

Table

1 GROUPES ET GROUPOÏDES FONDAMENTAUX.....	1	4 LES LIMITES DE LA THEORIE DE POINCARÉ	65
Groupe fondamental : une introduction	1	4.1 Exemple : Le cercle S^1 n'est pas contractile	65
Quelques exemples triviaux.....	6	4.2 La sphère S^2 n'est pas contractile.	78
Chemins et groupoïde de Poincaré.	7	5 REVETEMENTS	90
Espaces simplement connexes.....	13	5.1 Généralités et exemples	90
Les foncteurs de Poincaré.....	17	5.2 Revêtements et foncteurs de Poincaré	96
Le cercle	18	5.3 Classification des revêtements.....	104
RECOLLEMENTS D'ESPACES TOPOLOGIQUES.	25	6 COMPLEXES CELLULAIRES	125
2.0 Introduction	25	6.0 Quelques rappels	125
2.1 Le théorème de Van Kampen pour les groupoïdes.....	26	6.1 Structure cellulaire sur un ensemble	134
2.2 Le théorème de Van Kampen pour les groupes.....	35	6.2 CW-complexes.....	144
2.3 Applications du théorème de Van Kampen.....	43	6.3 Constructions élémentaires dans les CW-complexes.	154
3. DEFORMATIONS ET HOMOTOPIES.....	47	6.4 Le groupe fondamental d'un CW-complexe.	163
3.0 Exemple concret	47	CONVENTIONS.....	176
3.1 Généralisation	49	RAPPELS SUR LES CATEGORIES	177
3.2 La catégorie des classes d'homotopie.....	52	RAPPELS DE TOPOLOGIE GENERALE.	185
3.3 Espaces contractiles.....	54	EXEMPLE 2 DU CHAPITRE 3.....	195
3.4 Homotopies invariantes sur des sous-espaces.....	56	BIBLIOGRAPHIE.....	196
3.5 Contractions et rétractions	59		

1 Groupes et groupoïdes fondamentaux.

Groupe fondamental : une introduction

La notion de groupe fondamental d'un espace topologique a été introduite dans le but de formaliser la notion intuitive de « trou ».

Un exemple d'espace topologique troué est bien sûr $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, c'est-à-dire le plan privé de son origine. Un autre exemple est constitué par le cercle S^1 ; on peut voir ce dernier comme la bordure d'un trou. On verra que ces deux espaces topologiques ont le même groupe fondamental.

L'idée de la construction du groupe fondamental est un peu de considérer un trou comme un clou que l'on pourrait attraper au lasso. Réciproquement, si on lance un lasso à travers un espace topologique et que l'on peut le resserrer jusqu'à le réduire à son nœud coulant, il paraît naturel de conclure que cet espace n'a pas de trous.

Formalisation de la notion de « lasso »

Soient X un espace topologique et x_0 l'un de ses points.

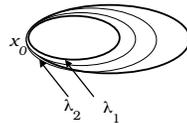
On appellera **lacet** de X d'extrémité x_0 une application continue λ de $I := [0, 1]$ dans X telle que : $\lambda(0) = \lambda(1) = x_0$.

Le terme de « lacet » est consacré par l'usage. Il semble faire référence, non pas à nos familiers et inoffensifs lacets de chaussures, mais au sinistre lacet de l'étrangleur. L'extrémité x_0 d'un lacet λ peut être vue comme le nœud coulant.

A strictement parler, un lacet ainsi défini n'est pas vraiment la formalisation de l'idée de lacet concret mais plutôt de l'image instantanée d'un tel lacet. Pour rendre l'idée qu'il est loisible de resserrer ou de desserrer un lacet concret (en soie, de préférence), on introduit la relation suivante.

Soient X un espace topologique et x_0 l'un de ses points.

On définit la relation \circledast entre deux lacets λ_1 et λ_2 d'extrémité x_0



Il existe une application continue Λ de $I \times I$ dans X telle que : $\forall t \in I, \Lambda(0, t) = \lambda_1(t), \Lambda(1, t) = \lambda_2(t);$
 $\forall s \in I, \Lambda(s, 0) = x_0 = \Lambda(s, 1).$

Proposition 1.1

La relation \circledast est une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacets de X d'extrémité x_0 .

Réflexivité de \circledast : Si λ est un lacet de X d'extrémité x_0 , il est facile de voir que l'application $(s, t) \longmapsto \lambda(t)$ met en relation λ avec lui-même.

Symétrie de \circledast : Si deux lacets λ_1 et λ_2 de X d'extrémité x_0 sont mis en relation par l'application Λ de $I \times I$ dans X , il est facile de vérifier que l'application $(s, t) \longmapsto \Lambda(1-s, t)$ met en relation λ_2 avec λ_1 .

Transitivité de \circledast : Si trois lacets λ_1, λ_2 et λ_3 de X d'extrémité x_0 sont tels que λ_1 et λ_2 soient en relation par l'application Λ_1 de $I \times I$ dans X et que λ_2 et λ_3 soient en relation par l'application Λ_2 de $I \times I$ dans X , il est facile de vérifier que l'application Λ définie par :

$$\forall (s, t) \in [0, \frac{1}{2}] \times I, \Lambda(s, t) = \Lambda_1(2s, t)$$

$$\forall (s, t) \in [\frac{1}{2}, 1] \times I, \Lambda(s, t) = \Lambda_2(2s-1, t)$$

met en relation λ_1 avec λ_3 .

Définition

Nous appellerons provisoirement **classe de lacet** une classe d'équivalence de la relation \circledast . Pour tout lacet λ , on notera $\langle \lambda \rangle$ la classe de λ . La proposition suivante donne un exemple de lacets équivalents.

Changement admissible de paramétrage

On appellera **changement admissible de paramétrage** une application continue de I dans I dont l'ensemble des points fixes contient les deux points 0 et 1.

On dira d'un lacet λ qu'il se déduit d'un autre lacet λ' par changement de paramétrage s'il existe un changement admissible de paramétrage f tel que : $\lambda = \lambda' \circ f$.

Proposition 1.2

Deux lacets dont l'un se déduit de l'autre par changement de paramétrage ont la même classe.

Soient donc un lacet λ et un changement admissible de paramétrage f .

Il est facile de vérifier que l'application Λ de I dans X définie par :

$$\Lambda(s, t) = \lambda(st + (1-s)f(t))$$

met en relation λ et $\lambda \circ f$.

Composition de deux lacets

Soient deux lacets λ_1 et λ_2 de X de même extrémité x_0 . Il est facile

de vérifier que l'application $\lambda_1 \bullet \lambda_2$ définie par :

$$\forall t \in [0, \frac{1}{2}], \lambda_1 \bullet \lambda_2(t) = \lambda_1(2t)$$

$$\forall t \in [\frac{1}{2}, 1], \lambda_1 \bullet \lambda_2(t) = \lambda_2(2t-1)$$

est un lacet de X d'extrémité x_0 .

Proposition 1.3

La relation \circledast est compatible avec la loi de composition \bullet .

Soient λ_0, λ_1 et λ_2 trois lacets de X d'extrémité x_0 tels que λ_1 et λ_2 soient en relation par l'application Λ de I dans X .

Pour tout élément s de I , posons $\lambda_s : t \mapsto \Lambda(s, t)$. Il est facile de vérifier que tous les λ_s sont des lacets de X d'extrémité x_0 .

Soient les deux applications Φ et Ψ définies sur I par :

$$\Phi(s, t) = (\lambda_s \bullet \lambda_1)(t); \quad \Psi(s, t) = (\lambda_2 \bullet \lambda_s)(t).$$

Il est facile de vérifier que Φ et Ψ sont continues et qu'elles mettent respectivement en relation $\lambda_0 \bullet \lambda_1$ avec $\lambda_2 \bullet \lambda_1$ et $\lambda_2 \bullet \lambda_0$ avec $\lambda_2 \bullet \lambda_1$.

Composition de deux classes de lacets

Soient $\langle \lambda \rangle$ et $\langle \mu \rangle$ deux classes de lacets de X d'extrémité x_0 .

La proposition précédente permet de définir la composée $\langle \lambda \rangle \bullet \langle \mu \rangle$

comme la classe $\langle \lambda \bullet \mu \rangle$

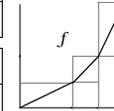
Théorème 1.4

La loi de composition \bullet munit l'ensemble des classes de lacets de X d'extrémité x_0 d'une structure de groupe.

Associativité de \bullet : Soient λ, μ, ν trois lacets de X d'extrémité x_0 . On a rappelé les définitions de $\lambda \bullet (\mu \bullet \nu)$ et de $(\lambda \bullet \mu) \bullet \nu$ dans les deux tableaux ci-dessous à gauche. Soit f le changement admissible de paramétrage dont le graphe est représenté ci-dessous à droite.

	$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \leq t \leq 1$
$\lambda \bullet (\mu \bullet \nu)(t)$	$\lambda(2t)$	$(4t-2)\mu$	$\nu(4t-3)$

	$0 \leq t \leq \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$
$(\lambda \bullet \mu) \bullet \nu(t)$	$\lambda(4t)$	$(4t-1)\mu$	$\nu(2t-1)$



Il est facile de vérifier que : $(\lambda \bullet \mu) \bullet \nu \circ f = \lambda \bullet (\mu \bullet \nu)$.

D'après la proposition 1.2, $\lambda \bullet (\mu \bullet \nu)$ et $(\lambda \bullet \mu) \bullet \nu$ ont la même classe.

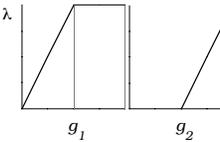
\bullet admet un élément neutre. Notons \circ le lacet constant d'image x_0 .

Soient g_1 et g_2 les changements admissibles de paramétrage dont les

graphes sont représentés ci-dessous.

Il est facile de vérifier que pour tout lacet λ d'extrémité x_0 on a :

$$\lambda \bullet \circ = \lambda \circ g_1 \quad \text{et} \quad \circ \bullet \lambda = \lambda \circ g_2$$



D'après la proposition 1.2, $\lambda \bullet \circ, \circ \bullet \lambda$ et λ ont la même classe.

Toute classe de lacet $\langle \lambda \rangle$ admet un symétrique pour \bullet .

Soit λ un lacet de X d'extrémité x_0 . Posons : $\lambda^- : t \mapsto \lambda(1-t)$

	$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$
$\lambda \bullet \lambda^-(t)$	$\lambda(2t)$	$\lambda(2-2t)$
$\Lambda_1(s, t)$	$\lambda(2st)$	$\lambda(2s-2st)$

	$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$
$\lambda^- \bullet \lambda(t)$	$\lambda(1-2t)$	$\lambda(2t-1)$
$\Lambda_2(s, t)$	$\lambda(s-2st)$	$\lambda(2st-s)$

Les deux tableaux ci-dessous rappellent les valeurs de $\lambda \bullet \lambda^{-1}$ et de $\lambda^{-1} \bullet \lambda$ et montrent que ces deux lacets sont mis en relation avec le lacet constant \circ par les applications Λ_1 et Λ_2 ,

Définition

Le groupe que l'on a ainsi exhibé est appelé le **groupe fondamental** de X au point x_0 . On le note $\pi_1(X, x_0)$. On l'appelle aussi le **groupe de Poincaré de X au point x_0** . C'est ce qui explique le « π » de la notation.

Quelques exemples triviaux

Le concept général de groupe fondamental apparaît donc assez simple. En revanche, à l'usage, en dehors des cas triviaux que nous allons aborder maintenant, le calcul effectif du groupe fondamental d'un espace topologique donné s'avère très complexe.

Parties étoilées et convexes d'un espace vectoriel topologique

Soit R un \mathbb{R} -espace vectoriel topologique. Rappelons que, pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de R , on définit le **segment** $[x, y]$ de R d'extrémités x et y par :
 $[x, y] := \{tx + (1-t)y \mid t \in I\}$.
 On dit qu'une partie A de R qui contient un élément x_0 est **étoilée** en x_0 si, pour tout autre élément y de A , le segment $[x_0, y]$ est contenu dans A .

On dit qu'une partie B de R est **convexe** si elle est étoilée en chacun de ses points.

Proposition 1.5

Si A est une partie d'un \mathbb{R} -espace vectoriel topologique étoilée en x_0 , alors $\pi_1(A, x_0) = \{\circ\}$.

Tout lacet λ de A d'extrémité x_0 est en relation avec le lacet constant \circ par l'application $\Lambda : (s, t) \longmapsto (1-s)x_0 + s\lambda(t)$.

Corollaire 1.6

Si A est une partie convexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel topologique alors, pour tout point x de A , $\pi_1(A, x) = 0$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Malheureusement, ce sont les seuls exemples que nous pouvons donner pour l'instant. L'exemple non trivial le plus élémentaire, celui du cercle S^1 , nécessite le recours à une notion un peu plus abstraite.

Chemins et groupoïde de Poincaré.

De quelle manière le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ d'un espace topologique X en l'un de ses points x dépend-il de ce dernier ?

Telle est la question à laquelle cette section apporte une réponse.

On va utiliser dans cette section une notion algébrique qui n'est peut-être pas familière au lecteur : le groupoïde.

On peut définir rapidement la structure de groupoïde comme une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles. Derrière cette définition lapidaire se cache une structure algébrique qui généralise des notions très diverses qui vont de celle de groupe à celle de graphe d'une relation d'équivalence.

Dans toute cette section, X désignera un espace topologique.

Chemins d'un espace topologique ; début et fin d'un chemin

On appelle **chemin de X** une application continue de I dans X . Si γ est un tel chemin de X , les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont respectivement appelés **le début** et **la fin** de γ . Le couple $(\gamma(1), \gamma(0))$ est appelé **le bornage de γ** ,

Les lacets introduits plus haut ne sont autres que des chemins dont le début et la fin sont égaux.

Les chemins peuvent, comme les lacets, être composés, ou plus exactement, mis bout à bout.

Composition de deux chemins

On dira que deux chemins γ_1 et γ de X sont **composables** dès que la fin de γ_1 et le début de γ coïncident.

Si γ_1 et γ sont deux chemins composables de X , il est facile de vérifier que l'application $\gamma_1 \bullet \gamma$ définie par :

$$\forall t \in [0, \frac{1}{2}] . \gamma_1 \bullet \gamma (t) = \gamma_1(2t)$$

$$\forall t \in [\frac{1}{2}, 1] . \gamma_1 \bullet \gamma (t) = \gamma(2t-1)$$

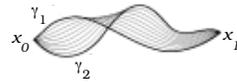
est un chemin de X dont le début et la fin sont respectivement le début de γ_1 et la fin de γ .

Définition

On définit la relation \circledast entre deux chemins γ_1 et γ_2 de X .

γ_1 et γ_2 ont le même début et la même fin que l'on notera respectivement par x_0 et x_1

$\gamma_1 \circledast \gamma_2 \iff$ - Il existe une application continue Γ de $I \times I$ dans X telle que : $\forall t \in I, \Gamma(0, t) = \gamma_1(t), \Gamma(1, t) = \gamma_2(t)$
 $\forall s \in I, \Gamma(s, 0) = x_0 ; \Gamma(s, 1) = x_1$.



On a ainsi étendu aux chemins la relation \circledast , que l'on avait définie plus haut sur les lacets.

Les propositions 1.1, 1.2, 1.3 et 1.4 se généralisent facilement aux chemins. Leurs démonstrations seront laissées au lecteur. Elles s'effectuent de façon identique à celles des quatre premières propositions en utilisant des applications analogues.

Proposition 1.7

La relation \circledast est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de X .

Remarquons qu'il est loisible de définir le début, la fin et donc le bornage d'une classe de chemins.

Proposition 1.8

Deux chemins de X dont l'un se déduit de l'autre par changement de paramétrage ont la même classe.

Proposition 1.9

La relation \circledast est compatible avec la loi de composition \bullet .

Théorème 1.10

La loi de composition \bullet munit l'ensemble des classes de chemins de X d'une structure de groupoïde de base X .

Notations

Précisons que, dans ce groupoïde,

- L'unité associée au point x est la classe $\langle o_x \rangle$ du lacet constant de valeur x .
- L'inverse de la classe $\langle \gamma \rangle$ est la classe $\langle \gamma^- \rangle$ du chemin $\gamma^- : t \longmapsto \gamma(1-t)$.

Définition

Le groupoïde que l'on a ainsi exhibé est appelé **groupoïde de Poincaré** de X . On le note $\pi_1(X)$.

Remarquons que le groupe fondamental de X en l'un de ses points x n'est autre que l'ensemble des éléments de $\pi_1(X)$ dont la source et le but sont tous deux égaux à x . Les familiers des groupoïdes y reconnaîtront le groupe d'isotropie de $\pi_1(X)$ en x .

Le tréma sur le π tente de rappeler que $\pi_1(X)$ est un groupoïde, dont les éléments comportent deux extrémités. On a introduit cette notation de manière à ne pas créer de confusion avec le classique $\pi_1(X)$ que nous rencontrerons un peu plus bas.

Remarque

Soit A une partie d'un espace topologique X munie de la topologie induite par celle de X . Rappelons que tout chemin de A est un chemin de X et que tout chemin de X dont l'image est contenue dans A est un

chemin de A . Rien ne prouve que deux chemins de A ayant la même classe en tant que chemins de X ont de ce fait la même classe en tant que chemins de A .

C'est pourquoi, pour un chemin γ de A , on notera respectivement $\langle \gamma \rangle_A$ et $\langle \gamma \rangle_X$ ses classes en tant que chemin de A et de X .

Proposition 1.11

Soient X un espace topologique, A un sous-espace topologique de X et (γ, δ) un couple, de chemins de A .
Alors : $\langle \gamma \rangle_A = \langle \delta \rangle_A \implies \langle \gamma \rangle_X = \langle \delta \rangle_X$

La démonstration est immédiate.

