour $u\leq 0$. Donc

$$F_Z(z)=\Pr(U\leq z+V)=\mathbb{E}(F(z+V))=\int_0^1 F(z+v)dv=\int_z^{z+1}F(u)du,$$

ce qui donne pour $-1\leq z\leq 0$:

$$F_Z(z)=\int_0^{z+1}udu=\frac{1}{2}(z+1)^2,$$

puis pour $0\leq z\leq 1$:

$$F_Z(z)=\int_z^1 udu=\frac{1}{2}(1-z^2),$$

et naturellement $F_Z(z)=0$ si $z\leq -1$ et $F_Z(z)=1$ si $z\geq 1$. En dérivant on a la densité $F'_Z=f_Z$ annoncée.

Question b). $\varphi_U(t)=\mathbb{E}(\exp itU)=1$ si $t=0$ et $(\exp(it)-1)/t$ sinon. Ensuite $\varphi_{-V}(t)=\varphi_{-U}(t)=\varphi_U(-t)$. Puis que U et V sont indépendantes on en déduit que si $t\neq 0$ on a

$$\varphi_Z(t)=\varphi_U(t)\varphi_{-V}(t)=(\exp(it)-1)(\exp(-it)-1)/t^2=2(1-\cos t)/t^2,$$

avec trivialement $\varphi_Z(0)=1$. En appliquant le critère de Riemann pour les intégrales impropres, on voit que la fonction $t\mapsto\varphi_Z(t)$ est intégrable à l'infini, puisque $|\varphi_Z(t)|=|2(1-\cos t)/t^2|\leq 4t^{-2}$. On est donc dans les conditions d'application de la formule d'inversion de Fourier et la formule de l'énonçé est correcte.

Question c). La formule du $b)$ s'écrit explicitement

$$(1-|z|)_+=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izt}\frac{2(1-\cos t)}{t^2}dt.$$

Faisons y le changement de variable $x=-t$. On obtient

$$(1-|z|)_+=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}\frac{1-\cos x}{x^2}dt.$$

Cette formule montre que la densité de X est $f_X(x)=\frac{1-\cos x}{\pi x^2}$.

Question d). Puisque les v.a. sont indépendantes et de même loi que X on a $\varphi_{S_n}(z) = (\varphi_X(z))^n = (1-|z|)_+^n$, et donc $\varphi_{S_n/n}(z) = \varphi_{S_n}(z/n) = (1-\frac{|z|}{n})_+^n$, et donc $\lim_{n\to\infty}\varphi_{S_n/n}(z) = e^{-|z|}$. On remarque $z \mapsto \exp -|z|$ est continue. D'après le théorême de Paul Lévy, cela garantit la convergence en loi de la suite $(S_n/n$. On remarque ensuite que la fonction $z \mapsto \exp -|z|$ est intégrable. D'après la formule d'inversion de Fourier, la densité de la loi limite est donc $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx-|z|}dz =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-izx+z}dz + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-izx-z}dz = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Question e). Si la suite S_n/n convergeait presque-sûrement, elle convergerait en loi, et la loi limite aurait la densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Or la loi forte des grands nombres affirme que si S_n/n converge presque sûrement, ce ne peut être que vers une constante, qui serait d'ailleurs l'espérance de X_1. Il y a donc une contradiction, et donc S_n/n ne converge pas presque-sûrement. On vérifie d'ailleurs directement que X_1 ne satisfait pas $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ et donc que $\mathbb{E}(X_1)$ n'existe pas. En effet, on connait la densité de X_1 par la question c) et il est clair que

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1-\cos x}{\pi x^2}dx = 2\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{\pi x}dx = \infty.$$

Université Paul Sabatier. NL 12, Licence de mathématiques pour l'enseignement, Examen du 23 juin 2000.

Durée: 2heures. Aucun document. Affichage des résultats le 27 juin à 14:00.

Question de cours. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité et possédant des variances finies non nulles. Donner la définition du coefficient de corrélation $r(X,Y)$ de (X,Y). Si (X,Y) est de loi normale dans $\mathbb{R}^2$, expliquer pourquoi X et Y sont indépendantes lorsque $r(X,Y)=0$.

