Espaces métriques

1 Introduction

Travailler dans $\mathbb{R}$ est vite limitant. En effet, de nombreux problèmes ne peuvent se modéliser que sur des espaces vectoriels de dimension plus grande. Pensons par exemple à des modélisations de systèmes physiques comportant un nombre n de paramètres. L'étude de ce système se fera via l'étude de fonctions possédant n variable et donc définies sur des (parties d') espaces de dimension n. La possibilité d'utiliser de tels espaces est conditionnée par la possibilité de transposer les notions telles que la continuité des fonctions, la convergence des suites et voir même (mais ce sera pour la suite) les notions de dérivabilité, d'intégrabilité...Toutes ces notions ont un facteur commun, celui de faire intervenir la notion de distance ou de longueur. Ainsi l'on comprend l'importance de la possibilité de mesurer la distance entre deux points d'un espace donné.

2 Notions de base

X désigne un ensemble.

Définition Une application $d : X^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définit **une métrique** (ou une distance) sur X si elle vérifie:

- $\forall x,y \in X\ d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x,y \in X\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- L'inégalité triangulaire:$\forall x,y,z \in X\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Définition On appelle **espace métrique** tout couples (X,d) ou d est une métrique sur X.

Exemple ($\mathbb{R}$,| |), ($\mathbb{R}^n$,$|| ||_k$) où si $x,y \in X$ et si $(x_i)_{i=1..n}, (y_i)_{i=1..n}$ désignent les coordonnées de x et y,

$$||x-y||_k = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k)^{1/k}$$

Dans toute la suite on considère un espace métrique (X,d)

Définition Soit $x_0 \in X$.

- On appelle **boule ouverte de centre** x_0 **et de rayon** r l'ensemble $\{x \in X; d(x,x_0) < r\}$ que l'on note $B(x_0,r)$.
- On appelle **boule fermée de centre** x_0 **et de rayon** r l'ensemble $\{x \in X; d(x,x_0) \leq r\}$ que l'on note $B_f(x,r)$ ou encore

$$\overline{B}(x_0)(r).$$

3 Sous ensembles ouverts et sous ensembles fermés

Définition Un sous ensemble U de X sera dit **ouvert** si il est vide ou si pour tout élément x de cet ensemble on peut trouver une boule ouverte de rayon suffisamment petit en sorte qu'elle soit toute entière contenue dans U.

Définition L'ensemble O de tous les ouverts de X s'appelle **la topologie** de X.

Proposition

- X est ouvert.
- Une réunion quelconque d'ensemble ouverts est ouverte
- Une intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte.

Démonstration Contentons nous de prouver le cas de l'intersection. Les deux autres cas sont absoluments triviaux.
Soit n $\in \mathbb{N}$. On considère une famille de n ensembles ouverts $(U_i), i = 1..n$. Soit x un point dans l'intersection de ces n ensembles. x est donc un point de chacun de ces ouverts. On peut alors trouver, pour tout i=1..n un réél r_i tel que la boule de centre r_i et de centre x soit incluse dans U_i. Posons $r = inf\{r_i; i = 1..n\}$. La boule $B(x,r)$ est alors contenue dans chacun des U_i et on a ainsi trouvé une boule ouverte centrée en x et contenue dans l'intersection des U_i. Cette intersection est donc bien ouverte.

Définition Soit V $\in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ et x $\in$ X On dira que V est **un voisinage** de x si il existe un ouvert U de X tel que x soit élément de U et U soit inclus dans V .

Notation On notera $\mathcal{V}$(x) l'ensemble de tous les voisinages de x.

Proposition

- V$\in\mathcal{V}$(x)$\Leftrightarrow \exists\, B(x,r) \subset$V.
- Si O est ouvert dans X et si x $\in$ O alors O $\in \mathcal{V}$(x)

Proposition Un sous ensemble O de X est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.