L'implication réciproque est fautive mais tant que nous n'aurons pas exhibé des espaces topologiques dont le groupoïde de Poincaré n'est pas banal, nous ne pourrons pas le montrer.

Dans la suite, on aura parfois besoin de découper un chemin en morceaux ou, ce qui revient au même, de décomposer sa classe en plusieurs facteurs. C'est pour cela que l'on introduit les portions de chemins.

Portion d'un chemin

Soient γ un chemin de X et $[a, b]$ un intervalle contenu dans I .
Notons $\alpha_{a,b}$ l'application affine qui transforme $[a, b]$ en I . Autrement dit $\alpha_{a,b}$ est la composée de la translation de terme $-a$ suivie de l'homothétie de rapport $\frac{1}{b-a}$.
On appellera **portion de γ correspondant à $[a, b]$** le chemin de X défini par : $t \longmapsto \gamma(\alpha_{a,b}^{-1}(t))$
On notera ce dernier $\gamma / [a, b]$

Remarque

Il est facile de vérifier que, lorsque γ_1 et γ_2 sont deux chemins composables de X , on a : $\gamma_1 \Sigma \gamma_2 / [0, \frac{1}{2}] = \gamma_1$ et $\gamma_1 \Sigma \gamma_2 / [\frac{1}{2}, 1] = \gamma_2$.

Lemme 1.12

Soient γ un chemin de X et $\{t_0, t_1, \dots, t_p\}$ une suite strictement croissante de points de I telle que : $t_0 = 0$ et $t_p = 1$.
On a : $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma / [t_0, t_1] \rangle \cdot \dots \cdot \langle \gamma / [t_{p-1}, t_p] \rangle$

Soit f le changement admissible de paramétrage affine par morceaux tel que :

- $f([0, \frac{1}{2}]) = [0, t_1]$,
- $\forall i, 1 \leq i \leq p-2, f([\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i+1}}]) = [t_i, t_{i+1}]$
- $f([\frac{1}{2^{p-1}}, 1]) = [t_{p-1}, 1]$

Il est facile de vérifier que :

$$\gamma / [t_0, t_1] \Sigma \left(\gamma / [t_1, t_2] \Sigma \left(\dots \Sigma \left(\gamma / [t_{p-1}, t_p] \right) \dots \right) \right) = \gamma \circ f.$$

La proposition 1.8 donne l'égalité recherchée.

Rappel : espaces connexes par arcs

On dit qu'un espace topologique X est **connexe par arcs** lorsque, pour tout couple (x, y) de points de X , il existe un chemin de X de début x et de fin y .

La connexité par arcs est une notion que le lecteur a déjà dû rencontrer en topologie générale. En fait, comme le montre le corollaire suivant, cette notion est en rapport très étroit avec le groupoïde de Poincaré.

Corollaire 1.13

Pour tout espace topologique X les deux assertions suivantes sont équivalentes.
(i) X est connexe par arcs ;
(ii) $\pi_1(X)$ est un groupoïde transitif.

C'est seulement une traduction de la connexité par arcs en termes catégoriques.

Corollaire 1.14

Si un espace topologique est connexe par arcs alors tous ses groupes fondamentaux sont isomorphes.

Tous les groupes d'isotropie d'un groupoïde transitif sont isomorphes.

Définition

Lorsqu'un espace topologique X est connexe par arcs, toute l'information que recèle son groupoïde de Poincaré réside donc en fait dans l'un quelconque des groupes d'isotropie de ce dernier.

C'est pourquoi on définit dans ce cas le groupe fondamental de X comme l'un quelconque de ses groupes fondamentaux.

On le note $\pi_1(X)$.

Terminons cette section en rappelant pour fixer les idées, les rapports entre connexité et connexité par arcs.

Définition

On dira qu'un espace topologique X est **localement connexe par arcs** lorsque la topologie de X admet une base de voisinages connexes par arcs.

Proposition 1.15

Un espace topologique X connexe par arcs est connexe.
Un espace topologique X connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

Soit X un espace topologique connexe par arcs. Montrons qu'il est connexe. Pour cela, on va montrer que toute application continue de X vers l'espace discret à deux éléments $\{0, 1\}$ est constante.

Soit f une telle application. Choisissons au hasard un point x_0 de X . Ce dernier étant connexe par arcs, chacun de ses points est la fin d'un chemin de début x_0 . Soient respectivement x et $\gamma : I \longrightarrow X$ un point de X et le chemin qui lui est associé. I étant connexe et l'application $f \circ \gamma : I \longrightarrow \{0, 1\}$, continue, cette dernière est constante.

D'où : $f(x) = f(x_0)$. Le point x étant quelconque, f est constante.

Soit X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs.

Montrons qu'il est connexe par arcs.

L'idée de la démonstration est de montrer que pour tout point x de X l'ensemble X_x des points de X reliés à x par un chemin de X est à la fois ouvert et fermé dans X . Étant non vide (il contient x), X_x sera alors égal à X .

Soit y un point de X_x . Par hypothèse, y admet dans X un voisinage U connexe par arcs, il est facile de vérifier, en utilisant la composition des chemins, que tout point de U , étant relié à y , est relié à x .

X_x contient donc U . Le point y étant quelconque, X_x est ouvert

Soit y un point de $\overline{X_x}$. Par hypothèse, y admet dans X un voisinage U connexe par arcs qui rencontre X_x . Le point y est relié à un point de $U \cap X_x$ qui lui-même est relié à x . Le point y appartient donc à X_x . Le point y étant quelconque, X_x contient sa propre adhérence.

X_x est donc fermé.

Exemple classique d'espace connexe par arcs 1.16

Tout ouvert connexe d'un \mathbb{R} -espace vectoriel topologique localement connexe est connexe par arcs.

Espaces simplement connexes

Proposition 1.17

Pour tout espace topologique X , les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Le groupoïde $\pi_1(X)$ est banal, c'est à dire isomorphe à $X \times X$.
- (ii) X est connexe par arcs et, pour tout point x de X , le groupe $\pi_1(X, x)$ est réduit à $\langle o_x \rangle$.
- (iii) Tout couple de points de X est le bornage d'une classe de chemins et d'une seule.

La démonstration est immédiate.

Définition

On dit qu'un espace topologique X est **simplement connexe** lorsqu'il vérifie les assertions de la proposition précédente.

Le lecteur aura avantage à se figurer un espace topologique simplement connexe comme « un espace sans trou ». Cette approche est intuitive et, par conséquent, assez grossière. Les résultats suivants permettent de l'affiner.

Remarque

Le lecteur pourra montrer facilement que la connexité par arcs et la simple connexité sont des notions topologiques. Autrement dit tout espace topologique homéomorphe à un espace connexe par arcs ou simplement connexe est lui aussi, selon le cas, connexe par arcs ou simplement connexe.

Exemple classique d'espaces simplement connexes 1.18

Tout ouvert étoilé d'un \mathbb{R} -espace vectoriel topologique localement convexe est simplement connexe.

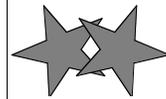
C'est un corollaire des propositions 1.5, 1.15 et 1.14.

Proposition 1.19

Si A et B sont deux parties simplement connexes d'un espace topologique X telles que :

- A et B soient des ouverts de $A \cup B$;
- $A \cap B$ soit non vide et connexe par arcs.

alors $A \cup B$ est simplement connexe.



Remarquons tout d'abord que l'hypothèse « $A \cap B$ est connexe par arcs » est nécessaire. Dans la figure ci-contre, on a pris pour A et B deux étoiles ouvertes du plan. D'après la proposition précédente, ces deux parties du plan sont simplement connexes. Il est facile de voir que leur intersection n'est pas connexe et que leur réunion présente un trou donc n'est pas simplement connexe.

Tout d'abord, A et B étant connexes par arcs, puisque $A \cap B$ est

non vide, $A \cup B$ est connexe par arcs. D'après la proposition 1.14, il reste à montrer que pour un point x arbitrairement choisi de $A \cup B$, $\pi_1(A \cup B, x) = \langle o_x \rangle$. Choisissons un point x de $A \cap B$, un lacet λ de $A \cup B$ d'extrémité x et montrons que : $\langle \lambda \rangle = \langle o_x \rangle$

L'idée de la démonstration est de décomposer λ en un nombre fini de chemins $\gamma_1, \gamma, \dots, \gamma_p$ tels que :

- le bornage de chacun d'entre eux soit contenu dans $A \cap B$;
 - chacun d'entre eux soit contenu soit dans A soit dans B ;
- $$\langle \lambda \rangle = \langle \gamma_1 \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \cdot \dots \cdot \langle \gamma_p \rangle$$

Supposons ceci établi, et achevons la démonstration.

Puisque $A \cap B$ est connexe par arcs, pour tout indice i , $1 \leq i \leq p$, il existe un chemin ι_i de $A \cap B$ qui a le même bornage que γ_i . Les deux chemins γ_i et ι_i sont contenus soit dans A soit dans B . Donc, puisque A et B sont simplement connexes, on a : $\langle \gamma_i \rangle_C = \langle \iota_i \rangle_C$, C désignant A ou B selon le cas.

D'après la proposition 1.11, on a : $\langle \gamma_i \rangle = \langle \iota_i \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \langle \lambda \rangle &= \langle \gamma_1 \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \cdot \dots \cdot \langle \gamma_p \rangle = \langle \iota_1 \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \cdot \dots \cdot \langle \iota_p \rangle \\ &= \langle \iota_1 \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \iota_p \rangle \end{aligned}$$

Le lacet λ de $A \cup B$ a donc la même classe que le lacet $\iota_1 \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \iota_p$ qui est contenu dans $A \cap B$ donc dans A . Ce dernier étant simplement connexe, on a : $\langle \iota_1 \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \iota_p \rangle_A = \langle o_x \rangle_A$

D'après la proposition 1.12, on a : $\langle \iota_1 \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \iota_p \rangle = \langle o_x \rangle$ et donc : $\langle \lambda \rangle = \langle o_x \rangle$

Construisons les $\gamma_1, \gamma, \dots, \gamma_p$.

Puisque A et B sont des ouverts de $A \cup B$, tout point t de I admet un voisinage dans I de la forme $]a, b[$ tels que $\lambda(a, b)$ soit contenu soit dans A soit dans B . I étant compact, il peut être recouvert par un nombre fini de ces intervalles. Les bornes de ces derniers, étant en nombre fini, peuvent être ordonnées. On obtient ainsi la suite croissante t_0, t_1, \dots, t_n de points de I . Il est facile de vérifier que $t_0 = 0$,

que $t_n = 1$ et que, pour tout indice i $0 \leq i \leq n-1$, $\lambda(t_i, t_{i+1})$ est contenu soit dans A soit dans B .

Éliminons de cette suite les termes t_i tels que $\lambda(t_{i-1}, t_i)$ et $\lambda(t_i, t_{i+1})$ soient contenus dans A , puis les termes t_j tels que $\lambda(t_{j-1}, t_j)$ et $\lambda(t_j, t_{j+1})$ soient contenus dans B .

Après cette opération, on obtient une suite t_0, t_1, \dots, t_n telle que :

- $t_0 = 0, t_n = 1$ et : $\forall i, t_i \in A \cap B$.
- $0 \leq i \leq p-1, \lambda(t_i, t_{i+1})$ est contenu soit dans A soit dans B .

On pose alors, pour chaque indice i $1 \leq i \leq p, \gamma_i = \lambda / t_i, t_{i-1}$.

Il est facile de voir, grâce notamment au lemme 1.12, que les chemins $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ ainsi obtenus remplissent les trois conditions requises.

Corollaire 1.20

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la sphère S^n est simplement connexe.

Soient $A = S^n \setminus (1, 0, 0, \dots, 0)$ et $B = S^n \setminus (-1, 0, 0, \dots, 0)$.

Il est bien connu que A et B sont homéomorphes à \mathbb{R}^n et que $A \cap B$ est homéomorphe au cylindre $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. A et B sont donc simplement connexes et, si n est supérieur ou égal à 2, $A \cap B$ est connexe par arcs. On achève en appliquant la proposition précédente.

La boussole intuitive du lecteur doit être affolée par ce dernier résultat. La sphère S^2 , par exemple, comporte notoirement un trou et est pourtant simplement connexe. Il est donc nécessaire d'affiner notre approche. Nous proposons au lecteur de visualiser un espace simplement connexe comme un espace qui ne présente aucun trou le traversant de part en part.

Les foncteurs de Poincaré.

Proposition 1.21

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f: X \longrightarrow Y$ une application continue. En posant $\langle \gamma \rangle \longmapsto \langle f \circ \gamma \rangle$ on définit une application $\tilde{\pi}_1(f)$ de $\tilde{\pi}_1(X)$ vers $\tilde{\pi}_1(Y)$. De plus $\tilde{\pi}_1(f)$ est un morphisme de groupoïdes.

Il est facile de vérifier que lorsque deux chemins γ_1 et γ_2 de X sont en relation par l'application continue $f: X \longrightarrow Y$, les deux chemins de Y que sont les applications $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ sont en relation par l'application $f \circ \Gamma$. L'application $\tilde{\pi}_1(f)$ est donc bien définie.

Pour montrer la seconde assertion, il suffit de remarquer que, pour tout couple (γ_1, γ_2) de chemins composables de X on a :

$$f \circ (\gamma_1 \bullet \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) \bullet (f \circ \gamma_2).$$

Proposition 1.22

$\tilde{\pi}_1 : \begin{cases} X \longmapsto \tilde{\pi}_1(X) \\ f \longmapsto \tilde{\pi}_1(f) \end{cases}$ définit un foncteur de la catégorie **Top** des applications continues vers la catégorie **Gpd** des morphismes de groupoïdes.

Il suffit de remarquer la relation évidente : $\tilde{\pi}_1(f \circ g) = \tilde{\pi}_1(f) \circ \tilde{\pi}_1(g)$.

Définition

Le foncteur $\tilde{\pi}_1$ sera appelé **foncteur de Poincaré généralisé**.

Proposition 1.23

Pour tout couple (X, Y) d'espaces topologiques, la bijection bien connue $\text{Top}(I, X \times Y) \cong \text{Top}(I, X) \times \text{Top}(I, Y)$ induit une bijection $\tilde{\pi}_1(X \times Y) \cong \tilde{\pi}_1(X) \times \tilde{\pi}_1(Y)$.

On utilise la bijection $\text{Top}(I, I, X, Y) \approx \text{Top}(I, I, X) \times \text{Top}(I, I, Y)$ pour montrer que, pour tout couple $(\gamma_1, \eta_1), (\gamma_2, \eta_2)$ de chemins de $X \rightarrow Y$, on a : $(\gamma_1, \eta_1) \otimes_X^Y (\gamma_2, \eta_2) \iff \gamma_1 \otimes_X \gamma_2$ et $\eta_1 \otimes_Y \eta_2$.

Remarque

Lorsque $f: X \rightarrow Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques connexes par arcs, la restriction de $\tilde{\pi}_1 f$ à l'un quelconque des groupes d'isotropie de $\tilde{\pi}_1(X)$ induit un morphisme de groupes, noté $\pi_1(f)$, de $\pi_1(X)$ vers $\pi_1(Y)$.

Définition

Le foncteur de la catégorie Topca des applications continues entre espaces topologiques connexes par arcs vers la catégorie Grp des morphismes de groupes, défini par : $X \mapsto \pi_1(X), f \mapsto \pi_1(f)$, est appelé **foncteur classique de Poincaré**.

Le cercle

Le cercle est l'exemple le plus élémentaire d'espace topologique non simplement connexe.

Théorème 1.24

$$\pi_1 S^1 \approx (\mathbb{Z}, +)$$

L'idée de la démonstration consiste à examiner les propriétés topologiques de l'application $p: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \\ t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{cases}$ puis leur traduction algébrique via le foncteur de Poincaré.

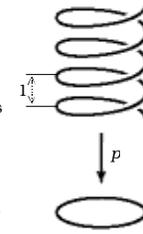
L'application p peut être visualisée de la façon suivante :

Considérons le plongement de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 qu'est l'hélice définie par : $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, s)$; p s'identifie à la restriction de la troisième projection de \mathbb{R}^3 à cette hélice.

Le lecteur vérifiera immédiatement que p possède les deux propriétés élémentaires suivantes :

- $\forall \theta \in S^1, p^{-1}(\theta) \approx \mathbb{Z}$
- Soient U_1 et U_2 deux arcs ouverts de S^1 , distincts de S^1 et dont la réunion est S^1 .

Alors, pour $1 \leq i \leq 2, p^{-1}(U_i)$ est la réunion disjointe d'une suite $U_{i,n} \text{ }_{n \in \mathbb{Z}}$ d'ouverts de \mathbb{R} tels que la restriction de p à chacun d'entre eux soit un homéomorphisme.



On dira que $U_{i,n} \text{ }_{n \in \mathbb{Z}}$ est la suite des **copies** de l'arc U_i .

Lemme 1

Pour toute application continue $h: Y \rightarrow S^1$ et toute application continue $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $p \circ f = h|_{Y_0}$ il existe une unique application continue $\tilde{h}: Y \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- $p \circ \tilde{h} = h$
- $\tilde{h}|_{Y_0} = f$.

Soient donc h et f comme ci-dessus.

Première étape

Autour de chaque point y de Y , il existe un voisinage N_y et une application continue \tilde{h}_y , définie sur $N_y \rightarrow \mathbb{R}$ qui remplit localement les deux conditions de l'énoncé.

De plus si M est un voisinage de y dans N_y et si g est une application continue de $M \rightarrow \mathbb{R}$ qui remplit les mêmes conditions que \tilde{h}_y , alors g et \tilde{h}_y coïncident sur $M \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit donc y un point de Y .