Problème. On admet la formule suivante: pour $p>0$ et $t>0$ on a

$$(*) \quad \int_0^\infty u^{-3/2}e^{-\frac{p^2}{2u}-tu}du = \frac{\sqrt{2\pi}}{p}e^{-p\sqrt{2t}}.$$

a) Si $p>0$ et $\theta>0$, soit U une variable aléatoire (v.a) de loi

$$P_\theta^{(p)}(du) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}}u^{-3/2}e^{-\frac{p^2}{2u}-\frac{\theta u}{2}+p\sqrt{\theta}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(u)du.$$

A l'aide de (*), montrer que si $z<\theta/2$ alors

$$\mathbb{E}(e^{zU}) = \exp(p\sqrt{\theta}-p\sqrt{\theta-2z}).$$

En déduire $\mathbb{E}(Ue^{zU})$ par dérivation ainsi que $\mathbb{E}(U)$. Calculer de même $\mathbb{E}(U^2e^{zU})$, $\mathbb{E}(U^2)$ et la variance de U.

b) Soit de plus $q>0$ et V une v.a. indépendante de U et de loi $P_\theta^{(q)}$. A l'aide du a), montrer que $U+V$ est de loi $P_\theta^{(p+q)}$.

c) Soit $X_1,\dots X_n$ des v.a. indépendantes et même loi $P_\theta^{(1)}$, où θ est un paramètre positif inconnu. Donner à l'aide du b) la loi de $S=X_1+\cdots+X_n$.

d) On considère alors $(X_1,\dots,X_n)$ comme un échantillon permettant d'estimer θ et on rappelle que, le modèle étant exponentiel, S est donc une statistique exhaustive. Montrer à l'aide du a) que S/n est un estimateur non biaisé de $g(\theta)=1/\sqrt{\theta}$ et donner son risque quadratique. Connaissant S, calculer l'estimateur $\hat{\theta}_0(S)$ du maximum de vraisemblance pour θ.

e) Les tables montrent que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^1 \exp(-\frac{z^2}{2})dz = 0{,}8413$. En déduire une valeur approchée pour n grand de $\Pr(S \geq \frac{n}{\sqrt{\theta}}+\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{\theta})^{3/2}})$, en justifiant votre réponse.

Barême: Q=4, a=2+2+2, b=1, c=1, d=1+1+3, e=3.

NL 12, corrigé de l'examen du 23 juin 2000.

Question de cours. Si $a = \mathbb{E}(X)$ et $b = \mathbb{E}(Y)$ notons $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-a)(Y-b))$, $\sigma(X) = (\mathbb{E}((X-a)^2))^{1/2}$ et $\sigma(Y) = (\mathbb{E}((Y-b)^2))^{1/2}$. Alors le coefficient de corrélation est

$$r(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Si de plus (X,Y) est de loi normale $N_{(a,b),\Sigma}$, et si $r(X,Y) = 0$, alors $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ et donc

$$\Sigma = \left[\begin{array}{ll} \sigma^2(X) & 0 \\ 0 & \sigma^2(Y) \end{array} \right].$$

Cela entraîne que X et Y sont indépendantes. Cela peut se voir de deux manières:

– Ou bien en considérant la densité de (X,Y) qui en général quand $\det \Sigma \neq 0$ est

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det \Sigma}} \exp -\frac{1}{2}(x-a,y-b)\Sigma^{-1} \left(\begin{array}{c} x-a \\ y-b \end{array} \right).$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, on a alors

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi\sigma(X)\sigma(Y)} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2(X)} - \frac{(y-b)^2}{2\sigma^2(Y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(X)} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2(X)}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(Y)} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma^2(Y)}} \end{aligned}$$

La densité $f_{X,Y}(x,y)$ étant le produit d'une fonction de x seul et de y seul est donc la densité d'un couple de v.a. indépendantes.