Démonstration D'après la remarque précédente, le sens direct est évident. Montrons la réciproque. Supposons donc que O est un ensemble qui est voisinage de chacun de ses points. Pour tout x dans O, on peut donc trouver un sous ensemble O(x) de O tel que O(x) soit ouvert. On peut même écrire:

$$O = \bigcup_{x \in O} O(x).$$

O est donc réunion quelconque d'ouverts . Ceci implique évidemment que O est ouvert.

Définition Le complémentaire d'un sous ensemble ouvert de X sera appelé sous ensemble **fermé**.

Proposition
- X et $\emptyset$ sont fermés.
- Une réunion finie de fermés est fermée.
- Une intersection quelconque de fermés est fermée.

Démonstration C'est trivial, via les égalités suivantes (A et B désigne deux ensembles quelconques):

$$(A\bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c et (A\bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$$

4 Métrique induite

U désigne un sous ensemble de X.

Définition La restriction de la distance de X à U permet de définir une métrique sur U. Cette métrique s'appelle **la métrique induite** de celle de X sur U.

Remarque U munit de la métrique induite a une structure d'espace métrique .

Remarque Les ouverts de (U,d_1) (où d_1 désigne la métrique induite de celle de X sur U) sont les intersections des ouverts de X avec U.

5 Suites dans un espace métrique

Définition Rappelons qu'une suite est un ensemble de points indexés par les éléments de $\mathbb{N}$ dans X. Soit $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application croissante. L'ensemble de points $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore un ensemble de points indexés par $\mathbb{N}$ et est appelé **suite extraite** ou **sous suite** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition On appelera **valeur d'adhérence de la suite** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout élément x de X tel que $\forall\varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}\, d(x,x_n) < \varepsilon$.

Remarque x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si, pour tout voisinage V de x, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que x_n soit élément de V.

Remarque Tout élément de $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition On appelera **point d'accumulation** de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute valeur d'adhérence x de cette suite qui n'est pas un élément de $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Définition On dira que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X **converge** vers l'élément x de X si:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n>N\, d(x_n,x)<\varepsilon$$

Définition x est **la limite** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini. On écrira: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$=x

Remarque Si x est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors c'est l'unique point d'accumulation de cette suite.

Proposition On a équivalence entre
- x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Il existe une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.

Démonstration Supposons que x soit valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si x est élément de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que x=x_{n_0} et on pose, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\Phi(n)$=n_0. La sous suite $(x_{\Phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors clairement vers x. Si x n'est pas élément de la suite (c'est donc un point point d'accumulation), on peut trouver m dans $\mathbb{N}$ tel que x$_m$ soit élément de $B(x,1)$. On pose $\phi(0)=m$. Supposons construit jusqu'à l'ordre N une application $\phi:\{1..N\}\longrightarrow\mathbb{N}$ croissante et une suite $(x_{\phi(i)})_{i\in\{1..N\}}$ telle que pour tout i $\in\{1..N\}$, x$_{\phi(i)}\in B(x,\frac{1}{i})$. Construisons l'élément x$_{\phi(N+1)}$. Considérons pour cela la boule $B(x,\frac{1}{N+1})$. Cette boule est bien entendue un voisinage ouvert de x. Supposons que l'ensemble $\{x_i\,;i>N\}$ n'intersecte pas cette boule. Alors on pourrait facilement construire un voisinage de x qui n'intersecte pas $\{x_i;i\in\mathbb{N}\}$. Ce qui impliquerait que x n'est pas valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui est contraire à notre hypothèse de départ. L'ensemble $\{x_i;i>N\}$ intersecte donc $B(x,\frac{1}{N+1})$ en un ensemble non vide. Soit x$_m$ un point de cette intersection. On a, par construction, m>N. Posons $\phi(N+1)=m$. On a bien $\phi(N+1)>\phi(N)$ et x$_{\phi(N+1)}\in B(x,\frac{1}{N+1})$. On construit ainsi notre suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence.
Il faut encore montrer qu'elle converge vers x. Choisissons donc $\varepsilon>0$. Comme la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 , pour N assez grand, on peut supposer que si n>N alors 1/n<ε. Mais alors, si n>N, on a, par construction de $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, x$_\phi(n)\in B(x,\frac{1}{n})\subset B(x,\varepsilon)$. Donc, si n>N, d(x$_n$,x)<ε, Cqfd .