Soit t un point de I ; h étant continue, il existe un voisinage de (y, t) , de la forme $N_{y,t} \times I_{y,t}$, où $I_{y,t}$ est un intervalle fermé et tel que $h(N_{y,t} \times I_{y,t})$ soit contenu dans l'un des deux arcs ouverts de

S^1 introduits ci-dessus.

I étant compact, on peut extraire de son recouvrement $I_{y,t} \ (t \in I)$ un sous-recouvrement fini. Autrement dit il existe une partie finie A de

I telle que $I_{y,t} \ (t \in A)$ recouvre I . Posons alors $N_{y,0} := \bigcap_{t \in A} N_{y,t}$.

En ordonnant les bornes des intervalles $I_{y,t} \ (t \in A)$, on obtient une suite $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_{k(y)-1} < t_{k(y)} = 1$ croissante de $k(y)$ points de I , tels que chacun des intervalles t_k, t_{k+1} soit contenu dans l'un des intervalles $I_{y,t} \ (t \in A)$.

Pour tout indice k , $1 \leq k \leq k(y)$, l'ensemble $h(N_{y,0}, t_k, t_{k+1})$ est donc contenu dans l'un des deux arcs ouverts U_1 et U_2 de S^1 .

On va utiliser un raisonnement par récurrence sur k , $1 \leq k \leq k(y)$.

Soit H_k l'hypothèse de récurrence suivante :

(H_k) Il existe un voisinage $N_{y,k}$ de y dans Y , contenu dans $N_{y,0}$ et une application $h_{y,k}^f : N_{y,k} \times [0, t_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et qui remplit les deux conditions de l'énoncé.

De plus si M est un voisinage de y dans $N_{y,k}$ et si g est une application continue de $M \times [0, t_{k+1}]$ dans \mathbb{R} qui remplit les mêmes conditions que $h_{y,k}^f$, alors g et $h_{y,k}^f$ coïncident sur $M \times [0, t_{k+1}]$.

Montrons H_1 . Pour cela, posons : $h(N_{y,0}, 0, t_2) \subset U_{i(1)}$

Soit $\mathcal{U}_{n(1)}$ la copie de $U_{i(1)}$ qui contient $f(y)$

Soient : $N_{y,1} = N_{y,0} \cap f^{-1}(\mathcal{U}_{n(1)})$

et $h_{y,1}^f : N_{y,1} \times [0, t_2] \longrightarrow \mathcal{U}_{n(1)}$ la composée de l'inverse local de p et de h .

On a évidemment $p \circ h_{y,1}^f = h$

et $h_{y,1}^f|_{Y \times 0} = f$.

De plus, soient M un voisinage de y dans $N_{y,k}$ et une autre applica-

tion continue $g : M \times [0, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui remplit les deux conditions précédentes,

a) D'après la seconde condition et le choix de $N_{y,k}$, on a :

$$\forall z \in M, g(z, 0) = f(z) \in \mathcal{U}_{n(1)}.$$

b) Soit z un point de M ; g étant continue, $g(\{z\} \times [0, t_2])$ est connexe. D'autre part, d'après la première condition,

$$g(\{z\} \times [0, t_2]) \subset p^{-1}(U_{i(1)}).$$

Puisqu'il est connexe, $g(\{z\} \times [0, t_2])$ est contenu dans la copie de $U_{i(1)}$ qui contient $f(z)$, c'est à dire d'après a), dans $\mathcal{U}_{n(1)}$.

c) L'image de g est donc contenue dans $\mathcal{U}_{n(1)}$ et donc, d'après la première condition, $g = h_{y,1}^f$.

Supposons que H_k soit vérifiée et montrons H_{k+1} .

Il existe un voisinage $N_{y,k}$ de y dans Y , contenu dans $N_{y,0}$ et une application $h_{y,k}^f : N_{y,k} \times [0, t_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et qui remplit les deux conditions de l'énoncé.

Considérons $N_{y,k} \times [t_{k+1}, t_{k+2}]$. Il est facile de vérifier que l'ensemble $h(N_{y,k}, t_{k+1}, t_{k+2})$ est contenu dans l'un des deux arcs ouverts de S^1 introduits ci-dessus. Notons-le $U_{n(k+1)}$.

Soit $\mathcal{U}_{n(k+1)}$ la copie de $U_{n(k+1)}$ qui contient le réel $h_{y,k}^f(y, t_{k+1})$,

Soient alors $N_{y,k+1} = N_{y,k} \cap (h_{y,k}^f|_{Y \times t_{k+1}})^{-1}(\mathcal{U}_{n(k+1)})$

et $\mathfrak{H} : N_{y,k+1} \times [t_{k+1}, t_{k+2}] \longrightarrow \mathcal{U}_{n(k+1)}$ la composée de l'inverse local de p et de h .

\mathfrak{H} vérifie : $p \circ \mathfrak{H} = h$

$$\mathfrak{H}|_{Y \times t_{k+1}} = h_{y,k}^f|_{Y \times t_{k+1}}$$

On définit alors $h_{y,k+1}^f$ sur $N_{y,k+1} \times [0, t_{k+2}]$ en recollant $h_{y,k}^f$ et

\mathfrak{H} , c'est à dire en posant :

$$h_{y,k+1}^f = h_{y,k}^f \text{ sur } N_{y,k+1} \times [0, t_{k+1}]$$

$$h_{y,k+1}^f = \mathfrak{H} \text{ sur } N_{y,k+1} \times [t_{k+1}, t_{k+2}]$$

Il est facile de vérifier que $h_{y,k+1}^f$ est une application continue qui

remplit les deux conditions de l'énoncé.

On pose finalement : $N_y := N_{y, k(y)}$ et $\tilde{H}_y := \tilde{H}_{y, k(y)}$.

De plus on montre comme pour $\tilde{H}_{y,1}$ que \tilde{H} est la seule application continue de $N_{y, k+1} \times \mathbb{R}^2$ vers \mathbb{R} qui vérifie ces deux conditions.

Seconde étape

Soit y un point de Y . D'après l'étape précédente, si z est un autre point de Y tel que N_z contienne y , alors \tilde{H}_z coïncide avec \tilde{H}_y sur

$$(N_z \cap N_y) \times I \text{ et donc en particulier sur } \{y\} \times I.$$

Tous les \tilde{H}_z définis à la première étape au « voisinage » d'un point y de Y coïncident sur $\{y\} \times I$. On peut donc attribuer leur valeur commune à \tilde{H} sur $\{y\} \times I$.

Tirons les conséquences algébriques du lemme 1 :

Lemme 2

Pour tout élément $\langle \eta \rangle$ de $\tilde{\pi}_1 S^1$ et tout élément x de \mathbb{R} tels que le début de $\langle \eta \rangle$ soit égal à $p(x)$, il existe un unique élément $\tilde{\langle \eta \rangle}_x$ de $\tilde{\pi}_1(\mathbb{R})$ tel que :

- $\tilde{\pi}_1(p) \cdot \tilde{\langle \eta \rangle}_x = \langle \eta \rangle$
- x soit le début de $\tilde{\langle \eta \rangle}_x$.

Soient un élément x de \mathbb{R} et un élément $\langle \eta \rangle$ de $\tilde{\pi}_1 S^1$ de début $p(x)$.

Tout d'abord le lemme 1 permet d'associer à un représentant η de $\langle \eta \rangle$ un unique chemin ψ de \mathbb{R} , de début x tel que : $p \circ \psi = \eta$

(Pour le voir, remplacer respectivement dans l'énoncé du lemme 1 Y par un ensemble $\{\bullet\}$ réduit à un seul élément, h par η , f par l'application $\bullet \rightarrow x$ et \tilde{H} par ψ .)

On dit que le chemin ψ est le p -relèvement de début x du chemin η

Pour pouvoir poser : $\tilde{\langle \eta \rangle}_x = \langle \psi \rangle$, il nous faut montrer que si η_0 et η_1 sont deux représentants de $\langle \eta \rangle$ et si ψ_0 et ψ_1 désignent respectivement les p -relèvements de début x de η_0 et de η_1 , alors :

$$\langle \psi_0 \rangle = \langle \psi_1 \rangle$$

Par hypothèse, η_0 et η_1 sont mis en relation par une application continue $H : I \times I \rightarrow S^1$ telle que :

$$\forall t \in I, H(0, t) = \eta_0(t), H(1, t) = \eta_1(t) \\ \forall s \in I, H(s, 0) = p(x); H(s, 1) = \eta_0(1) = \eta_1(1)$$

D'après le lemme 1, il existe une unique application continue Ψ de $I \times I$ vers \mathbb{R} telle que : $p \circ \Psi = H$ et que : $\forall s \in I, \Psi(s, 0) = x$.

Il est facile de vérifier que Ψ et Ψ_1 sont respectivement des p -relèvements de début x de η_0 et de η_1 . D'après l'unicité du p -relèvement, on a : $\Psi = \psi$ et $\Psi_1 = \psi_1$.

Enfin, considérons l'ensemble $\Psi(I \times \{1\})$. Il est connexe et est contenu dans l'ensemble discret $p^{-1}(\eta_0(1))$. Il est donc réduit au point $\psi(1)$. Ψ met donc en relation les chemins ψ_0 et ψ_1 .

$\tilde{\langle \eta \rangle}_x$ est donc indépendant du choix du représentant η de $\langle \eta \rangle$.

Montrons maintenant l'unicité de $\tilde{\langle \eta \rangle}_x$.

Solent $\langle \psi \rangle$ et $\langle \phi \rangle$ deux éléments de $\tilde{\pi}_1(\mathbb{R})$ de début x et tels que :

$$\tilde{\pi}_1(p) \cdot \langle \psi \rangle = \tilde{\pi}_1(p) \cdot \langle \phi \rangle. \text{ Autrement dit : } \langle p \circ \psi \rangle = \langle p \circ \phi \rangle$$

Il existe donc une application continue $\Lambda : I \times I \rightarrow S^1$ telle que :

$$\forall t \in I, \Lambda(0, t) = p \circ \psi(t), \Lambda(1, t) = p \circ \phi(t) \\ \forall s \in I, \Lambda(s, 0) = p(x); \Lambda(s, 1) = p \circ \psi(1) = p \circ \phi(1)$$

D'après le lemme 1, il existe une application continue Γ de $I \times I$ vers \mathbb{R} et une seule telle que : $p \circ \Gamma = \Lambda$ et que : $\forall s \in I, \Gamma(s, 0) = x$.

Il est facile de vérifier que Γ et Γ_1 sont respectivement des p -relèvements de début x de $p \circ \psi$ et de $p \circ \phi$. D'après l'unicité du p -relèvement, on a : $\Gamma = \psi$ et $\Gamma_1 = \phi$

Enfin, considérons l'ensemble $\Gamma(I \times \{1\})$. Il est connexe et est contenu dans l'ensemble discret $p^{-1}(p \circ \psi(1))$. Il est donc réduit au point $\psi(1)$.

Γ met donc en relation les chemins ψ et ϕ . D'où : $\langle \psi \rangle = \langle \phi \rangle$

Montrons le théorème.

Remarquons tout d'abord que S^1 est connexe par arcs. La notation $\pi_1 S^1$ est donc justifiée. Identifions $\pi_1 S^1$ avec $\pi_1 S^1, 1, 0$.

On a vu à la proposition 1.18 que \mathbb{R} est simplement connexe. $\tilde{\pi}_1(\mathbb{R})$ s'identifie donc au groupoïde banal $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On a : $p^{-1}(1, 0) = \mathbb{Z}$. On en déduit que le sous-groupoïde de $\tilde{\pi}_1(\mathbb{R})$ $\tilde{\pi}_1(p)^{-1}(\pi_1 S^1, 1, 0)$ s'identifie au groupoïde banal $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

De plus, on a : $\forall (i, j) \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \tilde{\pi}_1(p)(i, j) = \tilde{\pi}_1(p)(0, j-i)$

Soit en effet un élément (i, j) de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (i, j)$ et $(0, j-i)$ sont respectivement les classes des chemins $t \mapsto (j-i)t + i$ et $t \mapsto (j-i)t$. En composant ces deux chemins par p , on obtient le même chemin de S^1 .

D'après le lemme 2, la restriction de $\tilde{\pi}_1(p)$ à $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ est une bijection d'image $\pi_1 S^1, 1, 0$. De plus, si (i, j) est un élément de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1(p)(0, i+j) &= \tilde{\pi}_1(p)((0, i) \bullet (i, i+j)) = \tilde{\pi}_1(p)(0, i) \bullet \tilde{\pi}_1(p)(i, i+j) \\ &= \tilde{\pi}_1(p)(0, i) \bullet \tilde{\pi}_1(p)(0, j) \end{aligned}$$

La restriction de $\tilde{\pi}_1(p)$ à $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ induit donc un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $\pi_1 S^1, 1, 0$.

Remarque

Comme le suggère la démonstration au lecteur attentif, ce théorème formalise l'intuition suivant laquelle le groupe fondamental d'un cercle est l'ensemble des tours complets, dans un sens ou dans l'autre, que peut faire un lacet autour de ce cercle.

Contre-exemple 1.26

La réciproque de la proposition 1.11 est fausse.

Soit $\lambda : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin \pi t)$ le lacet de S^1 d'extrémité $(1, 0)$.

\mathbb{R}^2 étant simplement connexe, on a : $\langle \lambda \rangle_{\mathbb{R}^2} = \langle 0_{(0,1)} \rangle_{\mathbb{R}^2}$

On a par contre : $\langle \lambda \rangle_{S^1} \neq \langle 0_{(0,1)} \rangle_{S^1}$.

En effet $\langle \lambda \rangle_{S^1} = \tilde{\pi}_1(p) \cdot \langle 1_I \rangle = \tilde{\pi}_1(p)(0, 1)$.

Donc en notant ψ l'isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $\pi_1 S^1, 1, 0$ construit à la proposition précédente, $1 = \psi^{-1}(\langle \lambda \rangle_{S^1}) \neq \psi^{-1}(\langle 0_{(0,1)} \rangle_{S^1}) = 0$.

Proposition 1.26

$$\pi_1 \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \cong (\mathbb{Z}, +)$$

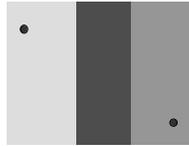
Remarquons tout d'abord que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ est connexe par arcs. La notation $\pi_1 \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ est donc justifiée. Rappelons que le passage en coordonnées polaires induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ sur $\mathbb{R}^* \times S^1$. Ce dernier étant homéomorphe à $\mathbb{R} \times S^1$, on voit aisément que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R} \times S^1$. D'après les propositions 1.22 et 1.23, $\tilde{\pi}_1 \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ est isomorphe à $\tilde{\pi}_1(\mathbb{R}) \times \tilde{\pi}_1 S^1$.

Cet isomorphisme de groupoïdes induit un isomorphisme de groupes entre $\pi_1 \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ et $\pi_1(\mathbb{R}) \times \pi_1 S^1$.

On a vu précédemment que les groupes $\pi_1(\mathbb{R})$ et $\pi_1 S^1$ sont respectivement isomorphes à $\{0\}$ et à $(\mathbb{Z}, +)$. D'où le résultat.

2 Recollements d'espaces topologiques.

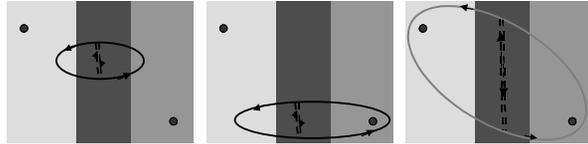
2.0 Introduction



Considérons l'espace topologique X constitué par le plan \mathbb{R}^2 privé de deux points que nous appellerons « les trous de X ». On peut décomposer X en deux bandes ouvertes, V_1 et V_2 , horizontales ou verticales suivant la disposition des trous, de façon à ce que chacune d'entre elles ne comporte qu'un seul trou. Il est facile de vérifier que chacune de ces deux bandes est

homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et donc que (proposition 1.26) $\pi_1(V_1)$ et $\pi_1(V_2)$ sont tous deux isomorphes à $(\mathbb{Z}, +)$.

Considérons un lacet λ de X . Trois cas se présentent :



a) λ n'enserme aucun des deux trous. b) λ enserme un seul des deux trous. c) λ enserme les deux trous.

Dans tous les cas, on peut décomposer λ en deux lacets dont chacun est contenu dans l'un des V_i . On peut donc associer à la classe $\langle \lambda \rangle$ de λ le « produit formel » d'un élément de $\pi_1(V_1)$ et d'un élément de $\pi_1(V_2)$.

On aurait tendance à penser que $\pi_1(X)$ est isomorphe au produit libre $\pi_1(V_1) * \pi_1(V_2) \approx (\mathbb{Z}, +) * (\mathbb{Z}, +)$.

Le théorème de Van Kampen démontre et généralise cette impression. Sa version pour les groupes ne s'applique qu'à certains recouvrements ouverts.

2.1 Le théorème de Van Kampen pour les groupoïdes

Notations

Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement $\{V_a\}_{a \in A}$ par des ouverts connexes par arcs.

Pour tout élément a de A , on notera j_a le morphisme de groupoïdes de $\pi_1(V_a)$ vers $\pi_1(X)$ image par le foncteur de Poincaré de l'inclusion $j_a : V_a \hookrightarrow X$. Rappelons que, pour tout chemin χ de V_a , j_a transforme la classe $\langle \chi \rangle$ de χ dans V_a en la classe $\langle \chi \rangle$ de χ dans X .

On notera $\bigast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ le produit libre des groupoïdes $\pi_1(V_a)$ et ϕ_a l'inclusion de $\pi_1(V_a)$ dans $\bigast_{a \in A} \pi_1(V_a)$.

On notera J le morphisme de groupoïdes de $\bigast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ vers $\pi_1(X)$ induit par la famille $\{j_a\}_{a \in A}$. Rappelons que : $\forall a \in A, J \circ \phi_a = j_a$.

