Espaces métriques produits

1 Introduction

La topologie produit va nous permettre de fabriquer des espaces métriques . Mais il faudra la définir en sorte que les propriétés topologiques des espaces qui composent le produit remontent sur la topologie du produit. Ainsi, si les espaces de départ sont compacts, ou connexes, il sera appréciable qu'il en soit de même de leur produit.

2 Notions de base

On considère dans ce chapitre une famille d'espaces métriques $((X_i,d_i))_{i=1..k}$ et soit

$$X = \prod_{i=1}^{k} X_i.$$

Définition On appelle **métrique produit** la métrique $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par : si $x = (x_1,...,x_k) \in X$ et $y = (y_1,...,y_k) \in X$ alors

$$d(x,y) = \sup_{i=1}^{k} d_i(x_i,y_i)$$

Démonstration On vérifie sans peine que l'application ainsi définie sur X est bien une métrique .

On peut alors énoncer la définition :

Définition L'espace (X,d) est l'**espace métrique produit** des $((X_i,d_i))_{i=1..k}$.

Proposition Soit r>0 et $x = (x_1,...,x_k) \in X$. Soit $B(x,r)$ la boule de X de rayon x et de centre r relative à la métrique d . Notons, pour i=1..k, $B(x_i,r)_i$ la boule de X_i de centre x_i et de rayon r relative à la métrique d_i . Alors $B(x,r)$=$B(x_1,r)_1 \times \ldots \times B(x_k,r)_k$.
Démonstration Soit $y = (y_1,...,y_k) \in B(x,r)$. Alors, pour tout i=1,...,k, on a $d_i(x_i,y_i) < r$ et donc $y_i \in B(x_i,r)_i$.
Réciproquement, si, pour tout i=1,...,k, y_i vérifie $d_i(x_i,y_i) < r$ alors $d(x,y) < r$ et $y \in B(x,r)$.

Définition Pour tout i=1..k, on appelle **projecteur de X sur X$_i$** l'application $\Pi_i : X \longrightarrow X_i$ qui à un élément $x = (x_1,...,x_k)$ de X associe $\Pi_i(x) = x_i$.

Proposition Les applications Π_i pour i=1,..,k sont 1-Lipschitzienne et sont donc continues .

Démonstration C'est immédiat, via la définition des Π_i.

Proposition Les projecteurs sont des applications ouvertes .

Démonstration Soit i un entier compris entre 1 et k et soit U un ouvert de (X,d). On veut montrer que Π_i est ouverte, ce qui revient à montrer que Π_i(U) est un ouvert de (X_i,d_i) . Soit x un point de U. Comme U est ouvert, on peut trouver une boule ouverte $B(x,r)$ incluse dans U . Mais cette boule est, comme nous l'avons vu, de la forme $B(x_1,r)_1 \times ... \times B(x_k,r)_k$. Donc $\Pi_i(B(x,r))=B(x_i,r)_i$. Cette dernière boule est donc incluse dans Π_i(U), ce qui nous prouve que Π_i(U) est ouvert et que Π_i est une application ouverte .

Proposition La topologie induite par la métrique produit est la moins fine pour laquelle les projecteurs sont continues. C'est donc la topologie produit.(Cf les espaces topologiques produits).

Démonstration On sait déjà que les projecteurs sont continues pour la métrique produit . Montrons donc que cette topologie est la moins fine pour laquelle cela fonctionne. Supposons qu'il existe une topologie moins fine, $\mathcal{O}$, que celle conséquente à la métrique produit et pour laquelle les projecteurs sont continues. Cela signifie qu'il existe des ouverts de (X,d) qui ne sont pas éléments de $\mathcal{O}$. Comme les projecteurs sont continues, les boules $B(x,r)=B(x_1,r)_1 \times ... \times B(x_k,r)_k$ sont des ouverts de $\mathcal{O}$. Des réunions de telles boules sont donc encore des ouverts de $\mathcal{O}$. Mais tout ouvert de (X,d) est réunion de ces boules. (En effet, par définition d'un ouvert U dans un espace métrique, pour tout élément x de U, on peut trouver un réél positif r_x tel que la boule de centre x et de rayon r_x est incluse dans U. En prenant la réunion de toutes ces boules pour chaque x appartenant U, on obtient U.) Donc tout ouvert de (X,d) est ouvert de $\mathcal{O}$ et la topologie de (X,d) est équivalente à la topologie $\mathcal{O}$. On a ainsi bien montré que la topologie définie par la métrique produit était équivalente à la topologie produit.