– Ou bien en considérant la transformée de Laplace ou de Fourier de (X,Y). Procédons par exemple avec la transformée de Fourier. Elle est en général

$$\varphi_{X,Y}(t,s) = \exp(iat + ibs - \frac{1}{2}(t,s)\Sigma \left(\begin{array}{c} t \\ s \end{array} \right)).$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, on a alors

$$\begin{aligned} \varphi_{X,Y}(t,s) &= \exp(iat + ibs + \frac{1}{2}(\sigma^2(X)t^2 + \sigma^2(Y)s^2)) \\ &= \exp(iat - \frac{1}{2}\sigma^2(X)t^2) \times \exp(ibs - \frac{1}{2}\sigma^2(Y)s^2) \end{aligned}$$

La transformée de Fourier $\varphi_{X,Y}(t,s)$ étant le produit d'une fonction de t seul et de s seul est donc la transformée de Fourier d'un couple de v.a. indépendantes.

Question a). Pour calculer $\mathbb{E}(\exp(zU) = \int e^{zu} P_\theta^{(p)}(du)$, il suffit de prendre $t = \frac{\theta}{2} - z$ dans la formule (*) pour avoir le résultat demandé. On remarque que en faisant $z = 0$

on obtient 1, ce qui prouve que $P_\theta^{(p)}(du)$ est bien une loi de probabilité. On remarque que pour tout $t > 0$ et pour tout entier $n \geq 0$ l'intégrale

$$\int_0^\infty u^n u^{-3/2} e^{-\frac{p^2}{2u} - tu} du$$

converge, ce qui entraîne que la fonction définie par l'intégrale $z \mapsto \int e^{zu} P_\theta^{(p)}(du)$ est indéfiniment dérivable sous le signe somme dans l'intervalle $] - \infty, \frac{\theta}{2}[$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U \exp(zU)) &= \frac{d}{dz} \exp(p\sqrt{\theta} - p\sqrt{\theta - 2z}) \\ &= \frac{p}{\sqrt{\theta - 2z}} \exp(p\sqrt{\theta} - p\sqrt{\theta - 2z}) \end{aligned}$$

et donc en faisant $z = 0$ on obtient $\mathbb{E}(U) = \frac{p}{\sqrt{\theta}}$. De la même manière:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U^2 \exp(zU)) &= \frac{d^2}{dz^2} \exp(p\sqrt{\theta} - p\sqrt{\theta - 2z}) \\ &= (\frac{p^2}{\theta - 2z} + \frac{p}{(\sqrt{\theta - 2z})^3}) \exp(p\sqrt{\theta} - p\sqrt{\theta - 2z}). \end{aligned}$$

Donc en faisant $z = 0$, on obtient $\mathbb{E}(U^2) = (\frac{p^2}{\theta} + \frac{p}{(\sqrt{\theta})^3})$ et en utilisant la formule d'Huyghens on obtient la variance de U :

$$\sigma^2(U) = \mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2 = \frac{p}{(\sqrt{\theta})^3}.$$

Questions b) et c). Puisque U et V sont indépendantes, pour $z < \theta/2$ on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(z(U + V)) &= \mathbb{E}(\exp(zU))\mathbb{E}(\exp(zV)) \\ &= \exp(p\sqrt{\theta} - p\sqrt{\theta - 2z}) \exp(q\sqrt{\theta} - q\sqrt{\theta - 2z}) \\ &= \exp((p + q)(\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta - 2z})) \end{aligned}$$

Comme la transformée de Laplace caractérise la loi, cela montre que celle de $U + V$ est $P_\theta^{(p+q)}$. Il est clair alors que si n est un entier >0, et que si les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes et de même loi $P_\theta^{(1)}$ alors $S = X_1 + \cdots + X_p$ est de loi $P_\theta^{(n)}$. Cela peut se voir très rigoureusement par une récurrence facile sur n.