De plus, la restriction de J aux unités est l'identité de X .

Considérons maintenant un couple (a, b) d'éléments de A . On notera i_{ab} le morphisme de groupoïdes de $\pi_1(V_a \cap V_b)$ vers $\pi_1(V_b)$, image par le foncteur de Poincaré de l'inclusion $i_{ab} : V_a \cap V_b \hookrightarrow V_b$.

Il est facile de vérifier que $j_b \circ i_{ab}$ et $j_a \circ i_{ba}$ sont tous deux égaux à l'image par le foncteur de Poincaré de l'inclusion $V_a \cap V_b \hookrightarrow X$ et donc que, pour tout élément $\langle \lambda \rangle$ de $\pi_1(V_a \cap V_b)$, $\phi_a \circ i_{ba}(\langle \lambda \rangle) \bullet \phi_b \circ i_{ab}(\langle \lambda \rangle^{-1})$ appartient au noyau de J .

Proposition 2.1.1

Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement $\{V_a\}_{a \in A}$ par des ouverts connexes par arcs.

Alors, avec les notations introduites ci-dessus, J est surjectif.

Soit $\langle \gamma \rangle$ un élément de $\pi_1(X)$. En utilisant le même procédé topologique que dans la proposition 1.19 on décompose le chemin γ en une succession $\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \gamma_p$ de chemins de X tels que, pour tout i , $1 \leq i \leq p$, le chemin γ_i soit contenu dans un $V_{a(i)}$.

Il est alors immédiat que : $\langle \gamma \rangle = \prod \langle \langle \gamma_i \rangle \rangle * \dots * \langle \langle \gamma_p \rangle \rangle$,

Considérons le sous-ensemble N de $\pi_1(X)$ défini par :

$$N := \{ \phi_{a,b} \circ \langle \gamma \rangle \cdot \phi_{b,a} \circ \langle \gamma \rangle^{-1} \mid (a,b) \in A \times A, \langle \gamma \rangle \in \pi_1(V_a \cap V_b) \}.$$

On a remarqué, en introduisant les notations, que N est contenu dans le noyau de J .

Proposition 2.1.2

Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement $\{V_a\}_{a \in A}$ par des ouverts connexes par arcs. Alors, avec les notations introduites ci-dessus, le noyau de J coïncide avec le sous-groupe distingué de $\pi_1(X)$ engendré par N .

Notons $[N]$ le sous-groupe distingué de $\pi_1(X)$ engendré par N . On sait déjà que : $[N] \subset \text{Ker } J$. On va montrer que $\text{Ker } J / [N]$ est banal.

En fait, puisque J induit l'identité sur X , son noyau est un multigroupe contenu dans le multigroupe d'isotropie de $\pi_1(X)$.

Donnons-nous un élément $\omega = \langle \langle \gamma_1 \rangle \rangle * \dots * \langle \langle \gamma_p \rangle \rangle$ du noyau de J .

La donnée de ω équivaut à celle d'un lacet $\chi = \gamma_1 \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \gamma_p$ formé de la succession des chemins $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq p}$ dont chacun est contenu dans un certain $V_{a(i)}$; de plus, en notant x l'extrémité de ω , on a :

$$\langle \omega \rangle = \langle \langle \gamma_1 \rangle \rangle \cdot \langle \langle \gamma_2 \rangle \rangle \cdot \dots \cdot \langle \langle \gamma_p \rangle \rangle = \langle \circ_x \rangle.$$

Soit donc $\Lambda : I \rightarrow X$ une application qui met en relation avec le lacet constant $\circ_x : t \rightarrow x$.

L'idée de la démonstration est de construire, à partir de Λ , une suite $(\omega^j)_{1 \leq j \leq q}$ d'éléments de $\pi_1(X)$ telle que :

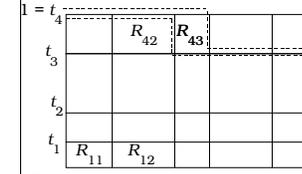
$$\omega^1 = \omega([N]); \quad \omega^q = \circ$$

et : $\forall j, 1 \leq j \leq q-1, \omega^{j+1} = \omega^j([N])$.

Première étape

La première étape consiste à décomposer Λ considérée comme un chemin de l'espace topologique des lacets de X d'extrémité x , en une succession de tels chemins dont les bornes consécutives (qui sont, rappelons-le, des lacets de X) ne diffèrent entre elles que par une déformation dans l'un des V_a .

Par une construction topologique analogue à celle utilisée dans la proposition 1.19, on exhibe deux subdivisions $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de l'intervalle I telles que l'image par Λ du rectangle $R_{jk} := [s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k]$ soit contenue dans un certain $V_{b(j,k)}$. Quite à la raffiner, on peut de plus supposer que la subdivision $(s_j)_{1 \leq j \leq m}$ est plus fine que celle qui sert à décomposer en $\chi_1 \cdot \chi \cdot \dots \cdot \chi_p$. Autrement dit : on peut identifier la restriction de Λ à un intervalle $[s_{j-1}, s_j]$ avec la restriction d'un certain χ_i à ce même intervalle. On a ainsi obtenu un « découpage » du pavé $I \times I$ suivant les rectangles R_{jk} . Dans la figure, on a représenté le cas où $m = 5$ et $n = 4$.



L'idée est de choisir pour étapes successives de la décomposition de Λ les lacets formés de la composition de Λ et des différentes successions des côtés (verticaux ou horizontaux) consécutifs des rectangles R_{jk} .

On en a représenté deux en pointillés dans la figure 1 ci-dessus. Afin de préciser, on introduit les notations suivantes : $1 \leq i \leq k, \gamma_i^{jk}$ est le composé de Λ et du côté horizontal supérieur

$$\omega^{j(k+1)} = \alpha * \langle\langle \gamma_{k+1}^{j(k+1)} \rangle\rangle_c * \langle\langle \gamma_{k+2}^{j(k+1)} \rangle\rangle_c * \beta$$

Le rectangle $R_{j(k+1)}$ étant simplement connexe et l'application Λ étant continue, on a : $\langle\langle \gamma_{k+1}^{jk} \rangle\rangle_c * \langle\langle \gamma_{k+2}^{jk} \rangle\rangle_c = \langle\langle \gamma_{k+1}^{j(k+1)} \rangle\rangle_c * \langle\langle \gamma_{k+2}^{j(k+1)} \rangle\rangle_c$.

D'où : $\tilde{\omega}^{jk} = \omega^{j(k+1)}$ et finalement : $\omega^{jk} = \omega^{j(k+1)}$ ([N]).

Traisons le premier cas : $\forall j, 1 \leq j \leq n-1, \omega^{jm} = \omega^{(j+1)0}$ ([N]).

En se reportant à la figure 2, on verra que, mis à part les chemins constants associés aux côtés verticaux, ω^{jm} et $\omega^{(j+1)0}$ sont composés des classes des mêmes chemins. Ils ne diffèrent que parce que ces classes ne sont pas calculées dans les mêmes voisinages. Ils sont donc équivalents modulo [N].

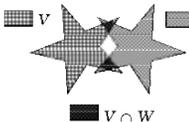
Exemple 2.1.3

Si A et B sont deux ouverts disjoints d'un espace topologique X alors $\tilde{\pi}_1(A \cup B) \approx \tilde{\pi}_1(A) \sqcup \tilde{\pi}_1(B)$

Comme mentionné à l'exemple 1 donné dans l'annexe algébrique 2, on a : $\tilde{\pi}_1(A) * \tilde{\pi}_1(B) \approx \tilde{\pi}_1(A) \sqcup \tilde{\pi}_1(B)$.

D'autre part, dans ce cas $N = \emptyset$ et, par suite, [N] est réduit aux unités de $\tilde{\pi}_1(A) * \tilde{\pi}_1(B)$. D'où le résultat.

Exemple 2.1.4 (retour sur la proposition 1.19)



Reprenons l'exemple, évoqué dans la figure ci-contre. Soient V et W ces deux étoiles ouvertes du plan.

$\pi_1(V \cup W) \approx (\mathbb{Z} +)$.

La démonstration repose sur les trois faits d'ordre topologique suivants :

- (1) V et W étant connexes par arcs, puisque $V \cap W$ est non vide, $V \cup W$ est connexe par arcs.
- (2) Les étoiles V et W sont évidemment étoilées, donc simplement connexes.

- (3) $V \cap W$ comporte deux composantes connexes (par arcs), qui sont toutes deux simplement connexes.

On prie le lecteur de noter que le reste de la démonstration est, grâce au théorème précédent, de nature strictement algébrique.

D'après la proposition 1.14, le fait (1) entraîne qu'il est licite

d'employer la notation $\pi_1(V \cup W)$.

D'après les propositions 1.18 et 1.17, le fait (2) entraîne que les groupoïdes $\tilde{\pi}_1(V)$ et $\tilde{\pi}_1(W)$ sont banals, c'est à dire respectivement isomorphes à $V \setminus V$ et à $W \setminus W$. L'exemple 2 donné dans l'annexe algébrique 2 fournit la description de $\tilde{\pi}_1(V) * \tilde{\pi}_1(W)$.

Rappelons que $\tilde{\pi}_1(V) * \tilde{\pi}_1(W)$ s'identifie à l'ensemble qui contient, d'une part les couples de la forme $(x, x), x \in V \cup W$, qui sont les unités de ce

groupoïde et d'autre part les éléments $(x_i, y_i), \dots, (x_p, y_p)$ du groupoïde $(V \setminus V) \rightsquigarrow (W \setminus W)$ dont les termes appartiennent alternativement à $(V \setminus V)$ et à $(W \setminus W)$ et qui ne comportent aucune unité. Insistons sur le fait que pour tout élément $(x_i, y_i), \dots, (x_p, y_p)$ de $\tilde{\pi}_1(V) * \tilde{\pi}_1(W)$ avec $p \geq 2$ pour tout indice $i, 1 \leq i \leq p-1, y_i$ et x_{i+1} sont des éléments de $V \cap W$ dont l'un est censé appartenir à V et l'autre à W , mais qui correspondent au même élément de $V \cap W$.

Notons C_1 et C_2 les deux composantes connexes de $V \cap W$ et choisissons arbitrairement un point z_1 de C_1 et un point z_2 de C_2 .

Puisque $V \cup W$ est connexe par arcs, il est licite de considérer $\pi_1(V \cup W)$ comme le groupe d'isotropie de $\tilde{\pi}_1(V \cup W)$ au point z_1 .

D'après le théorème de Van Kampen, on a :

$$\tilde{\pi}_1(V \cup W) \approx \tilde{\pi}_1(V) * \tilde{\pi}_1(W) / N$$

Après avoir remarqué que, d'après l'exemple 1 ci-dessus, on a :

$$\tilde{\pi}_1(V \cap W) \approx (C_1 \setminus C_1) \sqcup (C_2 \setminus C_2),$$

il est facile de vérifier que, dans ce cas, la relation d'équivalence engendrée par N coïncide avec la relation d'équivalence engendrée sur le

groupeïde $\tilde{\pi}_1(V) * \tilde{\pi}_1(W)$ par la relation R définie sur $(V \sqcup W) \amalg (W \sqcup V)$ comme suit.

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Ces deux couples correspondent au même} \\ \text{élément de } (C_1 \sqcup C_1) \amalg (C_2 \sqcup C_2) \end{array} \right.$$

Lemme

$\pi_1(V \cup W, z_1)$ est isomorphe au sous-groupe H du groupe d'isotropie de $\tilde{\pi}_1(V) * \tilde{\pi}_1(W)$ en z_1 dont les éléments sont engendrés par les quatre éléments suivants de $(V \sqcup W) \amalg (W \sqcup V)$:
 $(z_1, z_2)_V ; (z_1, z_2)_W ; (z_2, z_1)_V ; (z_2, z_1)_W$.
 De plus H est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

Remarquons que les éléments de H distincts de l'unité (z_1, z_1) ne peuvent prendre que deux formes :

ou bien
$$\underbrace{(z_1, z_2)_V (z_2, z_1)_W (z_1, z_2)_V (z_2, z_1)_W \dots (z_1, z_2)_V (z_2, z_1)_W}_{p \text{ fois } (z_1, z_2)_V (z_2, z_1)_W}$$

ou bien
$$\underbrace{(z_1, z_2)_W (z_2, z_1)_V (z_1, z_2)_W (z_2, z_1)_V \dots (z_1, z_2)_W (z_2, z_1)_V}_{p \text{ fois } (z_1, z_2)_W (z_2, z_1)_V}$$

Notons le premier élément $\varphi(p)$ et le second $\varphi(-p)$.

On laisse au lecteur le soin de montrer que l'application φ ainsi définie est un isomorphisme de groupes de \mathbb{Z} sur H .

Un élément de H n'est congru qu'à lui-même modulo N .

Supposons en effet que deux éléments distincts $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$ de H sont congrus modulo N . Leur « quotient », $\varphi(p)\varphi(q)^{-1} = \varphi(p-q)$ devrait donc appartenir à N et, par suite, comprendre des termes appartenant à $(C_1 \sqcup C_1) \amalg (C_2 \sqcup C_2)$ distinct des unités. Ceci est impossible, par définition de G .

Tout élément du groupe d'isotropie de $\tilde{\pi}_1(V) * \tilde{\pi}_1(W)$ en z_1 est congru à un élément de H modulo $[N]$.

Soit par exemple $(z_1, y_2)_V (y_2, y_3)_W \dots (y_{p-1}, z_1)_U$ un tel élément. Le U du dernier couple désigne V ou W selon que p est pair ou impair.

Traitons tout d'abord les deux premiers couples : $(z_1, y_2)_V (y_2, y_3)_W$.

Deux cas se présentent selon que y_2 appartient à C_1 ou à C_2 .

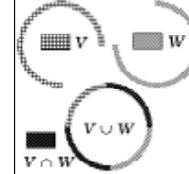
$$\begin{aligned} y_2 \in C_1 \quad (z_1, y_2)_V (y_2, y_3)_W &= (z_1, y_2)_V (y_2, z_1)_W (z_1, y_3)_W \\ &= (z_1, y_2)_V (y_2, z_1)_V (z_1, y_3)_W ([N]) \\ &= (z_1, y_3)_W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 \in C_2 \quad (z_1, y_2)_V (y_2, y_3)_W &= (z_1, z_2)_V (z_2, y_2)_V (y_2, y_3)_W \\ &= (z_1, z_2)_V (z_2, y_2)_W (y_2, y_3)_W ([N]) \\ &= (z_1, z_2)_V (z_2, y_3)_W \end{aligned}$$

On constate que, modulo $[N]$, on peut remplacer le y_2 dans l'élément $(z_1, y_2)_V (y_2, y_3)_W \dots (y_{p-1}, z_1)_U$ par z_1 ou z_2 . Il est facile de vérifier qu'il en est de même pour tous les autres y_i .

La conclusion de la démonstration est immédiate.

Exemple 2.1.5 (Retour au cercle)



On peut retrouver le résultat 1.24 par une démarche analogue à celle de l'exemple précédent. On utilise un recouvrement de S^1 par deux arcs ouverts qui se chevauchent, comme dans la figure ci-contre. Ces deux ouverts et leur intersection ont les mêmes propriétés topologiques que leurs homologues de l'exemple précédent.

2.2 Le théorème de Van Kampen pour les groupes

Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement $\{V_a\}_{a \in A}$ par des ouverts connexes par arcs. le théorème 2.1.2 fournit une description

de $\pi_1(X)$ à l'aide des $\pi_1(V_a)$. En théorie, le groupoïde $\pi_1(X)$ comporte toute l'information relative aux divers groupes $\pi_1(X, x)$, x décrivant X . En fait, le lecteur attentif aura remarqué que même dans le cas très simple de 2.1.4, le calcul des groupes fondamentaux n'est pas immédiat. Le théorème de Van Kampen pour les groupes permet, moyennant une hypothèse supplémentaire à propos du recouvrement, de calculer directement le groupe fondamental.

Définition

Soit X un espace topologique.
 On appellera **recouvrement de Van Kampen au sens large de X** un recouvrement ouvert V_a $a \in A$ de X tel que :
 - Pour tout élément a de A , V_a soit connexe par arcs.
 - $\bigcap_{a \in A} V_a \neq \emptyset$.
 - Pour tout élément (a, b) de $A \times A$, $V_a \cap V_b$ soit connexe par arcs.
 On appellera **recouvrement de Van Kampen de X** un recouvrement de Van Kampen au sens large V_a $a \in A$ de X qui de plus vérifie :
 - Pour tout élément (a, b, c) de $A \times A \times A$, $V_a \cap V_b \cap V_c$ est connexe par arcs.

Notations

Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement de Van Kampen au sens large V_a $a \in A$.

On montre facilement que X est connexe par arcs. Par hypothèse, il existe un point x_0 de X qui appartient à tous les ouverts du recouvrement. Tous les espaces topologiques que nous utiliserons seront connexes par arcs et contiendront x_0 .



Il est donc licite de convenir que tous les calculs de groupes fondamentaux et de morphismes de groupes se feront en prenant le point x_0 pour base.

On utilise les mêmes symboles que dans la section précédente consacrée aux groupoïdes. Le lecteur est donc invité à la vigilance.

Pour tout élément a de A , on notera j_a le morphisme de groupes de $\pi_1(V_a)$ vers $\pi_1(X)$ image par le foncteur de Poincaré en x_0 de l'inclusion $j_a : V_a \hookrightarrow X$. Rappelons que, pour tout lacet λ de V_a , j_a transforme la classe $\langle \lambda \rangle$ de λ dans V_a en la classe $\langle \lambda \rangle$ de λ dans X .

On notera $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ le produit libre des groupes $\pi_1(V_a)$ et ϕ_a l'inclusion de $\pi_1(V_a)$ dans $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$.