6 Intérieur et adhérence d'un sous ensemble de X

Définition Soit U une partie de X. On appelera **intérieur de U** le plus grand ouvert de X contenu dans U. On notera

$$\overset{\circ}{U}$$

l'intérieur de U.

Définition Soit U une partie de X. On appelera **adhérence de U** le plus petit fermé de X contenant U. On notera

$$\overline{U}$$

l'adhérence de U.

Définition On dira qu'un élément **x de X est adhérent au sous ensemble U** (ou est une valeur d'adhérence de U) de X si: $\forall V \in \mathcal{V}$(x), V $\bigcap U \neq \emptyset$.

Proposition L'adhérence d'un sous ensemble de X est égale à l'ensemble de toute les valeurs d'adhérence de cet ensemble.

Démonstration Soit U un sous ensemble de X et notons $Adh(U)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de U.
Montrons tout d'abord que $Adh(U)$ est fermé . Soit x un élément de $Adh(U)^c$. Alors on peut trouver un voisinage V de x tel que ce voisinage n'intersecte pas $Adh(U)$. Ce voisinage est donc dans $Adh(U)^c$. x possède alors un voisinage tout entier dans $Adh(U)^c$. Cela étant vrai pour tout élément x de $Adh(U)^c$ on en déduit que $Adh(U)^c$ est ouvert et donc que $Adh(U)$ est fermé . De plus, d'après la remarque précédente, U est tout entier dans $Adh(U)$. Donc, $Adh(U)$ est un fermé qui contient U. On peut alors affirmer que

$$\overline{U} \subseteq Adh(U)$$

.

Montrons maintenant que si F est un fermé de X contenant U alors F contient nécessairement $Adh(U)$. Soit donc F un fermé de X contenant U et soit x un élément de F^c. Comme F^c est ouvert, on peut trouver un voisinage V de x inclus dans F^c .Ce voisinage et F sont donc disjoints. Il en est donc de même pour ce voisinage et $Adh(U)$. Donc x est élément de $Adh(U)^c$. On a alors montré que $F^c \subseteq Adh(U)^c$ et donc que $Adh(U) \subseteq F$.
Concluons: $Adh(U)$ est un fermé contenant U et tout fermé contenant U contient $Adh(U)$. Ce dernier est donc le plus petit fermé contenant U et est donc égale à $\overline{U}$.

Définition On dit qu'un espace métrique (X,d) est à **base dénombrable de voisinage** si pout tout point x de X, on a $\exists (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}(x) / \forall V \in \mathcal{V}(x) \exists n \in \mathbb{N}\, V_n \subset \mathcal{V}$ et $\forall i \in \mathbb{N}\, V_{i+1} \subset \mathcal{V}_i$.

En fait on a la propriété suivante:

Proposition Tout espace métrique est à base dénombrable de voisinages.

Démonstration Il suffit, en un point x de X, de considérer la famille $(\mathrm{B}(x,\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ pour s'en convaincre.

Ceci a pour conséquence, en particulier, la propriété suivante, qui est fondamentale:

Proposition Soit U un sous ensemble de X: on a équivalence entre:
– x est un point adhérent à U.
– Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U convergeant vers x.

Démonstration Nous choisissons ici de procéder à une démonstration ne prenant pas en compte la métrique de notre espace mais seulement le fait qu'il soit à base dénombrable de voisinages. C'est en effet cette caractéristique seule qui fait, ici, tout fonctionner.

Occupons nous tout d'abord du sens direct: Supposons que x soit valeur d'adhérence de U . Alors tout voisinages V de x rencontre U. En particulier, comme (X,d) est à base dénombrable de voisinages , pour tout n dans $\mathbb{N}$, il existe un voisinage de x: V_n rencontrant U. Choisissons alors, pour n donné dans $\mathbb{N}$, x_n dans $V_n \cap$U. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour vérifier que cette suite converge vers x, il suffit de remarquer que si V est élément de $\mathcal{V}$(x) alors il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel V_{n_0} soit inclus dans V , et donc $\{x_n\,;\, n > n_0\} \subset V$ est élément de V. Dans tout V de $\mathcal{V}$(x), on trouve ainsi un élément de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui nous prouve la convergence souhaitée.