Question d). D'après le a) on sait que $\mathbb{E}(S) = n/\sqrt{\theta}$. Donc $\mathbb{E}(S/n) = 1/\sqrt{\theta}$. Comme cet estimateur de $1/\sqrt{\theta}$ est non biaisé, son risque quadratique est égal à sa variance. Or la variance de S a été calculée en a) et est $n/(\sqrt{\theta})^3$. Comme en général $\sigma^2(\lambda X) = \lambda^2\sigma^2(X)$, le risque quadratique est donc

$$\sigma^2(S/n) = \frac{1}{n(\sqrt{\theta})^3}.$$

Pour calculer le maximum de vraisemblance connaissant S, rappelons que la loi de S est

$$P_\theta^{(n)}(ds) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} s^{-3/2} e^{-\frac{n^2}{2s} - \frac{\theta s}{2} + n\sqrt{\theta}} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s)ds.$$

C'est dire que si on prend pour mesure de référence la mesure

$$\nu(ds) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} s^{-3/2} e^{-\frac{n^2}{2s}} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s)ds,$$

qui ne dépend pas de θ, alors $P_\theta^{(n)}(ds) = e^{-\frac{\theta s}{2} + n\sqrt{\theta}} \nu(ds)$. Le calcul du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_0(S)$ pour S connu se réduit à la recherche du θ qui maximise sur $]0, +\infty[$ la fonction

$$\theta \mapsto e^{-\frac{\theta S}{2} + n\sqrt{\theta}},$$

ou encore la fonction

$$\theta \mapsto l_S(\theta) = -\frac{\theta S}{2} + n\sqrt{\theta}.$$

L'étude des variations de l_S sur $]0, +\infty[$ est facile: sa dérivée est $l'_S(\theta) = \frac{1}{2}(\frac{n}{\sqrt{\theta}} - S)$ et s'annule seulement en $\theta = n^2/S^2$. Cette dérivée est >0 avant et <0 après. L'estimateur du maximum de vraisemblance est donc $\hat{\theta}_0(S) = n^2/S^2$.

Question e). Notons plutôt $S = S_n$. Le théorème central limite affirme que la suite des lois des v.a.

$$\frac{(S_n - \frac{n}{\sqrt{\theta}})}{\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{\theta})^{3/2}}}$$

converge vers $N_{0,1}$. Donc la probabilité pour que cette v.a. soit ≥ 1 est approximativement $1 - 0{,}8413$.

Université Paul Sabatier. NT 07, Licence de mathématiques fondamentales, Examen du 13 septembre 2000.

Durée: 2heures. Aucun document. Affichage des résultats le 20 septembre à 14:00.

Problème.

A) Soit $Y_1,\dots,Y_k,\dots$ une suite de variables aléatoires (v.a.) réelles indépendantes et de même loi telle que $\mathbb{E}(|Y_1|)<\infty$. On pose $S_k=Y_1+\cdots+Y_k$. On rappelle que la loi des grands nombres affirme que $\lim_{k\to\infty}S_k/k=\mathbb{E}(Y_1)$ presque sûrement. En déduire que $\lim_{k\to\infty}Y_k/k=0$ presque sûrement.

B) Dans toute la suite, on considère une suite $(A_n,B_n)_{n\geq 1}$ de v.a. de $]0,\infty[^2$ indépendantes et de même loi (les v.a. A_1 et B_1 peuvent être dépendantes entre elles). On suppose de plus que

$$\mathbb{E}(|\log A_1|)<\infty,\ \mathbb{E}(\log A_1)<0,\ \mathbb{E}(|\log B_1|)<\infty.$$

En appliquant la loi des grands nombres, montrer que

$$\lim_{n\to\infty}(A_1A_2\dots A_n)^{1/n}=\exp(\mathbb{E}(\log A_1)),$$

et que $\lim_{n\to\infty}(A_1A_2\dots A_n)=0$. En appliquant la question A), montrer que

$$\lim_{k\to\infty}(B_k)^{1/k}=1.$$

De ces résultats, déduire en particulier que la série à termes aléatoires

$$B_1+\sum_{k=2}^{\infty}A_1A_2\dots A_{k-1}B_k$$

est convergente (méthode: lui appliquer le critère de Cauchy $u_n^{1/n}$ de convergence des séries à termes positifs).