On notera J le morphisme de groupes de $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ vers $\pi_1(X)$ induit par la famille $\{j_a\}_{a \in A}$. Rappelons que : $\forall a \in A, J \circ \phi_a = j_a$.

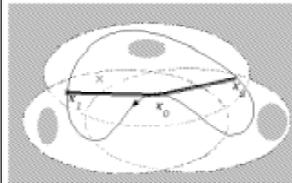
Considérons maintenant un couple (a, b) d'éléments de A . On notera i_{ab} le morphisme de groupes de $\pi_1(V_a \cap V_b)$ vers $\pi_1(V_b)$, image par le foncteur de Poincaré en x_0 de l'inclusion $i_{ab} : V_a \cap V_b \hookrightarrow V_b$. Il est facile de vérifier que $j_b \circ i_{ab}$ et $j_a \circ i_{ba}$ sont tous deux égaux à l'image par le foncteur de Poincaré en x_0 de l'inclusion $V_a \cap V_b \hookrightarrow X$ et donc que, pour tout élément $\langle \lambda \rangle$ de $\pi_1(V_a \cap V_b)$, $\phi_a \circ i_{ba}(\langle \lambda \rangle) \bullet \phi_b \circ i_{ab}(\langle \lambda \rangle^{-1})$ appartient au noyau de J .

Proposition 2.2.1

Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement de Van Kampen au sens large $\{V_a\}_{a \in A}$.
 Alors, avec les notations introduites ci-dessus, J est surjectif.

Soit $\langle \lambda \rangle$ un élément de $\pi_1(X)$.
 En utilisant le même procédé topologique que dans la proposition 1.19 on décompose le lacet λ en une succession $\lambda = \gamma_1 \bullet \gamma_2 \bullet \dots \bullet \gamma_p$ de chemins de X tels que, pour tout $i, 1 \leq i \leq p$, le chemin γ_i soit con-

tenu dans un $V_{a(i)}$
 Pour tout $i, 1 \leq i \leq p$, soit x_i la fin de γ_i (et le début de γ_{i+1}). Tous les $V_a \cap V_b$ étant par hypothèse connexes par arcs, il existe, pour tout $i, 1 \leq i \leq p-1$, un chemin η_i de $V_{a(i)} \cap V_{a(i+1)}$ qui relie x_i à x_{i+1} . Dans la décomposition $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_p$ de λ , on peut alors intercaler $\eta_i \cdot \eta_i^{-1}$ entre γ_i et γ_{i+1} . Si bien qu'en posant : $\gamma_1 \cdot \eta_1$, $\eta_1^{-1} \cdot \gamma_2$, et pour $2 \leq i \leq p-1$, $\eta_{i-1}^{-1} \cdot \gamma_i \cdot \eta_i$, on obtient un lacet $\langle \lambda \rangle = \langle \gamma_1 \rangle \cdot \langle \gamma_2 \rangle \cdot \dots \cdot \langle \gamma_p \rangle$ formé de la succession des lacets $\langle \gamma_i \rangle$ dont chacun est contenu dans $V_{a(i)}$ et tel que : $\langle \lambda \rangle = \langle \gamma \rangle$.
 On voit alors facilement que $\langle \lambda \rangle = J \left(\langle \langle \gamma_1 \rangle \rangle * \langle \langle \gamma_2 \rangle \rangle * \dots * \langle \langle \gamma_p \rangle \rangle \right)$, ce qui achève la démonstration.



Dans l'exemple ci-contre, on a évoqué le cas de trois ouverts du plan que l'on a dessiné en blanc. Les chemins intercalaires (η_i) sont au nombre de deux et sont dessinés en lignes droites. On a

doublé ces dernières pour rappeler que les chemins qu'elles représentent sont parcourus dans les deux sens.

Considérons le sous-ensemble N de $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ défini par :

$$N := \{ \phi_a i_{ba}(\lambda) \cdot \phi_b i_{ab}(\lambda^{-1}) \mid (a, b) \in A, \lambda \in \pi_1(V_a \cap V_b) \}.$$

On a remarqué, en introduisant les notations, que N est contenu dans le noyau de J .

Proposition 2.2.2 (théorème de Van Kampen)

Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement de Van Kampen au sens strict $V_a, a \in A$. Alors le noyau de J coïncide avec le sous-groupe distingué de $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ engendré par N .

Notons $[M]$ le sous-groupe distingué de $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ engendré par N .

On sait déjà que : $[M] \subset \text{Ker } J$. On va montrer que : $\text{Ker } J / [M] = 0$.

Donnons-nous un élément $\omega = \langle \langle \gamma_1 \rangle \rangle * \langle \langle \gamma_2 \rangle \rangle * \dots * \langle \langle \gamma_p \rangle \rangle$ du noyau de J . La donnée de ω équivaut à celle d'un lacet $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_1 \rangle \cdot \langle \gamma_2 \rangle \cdot \dots \cdot \langle \gamma_p \rangle$ formé de la succession des lacets $\langle \gamma_i \rangle$ dont chacun est contenu dans un certain $V_{a(i)}$; de plus : $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_1 \rangle \cdot \langle \gamma_2 \rangle \cdot \dots \cdot \langle \gamma_p \rangle = \langle \omega \rangle$.

Soit donc $\Lambda : I \rightarrow X$ une application qui met en relation avec le lacet constant $\omega : t \mapsto x_0$.

L'idée de la démonstration est de construire, à partir de Λ , une suite $(\omega^j)_{1 \leq j \leq q}$ d'éléments de $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ telle que :

$$\omega^1 = \omega([M]); \quad \omega^q = 0 \tag{1}$$

$$\text{et : } \forall j, 1 \leq j \leq q-1, \omega^{j+1} = \omega^j([M])$$

Première étape

La première étape consiste à décomposer Λ considérée comme un chemin de l'espace topologique des lacets de X d'extrémité x_0 , en une succession de tels chemins dont les bornes consécutives (qui sont, rappelons-le, des lacets de X) ne diffèrent entre elles que par une déformation dans l'un des V_a .

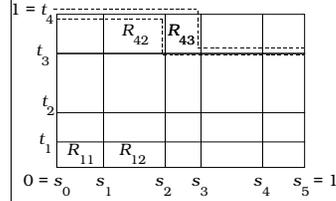
Par une construction topologique analogue à celle utilisée dans la proposition 1.19, on exhibe deux subdivisions $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$

et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de l'intervalle I telles que l'image par Λ

du rectangle $R_{jk} := [s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k]$ soit contenue dans un certain $V_{b(j, k)}$. Quitte à la raffiner, on peut de plus supposer que la subdivision $(s_j)_{1 \leq j \leq m}$

est plus fine que celle qui sert à décomposer en $\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_1 \rangle \cdot \dots \cdot \langle \gamma_p \rangle$. Autrement dit : on peut identifier la restriction de Λ à un intervalle $[s_{j-1}, s_j]$ avec la restriction d'un certain $\langle \gamma_i \rangle$ à ce même intervalle. On a ainsi obtenu un « découpage » du pavé $I \times I$ suivant les rectangles R_{jk} . Dans la figure, on a représenté le cas où $m = 5$ et $n = 4$.

L'idée est de choisir pour étapes successives de la décomposition de Λ les lacets formés de la composition de Λ et des différentes successions des côtés (verticaux ou horizontaux) consécutifs des rectangles R_{jk} .

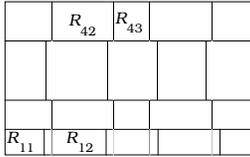


On en a représenté deux en pointillés dans la figure 1 ci-contre.

Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, on tire parti de la continuité de Λ pour déformer légèrement le découpage

précédent en déplaçant les côtés verticaux de certains des rectangles R_{jk} de telle sorte que :

- a) Un point de $I \setminus I$ soit contenu dans au plus trois R_{jk} ;
- b) Chacun des R_{jk} soit contenu dans $\Lambda^{-1}(V_{b(j,k)})$.



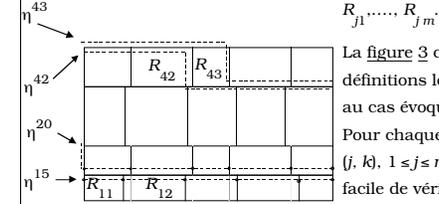
La figure 2 ci-dessus à droite illustre une déformation de ce genre appliquée au cas évoqué précédemment.

Précisons l'expression « certains des rectangles » utilisée plus haut. On laisse inchangés les rectangles de la rangée horizontale du bas, c'est à dire les R_{1k} ; $1 \leq k \leq m$, puis on déforme les rectangles intérieurs des rangées paires.

Soit, pour tout couple d'indices (j, k) différents de zéro, η^{jk} le lacet de X qui résulte de la composition de Λ avec le chemin de $I \setminus I$ de source $(0, t_j)$ et de but $(1, t_{j-1})$ qui emprunte successivement les côtés horizontaux supérieurs des rectangles $R_{j1}, R_{j2}, \dots, R_{jk}$, puis le côté vertical droit de ce dernier rectangle puis les côtés horizontaux inférieurs des rectangles R_{jk+1}, \dots, R_{jm} .

Soit encore η^{j0} la composition de Λ avec le chemin de $I \setminus I$ de source

$(0, t_j)$ et de but $(1, t_{j-1})$ qui emprunte successivement le côté vertical gauche de R_{j1} puis les côtés horizontaux inférieurs des rectangles



R_{j1}, \dots, R_{jm} . La figure 3 ci-contre illustre ces définitions lorsqu'on les applique au cas évoqué précédemment.

Pour chaque couple d'indices (j, k) , $1 \leq j \leq n$, $0 \leq k \leq m$, il est facile de vérifier que le lacet η^{jk} se décompose en une succession $\gamma_1^{jk} \cdot \gamma_2^{jk} \cdot \dots \cdot \gamma_{m+1}^{jk}$ de $m+1$ chemins dont la description détaillée suit :

- $1 \leq i \leq k$ γ_i^{jk} est le composé de Λ et du côté horizontal supérieur du rectangle R_{ji} .
- $(1 \leq k = i-1)$ γ_{k+1}^{jk} est le composé de Λ et du côté vertical droit du rectangle R_{jk} .
- $k+2 \leq i \leq m+1$ γ_i^{jk} est le composé de Λ et du côté horizontal inférieur du rectangle $R_{j i-1}$.
- $(0 = k = i-1)$ γ_1^{j0} est le composé de Λ et du côté vertical gauche du rectangle R_{j1} .

Seconde étape

Pour tout couple d'indices (j, k) , $1 \leq j \leq n$, $0 \leq k \leq m$, on va associer un élément ω^{jk} de $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ à chaque η^{jk} .

Pour ce faire, on commence par dresser la liste de tous les sommets des rectangles R_{jk} . On appellera ces points des « sommets ». Grâce à la légère déformation que nous avons fait subir aux rectangles R_{jk} , chacun de ces points est le sommet d'au plus trois rectangles. L'image d'un sommet par Λ appartient donc à l'intersection des trois ouverts du recouvrement qui correspondent à ces trois rectangles.

Le recouvrement étant un recouvrement de Van Kampen, on peut associer à chacun de ces sommets un chemin qui a pour source son image

par Λ , qui a pour but x_0 et qui est contenu dans l'intersection des trois ouverts du recouvrement qu'on lui a associé un peu plus tôt. Pour abrégé on appellera par la suite ce chemin le « raccord » associé au sommet. Si l'image d'un sommet par Λ est x_0 , (comme, par exemple, pour certains des sommets du bas du pavé) on lui associe le lacet constant pour raccord.

Pour tout triplet d'indices (i, j, k) , $1 \leq i \leq m+1$, $1 \leq j \leq n$, $0 \leq k \leq m$ soit $a(i, j, k)$ l'élément de A tel que $V_{a(i, j, k)}$ contienne le rectangle qui figure dans la définition de γ_i^{jk} .

En encadrant γ_i^{jk} avec l'inverse du raccord associé à sa source et le raccord associé à son but, ces deux derniers chemins étant contenus dans $V_{a(i, j, k)}$ on obtient un lacet $\tilde{\omega}_i^{jk}$ de $V_{a(i, j, k)}$ représentant l'élément $\langle\langle \tilde{\omega}_i^{jk} \rangle\rangle$ de $\pi_1(V_{a(i, j, k)})$

On pose ensuite : $\omega^{jk} := \langle\langle \tilde{\omega}_1^{jk} \rangle\rangle * \langle\langle \tilde{\omega}_2^{jk} \rangle\rangle * \dots * \langle\langle \tilde{\omega}_m^{jk} \rangle\rangle$

On a ainsi obtenu une suite $(\omega^h)_{1 \leq h \leq (m+1)n}$ d'éléments de $\bigstar_{\alpha \in A} \pi_1(V_\alpha)$.

On a utilisé le dénombrement $(j, k) \longmapsto (m+1)(j-1) + k+1$.

Il nous faut maintenant montrer les relations (1).

Compte tenu des diverses hypothèses et définitions, il est facile de vérifier que les lacets qui composent ω^{10} peuvent être regroupés par paquets de façon à redonner $\omega = \langle\langle \tilde{\omega}_1 \rangle\rangle * \langle\langle \tilde{\omega}_2 \rangle\rangle * \dots * \langle\langle \tilde{\omega}_p \rangle\rangle$ Il est tout aussi aisé de voir que : $\omega^{nm} = \langle \circ \rangle$.

Il nous reste à montrer que : $\forall h, 1 \leq h \leq q-1, \omega^{h+1} = \omega^h ([M])$

Il nous faut traiter deux cas : (i) $\forall j, 1 \leq j \leq n-1, \omega^{jm} = \omega^{j(m+1)0} ([M])$ et (ii) $\forall (j, k), 1 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq m-1, \omega^{jk} = \omega^{j(k+1)} ([M])$ (voir figure 3)

Traisons d'abord le second cas. Soit un couple d'indices (j, k) , $1 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq m-1$. Ainsi que l'on peut le voir sur la figure 3, ω^{jk} et $\omega^{j(k+1)}$ ne diffèrent que par les lacets associés aux côtés du rectangle $R_{j(k+1)}$.

Posons $b := a(j, k)$ et $c := a(j, k+1)$. Considérons le lacet $\tilde{\omega}_{k+1}^{jk}$ qui, rappelons-le, est obtenu en encadrant le chemin γ_{k+1}^{jk} avec les deux raccords associés à ses bornes.

Par construction, $\tilde{\omega}_{k+1}^{jk}$ est un lacet de $V_b \cap V_c$ tandis que par définition, la classe de $\tilde{\omega}_{k+1}^{jk}$ qui figure dans ω^{jk} est un élément de $\pi_1(V_b)$. Notons $\langle\langle \tilde{\omega}_{k+1}^{jk} \rangle\rangle_b$ cette dernière et $\langle\langle \tilde{\omega}_{k+1}^{jk} \rangle\rangle_c$ la classe de $\tilde{\omega}_{k+1}^{jk}$ dans $\pi_1(V_c)$.

Soit enfin $\tilde{\omega}^{jk}$ l'élément de $\bigstar_{\alpha \in A} \pi_1(V_\alpha)$ obtenu en remplaçant $\langle\langle \tilde{\omega}_{k+1}^{jk} \rangle\rangle_b$ par $\langle\langle \tilde{\omega}_{k+1}^{jk} \rangle\rangle_c$ dans ω^{jk} .

Il est facile de vérifier que : $\omega^{jk} = \tilde{\omega}^{jk} ([M])$.

Il est tout aussi aisé de voir qu'il existe deux éléments α et β du groupe $\bigstar_{\alpha \in A} \pi_1(V_\alpha)$ tels que, en notant respectivement ρ_1 et ρ les raccords associés aux sommets supérieur gauche et inférieur droit du rectangle $R_{j(k+1)}$, on ait les égalités suivantes :

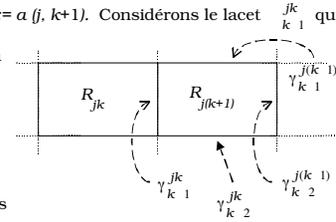
$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^{jk} &= \alpha * \rho_1^{-1} * \langle\langle \gamma_{k+1}^{jk} \rangle\rangle_c * \langle\langle \gamma_{k+2}^{jk} \rangle\rangle_c * \rho * \beta \\ \omega^{j(k+1)} &= \alpha * \rho_1^{-1} * \langle\langle \gamma_{k+1}^{j(k+1)} \rangle\rangle_c * \langle\langle \gamma_{k+2}^{j(k+1)} \rangle\rangle_c * \rho * \beta \end{aligned}$$

Le rectangle $R_{j(k+1)}$ étant simplement connexe et l'application Λ étant continue, on a : $\langle\langle \gamma_{k+1}^{jk} \rangle\rangle_c * \langle\langle \gamma_{k+2}^{jk} \rangle\rangle_c = \langle\langle \gamma_{k+1}^{j(k+1)} \rangle\rangle_c * \langle\langle \gamma_{k+2}^{j(k+1)} \rangle\rangle_c$

D'où : $\tilde{\omega}^{jk} = \omega^{j(k+1)}$ et finalement : $\omega^{jk} = \omega^{j(k+1)} ([M])$.

Traisons le premier cas : $\forall j, 1 \leq j \leq n-1, \omega^{jm} = \omega^{j(m+1)0} ([M])$.

Les sommets inférieurs des rectangles $R_j, R_{j+1}, \dots, R_{j+m}$ et les sommets supérieurs des rectangles $R_{(j+1)2}, R_{(j+1)3}, \dots, R_{(j+1)m}$ forment une subdivision de la ligne horizontale $t = \frac{t}{j}$ de $I \times I$. (voir figure 3) On peut alors décomposer ω^{jm} et $\omega^{j(m+1)0}$ suivant cette subdivision. On ob-



tient ainsi deux éléments de $\ast_{a \in A} \pi_1(V_a)$ qui sont composés des classes des mêmes lacets. Ils ne diffèrent que parce que les classes ne sont pas calculées dans les mêmes voisinages. Ils sont donc équivalents modulo $[N]$.