3 Suites dans un espace métrique produit

Théorème Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente sur X pour la topologie (métrique) produit si et seulement si ses suites coordonnées sont convergentes pour la topologie de l'espaces auxquels elles appartiennent. De plus, la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $(\lim_{n\to\infty} x_n^1,..., \lim_{n\to\infty} x_n^k)$.

Démonstration Soit la suite d'éléments de X $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_n^1,\ldots,x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ incluse dans X_i.

On sait que si un application f est continue en un point x d'un espace métrique (X,d) vers un espace métrique (Y,d) alors si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergeant vers x, on $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty} x_n)$. D'autre part, les applications Π_i sont continues pour i=1,...,k. Donc $\lim_{n\to\infty} x_n^i=\lim_{n\to\infty} \Pi_i(x_n)=\Pi_i(\lim_{n\to\infty} x_n)=x_i$ et les suites x_n^i sont bien convergentes sur X_i . De plus, leur limite est x_i.

Montrons maintenant que si les suites coordonnées $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subset X_i$ pour i=1,..,k convergent vers $x_i \in X_i$ alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$=$(x_n^1,\ldots,x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x = (x_1,\ldots,x_k) \in X$. Pour ce faire, prenons $\varepsilon > 0$ ainsi qu'une boule $B(x,\varepsilon)$=$B(x_1,\varepsilon)_1 \times \ldots \times B(x_k,\varepsilon)_k$ dans X. Pour tout i=1..k, il existe $N(i,\varepsilon)_i n\mathbb{N}$ tel que si n>$N(i,\varepsilon)$ alors $x_n^i \in B(x_i,\varepsilon)_i$. Prenons

$$N(\varepsilon) = \sup_{i=1}^{k}\{N(i,\varepsilon)\}.$$

On peut alors affirmer que si n>$N(\varepsilon)$ alors $x_n \in B(x,\varepsilon)$.

4 Application continue sur un espace métrique

On considérera ici, en plus de l'espace métrique produit (X,O) déjà définit précédemment, un espace métrique (Y,d').

Proposition L'application $f : Y \longrightarrow X$ est continue sur Y pour les métriques respectives de X et Y si et seulement si les applications $\Pi \circ f$ sont continues sur Y pour tout i=1,..,k.

Démonstration Supposons que f est continue sur Y. Alors comme la composée de deux applications continues est continue , les applications $\Pi \circ f$ sont continues pour tout i=1,..,k.
Supposons maintenant que, pour tout i=1,..,k, $\Pi \circ f$ est continue. Pour montrer que f est continue sur Y, il suffit qu'elle soit continue en chaque point x de Y . Prenons donc x dans Y et choisissons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de Y convergeant vers x. Montrer que f est continue en x revient à montrer l'égalité $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$=$f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$. Si l'on note, pour tout i=1,...,k, $f_i = \Pi_i \circ f$, on a, d'après le théorème précédent sur les suites coordonnées $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$=($\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x_n)$,..., $\lim\limits_{n\to\infty} f_k(x_n)$). Mais comme les applications f_i sont continues en x, ($\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x_n)$,..., $\lim\limits_{n\to\infty} f_k(x_n)$)=$(f_1(x),\ldots,f_k(x)) = f(x)$. On a donc bien montré l'égalité voulue et f est bel et bien continue en x

Proposition Soit (X,d) un espace métrique. L'application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue (et même 2-Lipschitzienne) sur $X \times X$ muni de la topologie produit héritée de la métrique d.
Démonstration Posons

$$\delta : (X \times X) \times (X \times X) \longrightarrow \mathbb{R} \ ((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longrightarrow \sup_{i=1}^{2} d(x_i,y_i).$$

δ n'est rien d'autre que la métrique produit héritée de d sur $X \times X$. De plus $\mid d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2) \mid \leq 2\, sup\, d(x_i,y_i) \leq 2\,\delta((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ Cqfd.

5 Propriétés des espaces métriques produits

On renvoit ici aux cours sur les espaces connexes , les espaces complets et les espaces métriques compacts .