C) Pour $n\geq 1$, on considère les transformations F_n, Z_n et W_n affines aléatoires de $\mathbb{R}$ définies par $F_n(x)=A_nx+B_n$, par $Z_n=F_1\circ F_2\circ\cdots\circ F_n$ et par $W_n=F_n\circ F_{n-1}\circ\cdots\circ F_1$. Montrer par récurrence sur n que

$$Z_n(x)=A_1A_2\dots A_nx+B_1+\sum_{k=2}^{n}A_1A_2\dots A_{k-1}B_k.$$

Si X est une variable aléatoire positive indépendante des $(A_n,B_n)_{n\geq 1}$, dire pourquoi les v.a. $W_n(X)$ et $Z_n(X)$ sont de même loi.

D) Montrer à l'aide de la question B) que la suite de v.a. $(Z_n(X))_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers une v.a. qu'on note Z. Pourquoi la v.a Z est elle la même quelle que soit la v.a. X? Pourquoi la suite de v.a. $(Z_n(X))_{n\geq 1}$ converge t-elle en loi? A l'aide de la question C), montrer que la suite des lois des v.a. $(W_n(X))_{n\geq 1}$ converge vers la loi de Z.

E) On suppose maintenant de plus que la loi de X est telle que X et $F_1(X) = A_1X + B_1$ sont de même loi. En déduire qu'alors X et Z sont de même loi (méthode: montrer par récurrence sur n que la v.a. $W_n(X)$ est de même loi que X, et appliquer la question D)).

F) *(Exemple)* On rappelle (cours) que si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1}$$

On fixe deux nombres $p > 0$ et $q > 0$ et on suppose que la v.a. X a pour loi

$$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)dx,$$

que la v.a. A_1 a pour loi

$$\frac{\Gamma(2p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q)}\frac{a^{p-1}}{(1+a)^{2p+q}}\mathbf{1}_{]0,\infty[}(a)da,$$

et qu'enfin $B_1 = A_1$. On suppose toujours X et A_1 indépendantes. En appliquant (

Barême: A=2 points, B=4, C=3, D=3, E=3, F=7.

Université Paul Sabatier. NT 07, Licence de mathématiques fondamentales, Examen du 13 septembre 2000, Corrigé.

A)
$$\frac{Y_k}{k} = \frac{S_k}{k} - \frac{k-1}{k}\frac{S_{k-1}}{k-1} \to_{k\to\infty} \mathbb{E}(Y_1) - 1.\mathbb{E}(Y_1) = 0.$$

B) On applique la loi des grands nombres à la suite $Y_k = \log A_k$ et on obtient
$$(A_1 \dots A_n)^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}(\log A_1 + \dots + \log A_n)) \to_{n\to\infty} \exp(\mathbb{E}(\log A_1)).$$
De plus, on sait que $\mathbb{E}(\log A_1) < 0$ et donc que $\exp(\mathbb{E}(\log A_1)) < 1$. Si $u_n = A_1 \dots A_n$, puisque $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} < 1$ la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, son terme général tend donc vers 0 et on a bien $\lim_{n\to\infty} A_1 \dots A_n = 0$ presque sûrement. De la même facon, on applique le A) à $Y_k = \log B_k$ et on en tire que $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\log B_k = 0$ et donc $\lim_{k\to\infty}(B_k)^{1/k} = 1$. Considérons enfin $u_k = A_1A_2 \dots A_{k-1}B_k$. Alors, d'après les résultats précédents on a
$$u_k^{1/k} = ((A_1A_2 \dots A_{k-1})^{1/k-1})^{(k-1)/k}(B_k)^{1/k} \to_{k\to\infty} \exp(\mathbb{E}(\log A_1)).1 < 1,$$
et d'après le critère de Cauchy de convergence des séries on a que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ converge presque sûrement, ce qu'il fallait démontrer.