On notera que l'hypothèse selon laquelle $\{V_a\}_{a \in A}$ est un recouvrement de Van Kampen au sens strict sert à choisir les raccords de façon à pouvoir associer à chaque côté commun à deux des rectangles R_y un lacet qui soit contenu dans l'intersection des membres du recouvrement associés à ces rectangles.

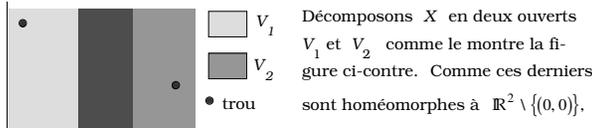
Le lecteur est invité à comparer cette démonstration avec celle de 2.1.2.

2.3 Applications du théorème de Van Kampen

Exemple du début 2.3.1

Considérons l'espace topologique X constitué par le plan \mathbb{R}^2 privé de deux points que nous appellerons « les trous de X ».

Alors : $\pi_1(X) \approx \mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}$.



Il vient, d'après la proposition 1.26, $\pi_1(V_1) \approx \pi_1(V_2) \approx \mathbb{Z}$;

Il est facile de vérifier que $\{V_1, V_2\}$ constitue un recouvrement de Van Kampen au sens large de X . Puisqu'il est réduit à deux éléments, il est clair que c'est aussi un recouvrement de Van Kampen au sens strict.

D'autre part, comme on le voit sur la figure, $V_1 \cap V_2$ est simplement connexe. Dans ce cas, on a donc : $N = \{0\}$; d'après le théorème précédent, $\pi_1(X) \approx \pi_1(V_1) \ast \pi_1(V_2) \approx \mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}$.

Contre-exemple 2.3.2

Soit X l'ouvert de \mathbb{R}^3 constitué du demi-espace $\{x, y, z : z > 0\}$ privé du demi-cercle $C := \{(0, y, z) : y^2 + z^2 = 1\}$.

Soit Y l'ouvert de X défini par : $Y = \{x, y, z \in X : z < \frac{1}{2}\}$.

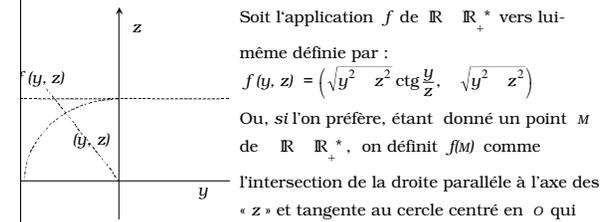
Soit $\phi : \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X)$ l'image de l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ par le foncteur de Poincaré.

Alors : $\pi_1(X) \approx \mathbb{Z}$; $\pi_1(Y) \approx \mathbb{Z} \ast \mathbb{Z}$;

$\phi : (i, j) \longmapsto i - j$

a) Calcul de $\pi_1(X)$.

Notons X_1 l'ouvert de \mathbb{R}^3 constitué du demi-espace $\{x, y, z : z > 0\}$ privé de la droite $(0, y, 1) : y \in \mathbb{R}$.



Soit l'application f de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ vers lui-même définie par :

$$f(y, z) = \left(\sqrt{y^2 - z^2} \operatorname{ctg} \frac{y}{z}, \sqrt{y^2 - z^2} \right)$$

Ou, si l'on préfère, étant donné un point M de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on définit $f(M)$ comme l'intersection de la droite parallèle à l'axe des « z » et tangente au cercle centré en o qui

contient M et de la droite qui passe par o et par M . Il est facile de voir qu'une construction géométrique « réciproque » permet de définir l'inverse de f . Puisque f et son inverse sont le fruit de reconstructions « à la règle et au compas », elles sont toutes deux continues. $1_{\mathbb{R}}$ f induit donc un homéomorphisme de X sur X_1 .

D'après la proposition 1.22, $\pi_1(X) \approx \pi_1(X_1)$.

X_1 est homéomorphe à $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \setminus (0, 1))$. Donc, d'après les propositions 1.23 et 1.26, $\pi_1(X) \approx \pi_1(X_1) \approx \mathbb{Z}$.

b) Calcul de $\pi_1(Y)$.

Rebaptisons Z l'espace topologique constitué par le plan \mathbb{R}^2 privé de deux points que nous avons évoqué à la proposition précédente.

Il est facile de vérifier que Y est homéomorphe à $Z = 0, \frac{1}{2}$. Donc, d'après les propositions 1.22, 1.23 et la proposition précédente, on a : $\pi_1(Y) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

c) Calcul de ϕ .

Soient P le plan $z = \frac{1}{4}$, le point $M_0(0, 0, \frac{1}{4})$ et M_1 et M_2 les éléments de $P \cap C$ dans l'ordre des ordonnées croissantes.

Soient les éléments $\langle \lambda \rangle_Y$ et $\langle \lambda' \rangle_Y$ de $\pi_1(Y) = \pi_1(Y, M_0)$ qui correspondent respectivement aux éléments $(1, 0)$ et $(0, -1)$ de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. L'un des représentants de $\langle \lambda \rangle_Y$ est un lacet λ d'extrémité M_0 qui décrit une seule



fois le périmètre d'un cercle situé dans le plan P , de centre M_1 et qui passe par M_0 et ce, dans le sens direct. De même l'un des représentants de $\langle \lambda' \rangle_Y$ est un lacet d'extrémité M_0 qui décrit une seule fois le périmètre d'un cercle situé dans le plan P , de centre M_2 et qui passe par M_0 et ce,

dans le sens inverse. Dans la figure ci-dessus on peut voir λ et λ' en bleu respectivement en haut, à gauche et en bas, à droite.

Comme on a cherché à le suggérer dans la figure, les deux cercles bleus horizontaux qui sont de sens opposés se transforment l'un en l'autre en pivotant autour de M_0 tout en suivant C . On en déduit que λ et λ' ont la même classe dans $\pi_1(X, M_0)$. Puisque $\langle \lambda \rangle_X$ correspond à l'élément 1 de \mathbb{Z} , on a : $\phi(0, -1) = \phi(1, 0) = 1$.

Le résultat provient alors du fait que ϕ est un morphisme de groupes.

Exemple 2.3.3

Notons C le cercle horizontal de rayon 1 contenu dans \mathbb{R}^3 et centré à l'origine. Alors $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C) \approx \mathbb{Z}$.

Soient $\alpha, 0 < \alpha < 1$ et C_1 et C_2 les ouverts de C représentés ci-contre.

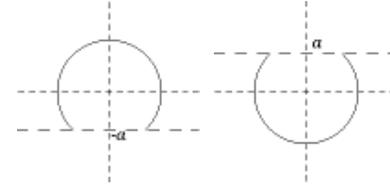
Posons :

$$U_1 = \mathbb{R} \setminus]-\alpha, +\alpha[\subset \mathbb{R},$$

$$U_2 = \mathbb{R} \setminus]-\alpha, \alpha[\subset \mathbb{R},$$

$$V_1 = U_1 \setminus C_1 \text{ et}$$

$$V_2 = U_2 \setminus C_2.$$



Il est facile de vérifier

que V_1, V_2 et leur intersection sont tous trois connexes par arcs. V_1 et V_2 sont donc les membres d'un recouvrement de Van Kampen au

sens strict de $\mathbb{R}^3 \setminus C$.

a) Calcul de $\pi_1(V_1)$ et de $\pi_1(V_2)$.



Comme on tente de le figurer ci-contre, V_1 est un mem

bre d'une partition de $\mathbb{R} \setminus]-\alpha, +\alpha[$. Par une construction analogue à celle du a) de la proposition précédente, on peut donc montrer que V_1 est homéomorphe à $\mathbb{R} \setminus (]-\alpha, 1[\cup]1, +\infty[)$ \mathbb{R} . D'après les propositions 1.23 et 1.26, $\pi_1(V_1) \approx \mathbb{Z}$.

On montrerait d'une façon analogue que : $\pi_1(V_2) \approx \mathbb{Z}$.

b) Calcul de $\pi_1(V_1 \cap V_2)$ et de N .

Comme au b) de la proposition précédente, il est facile de vérifier que $V_1 \cap V_2$ est homéomorphe à $\mathbb{Z} \setminus]-\alpha, \alpha[$, d'où : $\pi_1(V_1 \cap V_2) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

De façon analogue au c) de la proposition précédente, on montre que les morphismes $\phi_1 : \pi_1(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \pi_1(V_1)$ et $\phi_2 : \pi_1(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \pi_1(V_2)$

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$i * j \longmapsto i - j$$

Il est donc facile de vérifier que N correspond à $i * -i : i \in \mathbb{Z}$,

c) Conclusion

Un simple calcul algébrique montre que : $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} / N \approx \mathbb{Z}$.

D'après 2.2.2, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus C) \approx \mathbb{Z}$.

3. Déformations et homotopies

3.0 Exemple concret

Nous avons tous assisté à ce numéro de cirque dans lequel l'artiste tire de ses poches des ballons multicolores, les gonfle et les tord dans le but de les assembler en poupées qu'il lance ensuite aux enfants du public.

Aux yeux du mathématicien, chacun de ces ballons peut être modélisé par un sous-espace topologique de \mathbb{R}^3 soumis à un processus continu de déformations tant en terme temporel qu'en termes spatiaux.

Notons B_0 le sous-espace topologique de \mathbb{R}^3 associé au ballon vide du début du numéro et $i_0 : B_0 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ son inclusion canonique. On représente l'état du ballon à l'instant t par l'image d'une application **continue** $i_t : B_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. On a ainsi un processus continu en termes spatiaux.

On a ainsi défini une fonction $t \longmapsto i_t$ de \mathbb{R} vers l'ensemble des applications continues de B_0 dans \mathbb{R}^3 , noté $\text{Top}(B_0, \mathbb{R}^3)$.

Puisque le processus a évidemment un début et une fin, cette fonction $t \longmapsto i_t$ est définie sur un intervalle fermé. Quitte à la composer avec une transformation affine, on peut supposer qu'elle est définie sur l'intervalle unité $I = [0, 1]$.

Pour traduire l'hypothèse selon laquelle le processus est continu en terme temporel, on suppose que l'application $(t, x) \longmapsto i_t(x)$, de $I \times B_0$ dans \mathbb{R}^3 est **continue**.

En fait, comme on le voit dans l'annexe topologique, la correspondance exponentielle, si on munit $\text{Top}(B_0, \mathbb{R}^3)$ de la topologie compacte-ouverte, en notant $\text{Top}_{\text{ko}}(B_0, \mathbb{R}^3)$ l'espace topologique ainsi obtenu, la dernière hypothèse revient à dire que l'application $t \longmapsto i_t$ de I sur $\text{Top}_{\text{ko}}(B_0, \mathbb{R}^3)$, est continue.

3.1 Généralisation

Dans l'exemple précédent, on a introduit le concept de processus continu de déformations appliqué aux sous-espaces topologiques.

On peut étendre ce concept en l'appliquant aux applications continues.

Définition

Soient X et Y deux espaces topologiques.

On appelle « processus continu de déformations de X dans Y » une application continue de $I \times X$ vers Y .

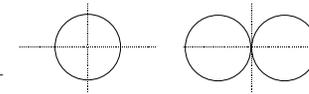
Soient f et g deux applications continues de X vers Y .

On dira que g est le produit d'un processus continu de déformations appliqué à f si et seulement s'il existe une application continue η de $I \times X$ vers Y telle que : $\forall x \in X, \eta(0, x) = f(x)$ et $\eta(1, x) = g(x)$.

Exemples

□ $\begin{cases} I \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t, \theta & \longmapsto & t \cos \theta, t \sin \theta \end{cases}$ est un processus continu de déformations qui transforme l'application constante $\theta \longmapsto (0, 0)$ de S^1 vers \mathbb{R}^2 en l'inclusion canonique de S^1 dans \mathbb{R}^2 .

□ On passe de l'une à l'autre des deux figures ci-contre par le processus continu de déformations qui suit :



$$\begin{aligned} \eta : [0, 1] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \eta_t : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \left(-\sin\left(\frac{\pi-2t}{\pi} s - \frac{\pi}{2} t\right) - \sin \frac{\pi}{2} t, \cos\left(\frac{\pi-2t}{\pi} s - \frac{\pi}{2} t\right) \right) \\ \eta_t : [\pi, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \left(-\sin\left(\frac{\pi-2t}{\pi} s - \frac{3\pi}{2} t\right) - \sin \frac{\pi}{2} t, \cos\left(\frac{\pi-2t}{\pi} s - \frac{3\pi}{2} t\right) \right) \end{aligned}$$

Si vous lisez ce cours à l'écran avec Acrobat Reader ©, cliquez sur le cercle ci-dessus.

Le cheminement utilisé pour arriver à ce résultat rébarbatif est détaillé dans [AE1](#).

Proposition 3.1.1

Lorsque Y est séparé, un processus continu de déformations de f vers g n'est rien d'autre qu'un chemin de $\text{Top}_{\text{KO}}(X, Y)$, de début f et de fin g .

C'est une conséquence immédiate de la [correspondance exponentielle](#)

Proposition 3.1.2

Soient X et Y deux espaces topologiques. La relation \sim définie sur $\text{Top}(X, Y)$ par :

$$f \sim g \iff \text{« } g \text{ est le produit d'un processus continu de déformations appliqué à } f \text{ »}$$

est une relation d'équivalence.

Réflexivité de \sim : Si f est un élément de $\text{Top}(X, Y)$, il est facile de voir que l'application $(t, x) \longmapsto f(x)$ met en relation f avec lui-même.

Symétrie de \sim : Si f et g sont deux éléments de $\text{Top}(X, Y)$ tels que g soit le produit du processus continu de déformations η appliqué à f , il est facile de vérifier que l'application $(t, x) \longmapsto \eta(1-t, x)$ est un processus continu de déformations qui transforme g en f .

Transitivité de \sim : Si f_1, f et f sont trois éléments de $\text{Top}(X, Y)$ tels que f_1 et f soient en relation par l'application η_1 de $I \times X$ dans Y et que f et f soient en relation par l'application η_2 de $I \times X$ dans Y , il est facile de vérifier que l'application η définie par :

$$\forall (t, x) \in [0, \frac{1}{2}] \times X, \quad \eta(t, x) = \eta_1(2t, x)$$

$$\forall (t, x) \in [\frac{1}{2}, 1] \times X, \quad \eta(t, x) = \eta_2(2t-1, x)$$

est un processus continu de déformations qui transforme f_1 en f_3 .

Changement de terminologie

On a introduit le terme de « processus continu de déformations » parce qu'il semble décrire l'intuition de laquelle l'on est parti.

A la lumière du résultat précédent les premiers mathématiciens qui se sont penchés sur ce sujet ont préféré le terme d'**homotopie**.

Soient X et Y deux espaces topologiques et f et g deux applications continues de X vers Y .

Une **homotopie** de f vers g est donc une application continue η de $I \times X$ vers Y telle que : $\forall x \in X, \eta(0, x) = f(x)$ et $\eta(1, x) = g(x)$.

On dira que f et g sont **homotopes** s'il existe une homotopie de f vers g (ou, ce qui revient au même, de g vers f).

On a déjà rencontré deux cas particuliers d'homotopie au chapitre 1 : ce sont les équivalences entre les lacets ou entre les chemins.

Remarque sur la terminologie

Le terme « homotopie » qui signifie à peu près « ressemblance de lieu » peut très bien ne pas paraître suffisamment parlant au lecteur. Il est néanmoins consacré par l'usage : c'est la seule raison pour laquelle nous l'utiliserons.

Classes d'homotopie

D'après la proposition précédente, si f est une application continue de X vers Y , on peut définir sa classe d'homotopie.

On notera cette dernière $[f]$

Proposition 3.1.3

Une homotopie entre deux éléments f et g de $\text{Top}(X, Y)$ n'est autre qu'un chemin de Y^X de début f et de fin g .

C'est une conséquence de la correspondance exponentielle. (A2.1.1)

3.2 La catégorie des classes d'homotopie

La structure de la catégorie des applications continues (composition des applications) induit sur l'ensemble des classes d'homotopie une structure de catégorie.

Proposition 3.2.1

Soient X, Y et Z trois espaces topologiques,
 f et g deux applications continues de X vers Y
 r et s deux applications continues de Y vers Z
 Alors : $|f| \cdot |g|$ et $|r| = |s| \implies |r \circ f| = |s \circ g|$

Soient δ une homotopie de f vers g et η une homotopie de r vers s .
 On définit alors $\phi : I \times X \longrightarrow Z$ par : $\phi(t, x) = \eta(t, \delta(t, x))$.
 Il est facile de vérifier que ϕ est une homotopie de $r \circ f$ vers $s \circ g$.
 Remarquons que lorsque X et Y sont slc, δ est analogue à un chemin de f vers g , η , à un chemin de r vers s , et ϕ au chemin obtenu en composant point à point η et δ .

Définition

La proposition précédente permet de définir la composée $|r| \circ |f|$ des classes d'homotopie $|f|$ et $|r|$ comme la classe d'homotopie $|r \circ f|$.
 Il est facile de vérifier que cette loi de composition munit l'ensemble des classes d'homotopie d'une structure de catégorie que l'on notera Htop .
 Il est aussi aisé de montrer que la surjection canonique $\|\cdot\| : f \longmapsto |f|$ de Top sur Htop est un foncteur.
 Les objets de Htop sont donc les espaces topologiques et ses flèches sont les classes d'homotopie.

Les types d'homotopie

On dira que deux espaces topologiques X et Y ont le même type d'homotopie lorsqu'ils sont isomorphes dans Htop c'est à dire lorsqu'il existe une application continue f de X vers Y dont la classe d'homotopie $|f|$ soit inversible dans Htop .