Pour la réciproque, on choisit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Pour tout V de $\mathcal{V}$(x), il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que x_n est élément de V$\cap$U. Ainsi pour tout V de $\mathcal{V}$(x), V$\cap$U est non vide. Ceci nous assure du fait que x est bien valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Voici maintenant un corollaire fondamentale car il donne un critère très pratique pour vérifier qu'un sous ensemble de X est fermé .

Corollaire Soient (X,d) un espace métrique et F un sous ensemble de X. On a équivalence entre:

– F est fermé .
– Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes d'éléments de F ,on a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ est élément de F.

Démonstration Supposons que F soit fermé. Alors tout point x de F est point adhérent à F . Donc, d'après la propriété précédente , on peut trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F ayant x pour limite .
Réciproquement, supposons que toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F ait sa limite dans F . Prenons un point x de l'adhérence de F . Comme x est un point adhérent à F, on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers x . Mais ceci implique, par hypothèse, que x est élément de F et donc que l'adhérence de F est incluse dans F. Ceci équivaut évidemment au fait que F est fermé .

Proposition fondamental L'ensemble des points d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\{x_n; n > i\}}.$$

Démonstration Soit x un point d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons V$_i$=$\{x_n; n > i\}$. Soit n$\in \mathbb{N}$. Montrons que x est dans l'adhérence de V_n. Soit r>0 et n$\in\mathbb{N}$. Supposons que $B(x,r) \cap$V$_n = \emptyset$. Posons r'=inf$\{d(x,x_i); i = 1..n,r\}$. Alors $B(x,r')$ est un voisinage de x qui n'intersecte pas $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Donc x n'est pas point d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui est absurde par hypothèse. Donc $B(x,r)\cap V_n \neq \emptyset$ et comme r est quelconque, x est dans l'adhérence de V_n. De plus, comme n aussi est quelconque dans $\mathbb{N}$,

$$x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{V_i}$$

.

Montrons maintenant que si

$$x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{V_i}$$

alors x est point d'accumulation de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit donc V un voisinage de x. On a, en particulier, $V\cap V_0 \neq \emptyset$ ce qui prouve immédiatement la propriété voulue.

Définition On dit qu'un sous ensemble A de X est **dense** dans (X,d) si son adhérence est égale à X.

Définition On dit qu'un sous ensemble A de X est **borné** si il existe r>0 et x$\in$ X tel que $A\subset B(x,r)$.

7 Application continue

Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques.

Définition On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est **continue en $\mathbf{x_0} \in \mathbf{X}$** si:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\eta > 0; \forall x \in X\; d(x,x_0) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Autement dit:

Proposition On a équivalence entre:
– f est continue en x
– $\forall\varepsilon > 0\, \exists\eta > 0; x \in B(x_0,\eta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon)$
– $\forall\varepsilon > 0\, \exists\eta > 0; B(x_0,\eta) \subset f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$
– $\forall\, V \in \mathcal{V}(f(x))\; f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$

Encore un critère fondamentale pour la continuité en un point:

Théorème Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $x \in X$. f est continue en x si et seulement si $\forall$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes vers x, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

Démonstration Supposons que f soit continue en x . Alors pour tout voisinage V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. Mais il existe N tel que si $n > N$ alors $x_n \in V$. Donc si $n > N, f(x_n)$ est élément de V. Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

Supposons maintenant que f ne soit pas continue en x. Ceci implique qu'il existerait un voisinage V de f(x) tel que f^{-1}(V) ne soit pas un voisinage de x. Donc U=$\{y \in X; f(y)$ $\in$V$\}$ ne contient pas d'ouvert contenant x. Autrement dit, prenant un système fondamentale de voisinage au point x :$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on peut trouver un élément x_n de V_n tel que $x_n \in V_n\backslash$U. La suite x_n ainsi construite converge vers x mais la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne rencontre, par construction, jamais V et donc ne converge pas vers $f(x)$. Cqfd.