C) La formule est vraie trivialement pour $n = 1$. Supposons la vraie pour $n \geq 1$. Alors
$$\begin{aligned} Z_{n+1}(x) &\overset{(1)}{=} Z_n(F_{n+1}(x)) \\ &\overset{(2)}{=} A_1A_2 \dots A_n(A_{n+1}x + B_{n+1}) + B_1 + \sum_{k=2}^{n} A_1A_2 \dots A_{k-1}B_k \\ &\overset{(3)}{=} A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}x + B_1 + \sum_{k=2}^{n+1} A_1A_2 \dots A_{k-1}B_k, \end{aligned}$$
où (1) vient de la définition de $Z_{n+1}(x)$, (2) de l'hypothèse de récurrence et (3) d'un réarrangement. La récurrence est donc étendue.

Puisque les (A_n,B_n) sont de même loi, il est clair que les fonctions affines Z_n et W_n sont de même loi. Leur évaluation en une v.a. X indépendante des (A_n,B_n), et donc indépendante de Z_n et W_n sont donc des v.a. de même loi.

D) On a vu au B) que la série $B_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_1A_2 \dots A_{k-1}B_k$ converge. Notons par Z sa somme. On a également vu au B) que $\lim_{n\to\infty} A_1 \dots A_n = 0$ presque sûrement: cela entraîne que $\lim_{n\to\infty} Z_n(X) = Z$ presque sûrement. Par définition, Z ne dépend pas de X. La convergence presque sûre entraînant la convergence en loi, on en déduit que la suite des lois de $Z_n(X)$ converge vers la loi de Z. On a vu à la question C) que $W_n(X)$ et $Z_n(X)$ sont de même loi. On en déduit que la suite des lois de $W_n(X)$ converge vers la loi de Z.

E) Montrons par récurrence sur n que $W_n(X)$ et X sont de même loi. C'est vrai par hypothèse pour $n = 1$. Supposons ce résultat vrai pour n. On sait que $W_{n+1}(X) = F_{n+1}(W_n(X))$. De plus $W_n(X)$ est indépendante de F_{n+1}, car $W_n(X)$ est une fonction de $X, A_1, \ldots, B_n$ et F_{n+1} dépend de (A_{n+1}, B_{n+1}). Enfin F_{n+1} est de même loi que F_1 par définition, et $W_n(X)$ est de même loi que X, par hypothèse de récurrence. Donc $F_{n+1}(W_n(X))$ est de même loi que $F_1(X)$, qui est de même loi que X par hypothèse. La récurrence est donc étendue.

Or on sait d'après D) que la suite des lois de $W_n(X)$ converge vers la loi de Z. Comme toutes les lois des $W_n(X)$ sont identiques à celle de X, on en déduit que X et Z sont de même loi.

F) Par définition, puis en appliquant (

$$\mathbb{E}(A_1^s) = \frac{\Gamma(2p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q)} \int_0^\infty \frac{a^{s+p-1}}{(1+a)^{2p+q}} da = \frac{\Gamma(p+s)\Gamma(p+q-s)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q)}.$$

De même en appliquant (

$$\mathbb{E}((1+X)^s) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q-s}} dx = \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(q-s)}{\Gamma(p+q-s)\Gamma(q)}.$$

Finalement, en appliquant (

Si $\Pr(A_1 \geq a) = \frac{1}{(1+a)^{1+q}}$ pour tout $a \geq 0$, alors la fonction de répartition de A_1 est 0 si $a < 0$ et $1 - \frac{1}{(1+a)^{1+q}}$ si $a \geq 0$. En dérivant par rapport à a on voit que la densité de A_1 est $\frac{1+q}{(1+a)^{2+q}} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(a)$, c'est à dire du type de l'exemple avec $p = 1$. La densité de Z est donc $\frac{q}{(1+z)^{1+q}} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(z)$, et donc pour tout $z \geq 0$: $\Pr(Z \geq z) = \int_z^\infty \frac{q}{(1+x)^{1+q}} dx = \frac{1}{(1+z)^q}$.