Lemme 3.2.2

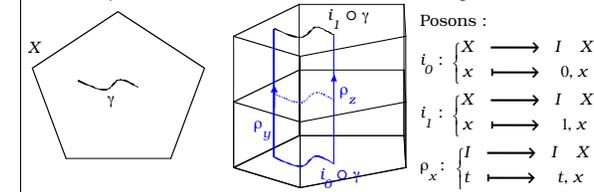
Tout espace topologique X a le même type d'homotopie que le cylindre unité de base X , $I \times X$.
 Plus précisément, les classes d'homotopie des applications $\rho_X : (t, x) \longmapsto x$ et $\eta_0 : x \longmapsto (0, x)$ sont inverses l'une de l'autre dans Htop .

Tout d'abord, on a évidemment : $\rho_X \circ \eta_0 = 1_X$.
 Reste à vérifier $|\eta_0 \circ \rho_X| = |1_{I \times X}|$. Soit $h : \begin{cases} I \times X \longrightarrow I \times X \\ s, t, x \longmapsto st, x \end{cases}$.
 Il est facile de vérifier que h est une homotopie de $\eta_0 \circ \rho_X$ vers $1_{I \times X}$.

Proposition 3.2.3

Si f et g sont deux applications continues de X vers Y , la donnée d'une homotopie Φ de f vers g entraîne la donnée d'une conjugaison u_Φ de $\pi_1 f$ vers $\pi_1 g$.

Soit, pour tout point x de X , $u_\Phi(x) := \langle \Phi_x \rangle$
 Puisque $\Phi_x : t \longmapsto \Phi(t, x)$ est un chemin de Y de source $f(x)$ et de but $g(x)$, $u_\Phi(x)$ est une flèche de $\pi_1 Y$ de $f(x)$ vers $g(x)$.
 Il faut montrer que, pour toute flèche $\langle \gamma \rangle$ de $\pi_1 X$ de source y et de but z , $\pi_1 g \cdot \langle \gamma \rangle = (u_\Phi \circ z)^{-1} \cdot (\pi_1 f \cdot \langle \gamma \rangle) \cdot (u_\Phi \circ y)$
 Soit donc γ un chemin de X de source x et de but y .



Les chemins $\rho_z \circ i_0 \circ \gamma$ et $i_1 \circ \gamma$ sont mis en relation par

$$\Lambda \quad \begin{cases} I \times X \longrightarrow I \times X \\ s, t, x \longmapsto \rho_z \circ st \quad i_s \gamma t \quad \rho_y \circ st \end{cases}$$

On a donc : (1) $\langle \rho_z \cdot (i_0 \circ \gamma) \cdot \rho_y \rangle = \langle i_1 \circ \gamma \rangle$
 D'autre part, on a : $\Phi \circ \rho_y = \Phi_y$, $\Phi \circ \rho_z = \Phi_z$, $\Phi \circ i_0 = f$, $\Phi \circ i_1 = g$.
 En appliquant $\pi_1 \Phi$ à l'égalité (1) ci-dessus, on obtient :
 $\pi_1 g \cdot \langle \gamma \rangle = \left(u_\Phi(z) \right)^{-1} \left(\pi_1 f \cdot \langle \gamma \rangle \right) \left(u_\Phi(y) \right)$.

3.3 Espaces contractiles

L'espace topologique non vide le plus simple que l'on connaisse est le singleton (i.e. : espace topologique réduit à un point). Pour étudier l'homotopie, il semble naturel de rechercher les espaces topologiques qui ont le même type d'homotopie qu'un singleton.

Un singleton étant un objet terminal dans **Top**, (voir Annexe) il est facile de vérifier, en utilisant le foncteur surjectif $\|\cdot\|$ que c'est aussi un objet terminal dans **Htop**.

Un espace topologique qui a le même type d'homotopie qu'un singleton sera donc aussi un objet terminal dans **Htop**.

Notation

Soient X et Y deux espaces topologiques et x l'un des points de X .
 On notera $Y \rightarrow x$ l'application constante de Y vers X de valeur x .

Proposition 3.3.1

Soit un espace topologique X .
 Les trois assertions suivantes sont équivalentes.
 (i) X contient un point x tel que l'application $X \rightarrow x$ soit homotope à l'identité de X .
 (ii) X est un objet terminal dans **Htop**.
 (iii) X a le même type d'homotopie qu'un singleton.

(i) \implies (ii) Soit x le point de X tel que $X \rightarrow x$ soit homotope à l'identité de X et soit Y un autre espace topologique, $Y \rightarrow x$ est évidemment une flèche de **Top**. Soit alors $f: Y \longrightarrow X$ une autre flèche de **Top**.

On a : $X \rightarrow x$, $f = Y \rightarrow x$ et $|f| = |I_X \cdot f| = |I_X| \cdot |f|$.
 D'après (i), $|I_X| = |X \rightarrow x|$. D'où : $|f| = |X \rightarrow x| \cdot |f| = |X \rightarrow x \cdot f| = |Y \rightarrow x|$
 (ii) \implies (i) (i) n'est qu'une conséquence immédiate de (ii).
 (iii) \iff (ii) C'est purement catégorique ; voir l'annexe algébrique.

Espaces contractiles

Un espace topologique qui vérifie les assertions de la proposition précédente est dit **contractile**.

Remarque

La condition (i) est celle qui sert le plus souvent à déterminer si un espace est contractile ou non. C'est la plus intuitive des trois et la première à avoir été utilisée.

Exemples

Rappelons que l'on dit qu'une partie A de \mathbb{R}^n (ou, plus généralement d'un espace vectoriel topologique E) est **étoilée en un de ses points** x_0 si, pour tout point x de A , le segment $x, x_0 = x_0 + t(x - x_0) : t \in I$ est contenu dans A .

Tout sous-espace étoilé d'un espace vectoriel topologique est contractile.

Si A est un sous-espace étoilé en x_0 , $\begin{cases} I \cdot A \longrightarrow A \\ t, x \longmapsto x_0 + t(x - x_0) \end{cases}$ est une homotopie de $A \rightarrow x_0$ vers l'identité de A .

Corollaire 3.3.2

Tout espace topologique contractile est simplement connexe.

Soit X un espace topologique contractile. On a donc : $|1_X| = |X \rightarrow x_0|$
 Il est aisé de voir que : $\pi_1 1_X = 1_{\pi_1 X}$ et que : $\pi_1 (X \rightarrow x_0) = \pi_1 X \rightarrow \circ(x_0)$.
 D'après 3.2.3, il existe une application u de X vers $\pi_1 X$ telle que :

$\forall \langle \gamma \rangle \in \pi_1 X, \langle \gamma \rangle : x \longrightarrow y$
 $\langle \gamma \rangle = (u \ x)^{-1} \langle \alpha \rangle (u \ y) = (u \ x)^{-1} (u \ y)$
 L'application $(x, y) \longmapsto (u \ x)^{-1} (u \ y)$ est donc un isomorphisme du groupoïde banal $X \times X$ vers $\pi_1 X$.

3.4 Homotopies invariantes sur des sous-espaces

Définition

Soient X et Y deux espaces topologiques, A un sous-espace de X et f et g deux applications continues de X vers Y qui coïncident sur A . Une **homotopie invariante sur A** de f vers g est une homotopie Φ de f vers g telle que : $\forall t \in I, \Phi_t|_A = f|_A = g|_A$.
 Deux applications continues r et s de X vers Y seront dites **A -homotopes** si et seulement si :
 r et s coïncident sur A . Autrement dit : $r|_A = s|_A$.
 Il existe une homotopie invariante sur A de r vers s .

Les catégories Top_2 et Htop_2

Soit Top_2 la catégorie dont :
 - les objets sont les couples (X, A) d'espaces topologiques tels que A soit un sous-espace de X ;
 - les flèches de (X, A) vers (Y, B) sont les flèches f de Top de source X et de but Y telles que : $f(A) \subset B$.

Proposition 3.4.1

La relation \approx définie sur les flèches de Top_2 par :

$$r \approx s \iff \begin{cases} r \text{ et } s \text{ ont même source } (X, A) \text{ et même but } (Y, B) \\ r \text{ et } s \text{ sont } A\text{-homotopes} \end{cases}$$

est une relation d'équivalence.

C'est une conséquence immédiate de 3.1.2.

Notations

Si r est une flèche de Top_2 , on notera $|r|$ sa classe d'équivalence selon \approx . Dans la pratique courante, toutefois, une même application continue peut servir à désigner **plusieurs** flèches de Top_2 . Par exemple, soient f une application continue de X vers Y telle que : *
 $f(A) \subset B$ et $A' \subset A$. f est alors sous-jacente à au moins trois flèches distinctes de Top_2 , à savoir les flèches de (X, A) vers (Y, B) , de (X, A') vers (Y, B) et de (X, A) vers $(Y, f(A))$.



Il sera alors commode de désigner par $\cdot |f|_A$ la classe de la flèche de (X, A) vers (Y, B) et par $\cdot |f|_{A'}$ la classe de la flèche de (X, A') vers (Y, B) .

On a alors le pseudo-résultat suivant :

Résultat 3.4.2

Pour tout couple (f, g) d'applications continues de X vers Y et tout couple (A, A') de sous-espaces de X tel que : $A' \subset A$, on a : $\cdot |f|_A = \cdot |g|_A \implies \cdot |f|_{A'} = \cdot |g|_{A'}$.

Proposition 3.4.3

Soient $(X, A), (Y, B)$ et (Z, C) trois objets de Top_2 ,
 p et q deux flèches de Top_2 de (X, A) vers (Y, B) ,
 r et s deux flèches de Top_2 de (Y, B) vers (Z, C) .
 Alors : $|p|_2 = |q|_2$ et $|r|_2 = |s|_2 \implies |r \circ p|_2 = |s \circ q|_2$.

Tout d'abord, on a : $p|_A = q|_A$ et $r|_B = s|_B$;
 si bien que : $(r \circ p)|_A = r|_B \circ p|_A = s|_B \circ p|_A = (s \circ q)|_A$.

Soient δ une A -homotopie de p vers q et η une B -homotopie de r vers s . Comme dans 3.2.1, on définit alors $\phi : I \times X \longrightarrow Z$ par : $\phi(t, x) = \eta(t, \delta(t, x))$. ϕ est une homotopie de $r \circ p$ vers $s \circ q$.
 De plus : $\forall t \in I, \phi_t|_A = \eta_t \circ \delta_t|_A = \eta_t|_B \circ p|_A = r_t|_B \circ p|_A$.

Définition

La proposition précédente permet de définir la composée $|p|_2 \circ |r|_2$ des classes $|p|_2$ et $|r|_2$ comme la classe d'homotopie $|p \circ r|_2$.
 Il est facile de vérifier que cette loi de composition munit l'ensemble des classes d'une structure de catégorie que l'on notera Htop_2 .
 Il est aisé de montrer que la surjection canonique $||_2: \text{Top}_2 \longrightarrow |\text{Top}_2|$ de Top_2 sur $|\text{Top}_2|$ est un foncteur.
 Rappelons que les objets de Htop_2 sont les objets de Top_2 et que ses flèches sont les classes selon la relation \approx .

Les espaces topologiques munis d'une origine.

Soit Top_* la plus grande sous-catégorie de Top_2 dont les objets sont de la forme $(X, \{x\})$, $x \in X$.
 On appelle Top_* la **catégorie des espaces topologiques munis d'une origine**.
 Rappelons qu'une flèche $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ de cette catégorie n'est rien d'autre qu'une application continue de X vers Y telle que : $f(x) = y$.

Notation

On note Htop_* la sous-catégorie de Htop_2 image de Top_* par le foncteur $||_2$. On notera $||_*$ le foncteur de Top_* vers Htop_* induit par $||_2$.

Proposition 3.4.4

Soient f et g deux flèches de Top_* , de même source (X, x_0) et de même but (Y, y_0) . Alors $|\cdot|_*$ $f = |\cdot|_*$ $g \implies \pi_1(f) = \pi_1(g)$

Soit Φ l'homotopie invariante sur x_0 entre f et g . Pour tout lacet λ de X d'extrémité x_0 , il est facile de vérifier que l'application continue $\Lambda: \begin{cases} I & \longrightarrow & X \\ s, t & \longmapsto & \Phi_{s, \lambda t} \end{cases}$ met en relation les lacets $f \circ \lambda$ et $g \circ \lambda$.

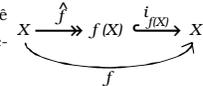
3.5 Contractions et rétractions

Définition : contraction

Soit X un espace topologique. On appellera **contraction de X** une application surjective et continue de X vers l'un de ses sous-espaces. Si A est un sous-espace de X , une contraction $f: X \longrightarrow A$ sera appelée **contraction de X en A** .

Remarque

Toute application continue f de X dans lui-même se factorise canoniquement par une contraction \hat{f} comme le montre la figure.



Dans la suite, on aura tendance à confondre f et la contraction \hat{f} .

Définition : contraction progressive

Soient X un espace topologique et A un sous-espace de X . On dira qu'une contraction f de X en A est **progressive** lorsque l'application de X dans lui-même $i_A \circ f$ est homotope à l'identité de X .

Proposition 3.5.1

Soient X un espace topologique et A un sous-espace de X . Les deux assertions suivantes sont équivalentes.
 (i) f est une contraction progressive de X en A .
 (ii) La classe $|f|$ est un inverse à droite de $|i_A|$ dans Htop .

La démonstration est immédiate.

Corollaire 3.5.2

Un espace X est contractile si et seulement s'il existe une contraction progressive de X en l'un de ses points.

Proposition 3.5.3

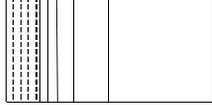
Un espace X est contractile si et seulement s'il existe une contraction progressive de X en un sous-espace contractile.

Un singleton étant contractile, la nécessité de la condition est évidente. Le seul intérêt de cette dernière se trouve dans sa suffisance.

Soient donc un sous-espace contractile A de X , l'inclusion i_A de A dans X et une application continue $f : X \rightarrow A$ telle que $i_A \circ f$ soit homotope à 1_X . D'où :

$$|1_X| = |i_A \circ f| = |i_A \circ 1_A \circ f| = |i_A \circ (A \rightarrow x) \circ f| = |i_x \circ X \rightarrow x|.$$

Exemple 3.5.4 : le peigne



Soit P le sous-espace de \mathbb{R}^2 défini par :

$$P = I \times \{0\} \cup \{0\} \times I \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times I \right) \right)$$

P est suggéré par la figure ci-contre.

Soit $p : \begin{cases} P & \longrightarrow I \times \{0\} \\ (x, y) & \longmapsto (x, 0) \end{cases}$. L'application

$\Delta : \begin{cases} I \times P & \longrightarrow P \\ (t, x, y) & \longmapsto (x, 1-ty) \end{cases}$ est une homotopie de l'identité de P vers p .

L'application p est donc une contraction progressive de P en $\{0\} \times I$. Ce dernier étant contractile, P l'est également d'après la proposition précédente.

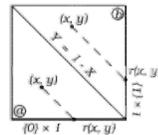
Définition : rétraction

Soit X un espace topologique. On appellera **rétraction de X** une con-contraction dont la restriction à son image est l'identité de celle-ci. Autrement dit : une contraction $f : X \rightarrow A$ est une rétraction si et seulement si $f \circ i_A = 1_A$, $i_A : A \hookrightarrow X$ étant l'inclusion canonique.

Exemples de rétractions

1) On définit l'application r du carré unité de \mathbb{R}^2 vers $\{ \{0\} \times I \cup I \times \{1\} \}$.

ⓐ Pour tout point (x, y) de $I \times I$, tel que $y \leq 1-x$, on définit $r(x, y)$ comme le point d'intersection de $\{ \{0\} \times I$ avec la droite de pente -1 qui



contient (x, y) . Autrement dit : $r(x, y) = (0, x+y)$.

ⓑ Pour tout point (x, y) de $I \times I$, tel que $y \geq 1-x$, on définit $r(x, y)$ comme le point d'intersection de $I \times \{1\}$ avec la droite de pente -1 qui contient (x, y) . Autrement dit : $r(x, y) = (x+y-1, 1)$.

Il est facile de vérifier que r , ainsi définie, est une rétraction de $I \times I$ vers $\{ \{0\} \times I \cup I \times \{1\} \}$.

- 2) Une application constante $(X \rightarrow x)$ d'un espace topologique X vers l'un de ses points est trivialement une rétraction.
- 3) Toute projection d'un espace vectoriel topologique est une rétraction.

Définition : rétraction progressive

Soient X un espace topologique et A un sous-espace de X . On dira qu'une rétraction f de X en A est **progressive** lorsque l'application de X dans lui-même $i_A \circ f$ est A -homotope à l'identité de X .

Proposition 3.5.4

Si E est une partie convexe d'un espace vectoriel topologique, toute rétraction définie sur E est progressive.

Soit $r : E \rightarrow A \subset E$ une rétraction. Pour tout point x de E et tout élément t de I , le vecteur $t r(x) + (1-t)x$ est contenu dans E .

L'application h définie sur $I \times E$ par : $h(t, x) = t r(x) + (1-t)x$ est donc une application continue de $I \times E$ vers E . Il est facile de vérifier que h est une A -homotopie de l'identité de X vers $i_A \circ f$.

Définition : espaces rétractiles

On dira qu'un espace topologique est **rétractile** s'il existe une rétraction progressive de X en l'un de ses points.

Remarque

Tout espace rétractile est contractile.

Les parties étoilées d'un espace vectoriel topologique, que l'on avait citées comme exemple d'espace contractile sont en fait, rétractiles.