Définition On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est **continue sur X** si elle est continue en chaque point de X.

La propriété qui suit est fondamentale car elle permet de comprendre la définition de la continuité en topologie générale .

Proposition $f : X \longrightarrow Y$ est continue sur X si et seulement si $\forall$ O ouvert de Y, f^{-1}(O) est un ouvert de X.

Démonstration Suppososons que f soit continue sur X et soit O un ouvert de Y. Soient aussi y un point de O et x un point de f^{-1}(O) tel que f(x)=y. Comme O est ouvert, O est un voisinage de x et donc f^{-1}(O) est un voisinage de x. X étant ayant été choisie de façon quelconque dans f^{-1}(O), on en déduit que f^{-1}(O) est un voisinage de chacun de ses points et donc que f^{-1}(O) est ouvert dans X.
En utilisant à nouveau le fait qu'un ensemble ouvert est un voisinage de chacun de ses points , la réciproque est immédiate.

Définition Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est **uniformément continue** sur X si:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\eta > 0 \forall x,y \in X d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proposition Si f est uniformément continue sur X alors f est continue sur X.

Définition Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Soit k un réél strictement positif. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est **Lipschitzienne de rapport k** si $\forall x,y \in X\, \delta(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$. Si de plus k<1, on dit que f est **contractante**.

Proposition Si f est lipschitzienne, elle est uniformément continue.

Définition Soit $f : X \longrightarrow Y$. On dira que f est une **application ouverte** si l'image par f de tout ouvert de X est un ouvert de Y.

Proposition Si f est bijective, on a équivalence entre:
- f est une application ouverte.
- f^{-1} est continue comme application de Y dans X.

Démonstration C'est évident!.

Proposition (**Continuité de la composée de deux applications continues**) Soient (X,d), (Y,δ) et (Z,Δ) des espaces métriques. Si $f : X \longrightarrow Y$ est continue sur X et que $g : Y \longrightarrow Z$ est continue sur Y alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est continue sur X.

Démonstration Soit O un ouvert de Z. Comme g est continue, $g^{-1}(O)$ est un ouvert de Y . Mais comme f est continue, $f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert de X . Ce qui prouve que, pour O ouvert quelconque de Z, $(g \circ f)^{-1}(O)$ est un ouvert de X, et que $g \circ f$ est continue sur X .

8 Métriques équivalentes

Définition On dit que deux **métriques** d et Δ sur X sont **équivalentes** si il existe deux rééls strictements positifs α et β tel que:

$$\forall x,y \in X \; \alpha d(x,y) \leq \delta(x,y) \leq \beta d(x,y)$$

Remarque La première inégalité n'est rien d'autre que la traduction du fait que l'aplication identique $Id : (X,d) \longrightarrow (X,\delta)$ est continue . Ceci implique que la réciproque, par l'application identique, d'un ouvert de (X,δ) est un ouvert de (X,d) . Autrement dit, tout ouvert de (X,δ) est un ouvert de (X,d). La topologie definie pas δ est “incluse” dans celle définie par d (les “” parce que en fait on dit qu'elle est “moins fine que”).

De même, en examinant la seconde inégalité, on observe que la topologie definit par d est moins fine que celle definie par δ.
En conclusion, si deux métriques sont équivalentes, elles définissent la même topologie. (Cependant, cette notion est plus forte que celle de “topologiquement équivalent”. En particulier, et c'est fondamental, si une suite de Cauchy converge sur X, elle convergera pour tout autre métrique équivalente. Par contre, si une suite de Cauchy est convergente pour une topologie donnée, elle ne convergera pas nécessairement pour une topologie équivalente. Autrement dit, la complétude est une notion “métrique” et pas “topologique”.)

Ceci implique aussi que l'application identique $Id : (X,d) \longrightarrow (X,\delta)$ est un **homéomorphisme** . Mais cette notion est étudiée dans le chapitre de topologie générale .