Complétons ce corrigé en montrant le point admis $\mathbb{E}(\log A_1) < 0$. Puisque

$$\frac{d}{ds}\mathbb{E}(A_1^s) = \mathbb{E}(A_1^s \log A_1),$$

on a

$$\mathbb{E}(\log A_1) = \left[\frac{d}{ds} \log \mathbb{E}(A_1^s)\right]_{s=0} = \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} - \frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Le problème est donc de montrer que $t \mapsto \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ est croissante sur $]0,\infty[$, ou de montrer que $t \mapsto \log \Gamma(t)$ est strictement convexe. Cela vient de

$$(\log \Gamma(t))'' = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^\infty [\log x - \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}]^2 x^{t-1} e^{-x} dx > 0.$$

Université Paul Sabatier. NT 12, Licence de mathématiques pour l'enseignement, Examen du 13 septembre 2000.

Durée: 2heures. Aucun document. Affichage des résultats le 20 septembre à 14:00.

Question de cours. Soit μ et $(\mu_n)_{n\geq 1}$ des probabilités sur $\mathbb{R}$. On rappelle que on dit que la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers μ si pour toute fonction continue bornée réelle ou complexe sur $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mu_(dx).$$

(1) Donner sans démonstration, en termes de transformées de Fourier, une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi (théorème de Paul Lévy).

(2) Donner sans démonstration, en termes de fonctions de répartition, une condition nécessaire et suffisante de convergence en loi.

Problème. On rappelle que pour $|t| < 1$:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)}{n!}t^n = \frac{1}{(1-t)^\lambda}.$$

Soit X une variable aléatoire (v.a.) qui suit une loi négative binomiale $NB_{\lambda,p}$, avec $\lambda > 0$ et $0 < p = 1-q < 1$, donc de loi concentrée sur l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers ≥ 0 définie par

$$p^\lambda\delta_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)}{n!}p^\lambda q^n\delta_n.$$

A. Calculer la fonction génératrice de X, c'est à dire $\mathbb{E}(z^X)$ avec $|z|\leq 1$. Déduire du résultat $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2-X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ et la variance $\sigma^2(X)$ de X. Montrer que $\mathbb{E}(X) < \sigma^2(X)$.

B. Soient $X_1,\dots,X_n$ des v.a. indépendantes et de même loi que X. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)$. Quelle est la loi de $n\overline{X}_n$? (méthode: considérer sa fonction génératrice et utiliser le A). Calculer $\mathbb{E}(\overline{X}_n)$ et $\mathbb{E}(\overline{X}_n^2)$.

C. Avec les hypothèses de B) on définit la v.a. $S_n\geq 0$ par

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X}_n)^2.$$

Démontrer que $S_n^2 = -\frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$. En déduire à l'aide du A et du B que la valeur de $\mathbb{E}(S_n^2)$ est la variance de X.

D. Avec les hypothèses de C) on fait tendre n vers l'infini. A l'aide de la loi des grands nombres, calculer les limites presque sures de $\overline{X}_n$, de $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}X_k^2$, de S_n^2 et de $S_n^2-\overline{X}_n$ et vérifier que la dernière est >0.

D. On suppose maintenant que λ et p sont des paramètres inconnus, que la suite $(X_1, \dots, X_n)$ est un échantillon à partir duquel on veut estimer λ et p par la méthode dite des moments. Si $\overline{X}_n$ et S_n^2 sont considérés comme des estimateurs de la moyenne et de la variance de X respectivement, dire si ces estimateurs sont biaisés ou non. On définit les estimateurs $\hat{\lambda}_n$ et $\hat{p}_n = 1 - \hat{q}_n$ par les équations

$$\frac{\hat{\lambda}_n \hat{q}_n}{\hat{p}_n} = \overline{X}_n, \; \frac{\hat{\lambda}_n \hat{q}_n^2}{\hat{p}_n^2} + \frac{\hat{\lambda}_n \hat{q}_n}{\hat{p}_n} = S_n^2.$$

Montrer $\hat{\lambda}_n > 0$ et $0 < \hat{p}_n < 1$ si et seulement si $S_n^2 - \overline{X}_n > 0$. Au vu de la question D, cette méthode est elle raisonnable?

Barême: QC= 2+2 points, A=1+1+0,5+1+0,5, B=2+1+1, C=1+1, D=1+1+1+0,5+0,5, E=1+1.