Proposition 3.5.5

Un espace X est rétractile si et seulement s'il existe une rétraction progressive de X en un sous-espace rétractile.

Un singleton étant rétractile, la nécessité de la condition est évidente. Le seul intérêt de cette dernière se trouve dans sa suffisance.

Soient donc un sous-espace rétractile A de X , l'inclusion i_A de A dans X et une rétraction progressive $f : X \longrightarrow A$.

En utilisant 3.4.2 et 3.4.3, on a :

$$\begin{aligned} \cdot |1_X|_A &= \cdot |i_A \circ f|_A = \cdot |i_A \circ f \circ 1_A|_A \\ \implies \cdot |1_X|_X &= \cdot |i_A \circ 1_A \circ f|_X = \cdot |i_A \circ (A \rightarrow X) \circ f|_X = \cdot |(X \rightarrow X)|_X \end{aligned}$$

Proposition 3.5.6

Si f est une rétraction progressive de X en A et si g est une rétraction progressive de A en B , alors $g \circ f$ sera une rétraction progressive de X en B .

Il est facile de vérifier que $g \circ f$ est une rétraction.

Soient Φ l'homotopie invariante sur A entre 1_X et $i_A \circ f$ et Ξ l'homotopie invariante sur B entre 1_A et $i_B \circ g$.

Il est facile de vérifier que l'application Ψ définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \quad \Psi(t, x) &= \Phi(2t, x) \\ \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \quad \Psi(t, x) &= \Xi(2t-1, f(x)) \end{aligned}$$

est une homotopie invariante sur B entre 1_X et $i_B \circ g \circ f$.

Proposition 3.5.7

Si f est une rétraction de X en A , alors, pour tout point x de A , $\pi_1(f, x)$ est un morphisme surjectif de groupes.

Si f est une rétraction progressive de X en A , alors, pour tout point x de A , $\pi_1(f, x)$ est un isomorphisme de groupes entre $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(A, x)$.

Soit donc x un point de A . Convenons que tous les lacets que nous considérerons auront x pour extrémité et que nous noterons respectivement $\pi_1(X)$, $\pi_1(A)$, et $\pi_1(g)$, pour $\pi_1(X, x)$, $\pi_1(A, x)$, et $\pi_1(g, x)$.

Tout d'abord, si f est une rétraction, pour tout lacet λ de A , on a : $f \circ \lambda = \lambda$ ce qui entraîne que $\pi_1(f)$ est surjectif.

Si f est une rétraction progressive de X en A , soit Φ l'homotopie invariante sur A entre $i_A \circ f$ et 1_X . Soit un élément $\langle \lambda \rangle_X$ de $\pi_1(X)$ tel que : $\langle \circ \rangle_A = \pi_1(f) \cdot \langle \lambda \rangle_X := \langle f \circ \lambda \rangle_A$. Il est facile de vérifier que

l'application continue $\Lambda : \begin{cases} I & \xrightarrow{I} & X \\ s, t & \longmapsto & \Phi(s, \lambda t) \end{cases}$ met en relation les lacets $i_A \circ f \circ \lambda$ et λ .

D'où : $\langle \lambda \rangle_X = \langle i_A \circ f \circ \lambda \rangle_X = \pi_1(i_A) \cdot \langle f \circ \lambda \rangle_A = \pi_1(i_A) \cdot \langle \circ \rangle_A = \langle \circ \rangle_X$

Exemple 3.5.8

Il n'existe aucune rétraction du disque unité D^1 en sa frontière S^1 .

L'existence d'une telle rétraction entrainerait, d'après la proposition précédente, l'existence d'un morphisme surjectif de groupes de 0 sur \mathbb{Z} .

Corollaire 3.5.9

Toute application continue du disque unité D^1 vers lui-même admet au moins un point fixe.

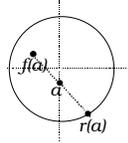
Rappelons qu'un point a_0 de D^1 est un point fixe d'une application f de D^1 vers lui-même dès que : $f(a_0) = a_0$.

On va montrer que l'existence d'une application continue de D^1 vers lui-même sans aucun point fixe entraîne l'existence d'une rétraction de D^1

en sa frontière S^1 . Ceci établi, la conclusion sera une conséquence immédiate de 3,5,6.

Soit donc f une application continue de D^1 vers lui-même sans aucun point fixe.

Soit a un point de D^1 . Par hypothèse, le vecteur $\overrightarrow{af(a)}$ n'est pas nul. Il existe donc un unique réel négatif ζ tel que l'extrémité du vecteur $\zeta \overrightarrow{af(a)}$ appartienne à S^1 . Notons cette extrémité $r(a)$.



Calculons ζ en fonction de a :

$$\text{Par hypothèse, } 1 = \|\overrightarrow{Or(a)}\|^2 = \|\overrightarrow{Oa} - \zeta \overrightarrow{af(a)}\|^2$$

$$\text{ce qui donne : } \|\overrightarrow{af(a)}\|^2 \zeta^2 + 2\zeta \overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)} + \|\overrightarrow{Oa}\|^2 - 1 = 0$$

Le discriminant est égal à :

$$\left(\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)} \right)^2 - \|\overrightarrow{Oa}\|^2 \|\overrightarrow{af(a)}\|^2 + \|\overrightarrow{af(a)}\|^2$$

$$\text{ou encore à : } \|\overrightarrow{af(a)}\|^2 \left(1 - \|\overrightarrow{Oa}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \right),$$

cette dernière expression étant visiblement positive.

D'où les deux valeurs suivantes de ζ :

$$\zeta = \frac{\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)} \pm \sqrt{\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)}^2 - \|\overrightarrow{Oa}\|^2 \|\overrightarrow{af(a)}\|^2}}{\|\overrightarrow{af(a)}\|^2}$$

Examinons le signe de cette expression :

$$\left(\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)} \right)^2 + \|\overrightarrow{af(a)}\|^2 \left(1 - \|\overrightarrow{Oa}\|^2 \right) \geq \left(\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)} \right)^2$$

$$\implies \sqrt{\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)}^2 - \|\overrightarrow{Oa}\|^2 \|\overrightarrow{af(a)}\|^2} \|\overrightarrow{af(a)}\|^2 \geq \left| \overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)} \right|$$

$$\implies \overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)} \sqrt{\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)}^2 - \|\overrightarrow{Oa}\|^2 \|\overrightarrow{af(a)}\|^2} \|\overrightarrow{af(a)}\|^2 \geq 0$$

Puisque $\|\overrightarrow{Oa}\|^2 - 1$ est négatif ou nul, lorsque les deux valeurs de ζ sont toutes deux non nulles, elles sont de signes opposés. La valeur négative de ζ que nous recherchons doit donc s'écrire :

$$\zeta = \frac{\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)} \pm \sqrt{\overrightarrow{Oa} \cdot \overrightarrow{af(a)}^2 - \|\overrightarrow{Oa}\|^2 \|\overrightarrow{af(a)}\|^2}}{\|\overrightarrow{af(a)}\|^2}$$

Comme, par hypothèse, $\|\overrightarrow{af(a)}\|^2$ n'est jamais nul, il est facile de vérifier que l'application $a \longmapsto \zeta$ est continue. Il en est de même de l'application $r : a \longmapsto r(a)$.

D'autre part, en revenant à la définition géométrique de $r(a)$, on voit que, lorsque a appartient à S^1 , on a : $r(a) = a$.

L'application r est donc une rétraction de D^1 en S^1 .

4 Les limites de la théorie de Poincaré

On a vu au 3.3.2 que tout espace topologique contractile est simplement connexe. Ce chapitre a pour but de montrer que la réciproque est fautive. Pour cela, on donnera l'exemple le plus simple d'espace topologique simplement connexe mais non contractile : la sphère S^2 .

Puis, à l'aide des notions introduites lors de l'étude de cet exemple, nous évoquerons les théories de l'homotopie de dimension supérieure à 1.

4.1 Exemple : Le cercle S^1 n'est pas contractile

Ce résultat est une conséquence immédiate de 3.3.2 et de GF 24.

Dans cette section on en donne une autre démonstration. Cette dernière présente l'avantage de pouvoir se généraliser aux sphères S^n .

On traitera le cas de la sphère S^2 dans la section suivante.

Cette démonstration utilise quelques notions associées à une application continue du cercle dans lui-même telles les subdivisions du cercle subordonnées à cette application ou encore le degré de celle-ci.

Dans la suite de cette section, f désignera une application continue du cercle dans lui-même.

Définition

On appellera **subdivision** de S^1 subordonnée à f de cardinal n une suite finie $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1\}$ de points de S^1 tels que,
 - $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sont distincts.
 - $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1\}$ sont ordonnés dans le sens direct.
 - pour chaque indice i , la longueur de l'arc $f([a_i, a_{i+1}])$ est inférieure à 1.

Remarque

L'existence de telles subdivisions est garantie par la continuité de f et la compacité de S^1 .

Définition

Etant donnée une telle subdivision \mathfrak{a} de cardinal n , notons, pour chaque indice i , A_i l'arc de cercle de début $f(a_i)$ et de fin $f(a_{i+1})$ contenu dans l'arc $f([a_i, a_{i+1}])$. Remarquons au passage que la subordination de \mathfrak{a} à f entraîne que l'arc $f([a_i, a_{i+1}])$ est assez petit pour ôter toute ambigüité à la définition de A_i . Gardons à l'esprit que A_i peut très bien être plus petit que $f([a_i, a_{i+1}])$.

On dira que A_i est **nul** s'il est réduit à un seul point, autrement dit si $f(a_i) = f(a_{i+1})$.

Lorsqu'il n'est pas nul, on dira que A_i est **positif** s'il est dans le même sens que $[a_i, a_{i+1}]$ et qu'il est **négatif** sinon.

La suite $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sera appelée **l'image réduite orientée de \mathfrak{a}** par f ou, en abrégé, la **firo** de \mathfrak{a} .

Définition

Soient $\mathfrak{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1\}$ une subdivision de S^1 subordonnée à f et z un point de $S^1 \setminus \{f(a_i)\}_{1 \leq i \leq n}$

Notons $\text{pos}(f, \mathfrak{a}, z)$ le nombre d'arcs A_i positifs qui contiennent z et $\text{neg}(f, \mathfrak{a}, z)$ le nombre d'arcs A_i négatifs qui contiennent z .

Notons : $\text{deg}(f, \mathfrak{a}, z) := \text{pos}(f, \mathfrak{a}, z) - \text{neg}(f, \mathfrak{a}, z)$.

Indépendance du degré

Soient f, \mathfrak{a} et z comme ci-dessus. L'entier $\text{deg}(f, \mathfrak{a}, z)$ ne dépend ni de \mathfrak{a} ni de z .

Notation

Dans la suite, « $x \rightarrow y \rightarrow z$ » signifiera « les points x, y et z de S^1 sont ainsi ordonnés dans le sens direct ».

Lemme 4.1.1

Soient f, \tilde{a} et z comme ci-dessus. Soit σ une permutation circulaire de $\{1, \dots, n\}$. Notons $\tilde{a}\sigma := \{a_{\sigma 1}, a_{\sigma 2}, \dots, a_{\sigma n}\}$. Alors $\tilde{a}\sigma$ est subordonnée à f et $\deg(f, \tilde{a}, z) = \deg(f, \tilde{a}\sigma, z)$.

Les f -iro de \tilde{a} et de $\tilde{a}\sigma$ sont identiques, d'où la conclusion.

Lemme 4.1.2

Soient f, \tilde{a} et z comme ci-dessus. Soit b un point de $S^1 \setminus f^{-1}(z)$ et ne figurant pas dans \tilde{a} . Notons \tilde{b} la subdivision de cardinal $n+1$ obtenue en rajoutant b à \tilde{a} . Alors : $\deg(f, \tilde{a}, z) = \deg(f, \tilde{b}, z)$

La subdivision \tilde{a} comporte évidemment un unique arc qui contient b ; on le notera $[a_k, a_{k+1}]$. Ceci étant posé il est facile de vérifier que la subdivision $\tilde{b} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, b, a_{k+1}, \dots, a_n, a_{n+1} = a_1\}$ est subordonnée à f .

Soient respectivement $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(B_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ les f -iro de \tilde{a} et de \tilde{b} . Il est facile de vérifier que :

- $1 \leq i \leq k-1, B_i = A_i$;
- B_k est l'arc de cercle de début $f(a_k)$ et de fin $f(b)$ contenu dans l'arc $f([a_k, b])$.
- B_{k+1} est l'arc de cercle de début $f(b)$ et de fin $f(a_{k+1})$ contenu dans l'arc $f([b, a_{k+1}])$;
- $k+2 \leq i \leq n+1, B_i = A_{i-1}$;

En dehors des trois arcs A_k, B_k et B_{k+1} les f -iro de \tilde{a} et de \tilde{b} coïncident. La seule différence possible entre $\deg(f, \tilde{a}, z)$ et $\deg(f, \tilde{b}, z)$ provient donc de l'appartenance de z à un ou plusieurs de ces trois arcs et du signe de ces derniers. Il nous faut donc examiner patiemment tous les cas possibles.

Cas 1 : le point z n'appartient pas à A_k .

1;1 $z \in B_k \implies z \in B_{k+1}$ et, de plus, B_k et B_{k+1} sont de signes opposés.

a) A_k n'est pas nul.

Puisque B_k contient z , il en est de même de l'arc $f([a_k, a_{k+1}])$, qui n'est donc pas réduit au point $f(a_k)$. Si A_k était nul, $f([a_k, a_{k+1}])$ serait donc égal à S^1 ce qui est faux puisque, par hypothèse, sa longueur est inférieure à 1.

b) Supposons que A_k soit positif et que B_k soit positif.

$$A_k \text{ positif et } z \notin A_k \implies f(a_k) \rightarrow f(a_{k+1}) \rightarrow z$$

$$\text{ou } z \rightarrow f(a_k) \rightarrow f(a_{k+1})$$

$$B_k \text{ positif et } z \in B_k \implies f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(b)$$

D'où : $f(a_k) \rightarrow f(a_{k+1}) \rightarrow z \rightarrow f(b)$
ce qui entraîne que B_{k+1} est négatif et que $z \in B_{k+1}$.

c) Supposons que A_k soit positif et que B_k soit négatif.

On a alors : $f(b) \rightarrow z \rightarrow f(a_k) \rightarrow f(a_{k+1})$
ce qui entraîne que B_{k+1} est positif et que $z \in B_{k+1}$.

d) Supposons que A_k soit négatif et que B_k soit positif.

$$\text{On a alors : } f(a_{k+1}) \rightarrow f(a_k) \rightarrow z$$

$$\text{ou } z \rightarrow f(a_{k+1}) \rightarrow f(a_k)$$

et donc : $f(a_{k+1}) \rightarrow f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(b)$;
ce qui entraîne que B_{k+1} est négatif et que $z \in B_{k+1}$.

e) Supposons que A_k soit négatif et que B_k soit négatif.
 On a alors : $f(b) \rightarrow z \rightarrow f(a_{k+1}) \rightarrow f(a_k)$
 ce qui entraîne que B_{k+1} est positif et que $z \in B_{k+1}$.
 1.2 $z \in B_{k+1} \implies z \in B_k$ et, de plus, B_k et B_{k+1} sont de signes opposés.

a) A_k n'est pas nul. (Même raisonnement qu'au 1.1 a)
 b) Supposons que A_k soit positif et que B_{k+1} soit positif.
 On a alors : $f(a_k) \rightarrow f(a_{k+1}) \rightarrow z$
 ou $z \rightarrow f(a_k) \rightarrow f(a_{k+1})$
 donc : $f(b) \rightarrow z \rightarrow f(a_k) \rightarrow f(a_{k+1})$
 ce qui entraîne que B_k est négatif et que $z \in B_k$.
 c) Supposons que A_k soit positif et que B_{k+1} soit négatif.
 D'où : $f(a_k) \rightarrow f(a_{k+1}) \rightarrow z \rightarrow f(b)$;
 ce qui entraîne que B_k est positif et que $z \in B_k$.
 d) Supposons que A_k soit négatif et que B_{k+1} soit positif.
 On a alors : $f(a_{k+1}) \rightarrow f(a_k) \rightarrow z$
 ou $z \rightarrow f(a_{k+1}) \rightarrow f(a_k)$
 et donc : $f(b) \rightarrow z \rightarrow f(a_{k+1}) \rightarrow f(a_k)$.
 ce qui entraîne que B_k est négatif et que $z \in B_k$.
 e) Supposons que A_k soit négatif et que B_{k+1} soit négatif.
 d'où : $f(a_{k+1}) \rightarrow f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(b)$;
 ce qui entraîne que B_k est positif et que $z \in B_k$.

On peut résumer ce premier cas ainsi :

Lorsque le point z n'appartient pas à A_k , s'il appartient à l'un des deux arcs B_k et B_{k+1} alors il appartient à l'autre et ces deux arcs sont de signes opposés.

Dans ce cas, ou bien le point z n'appartient à aucun des deux arcs B_k

et B_{k+1} et alors : $\text{pos}(f, \dot{a}, z) = \text{pos}(f, \dot{b}, z)$
 et $\text{neg}(f, \dot{a}, z) = \text{neg}(f, \dot{b}, z)$;

ou bien le point z appartient à chacun des deux arcs B_k et B_{k+1} et :

$\text{pos}(f, \dot{b}, z) = \text{pos}(f, \dot{a}, z) + 1$ et $\text{neg}(f, \dot{b}, z) = \text{neg}(f, \dot{a}, z) + 1$.

On en conclut que lorsque le point z n'appartient pas à A_k , on a bien :

$\text{deg}(f, \dot{a}, z) = \text{deg}(f, \dot{b}, z)$.

Cas 2 : le point z appartient à A_k .

2;1 $z \in B_k \implies z \notin B_{k+1}$ et, de plus, A_k et B_k sont de même signe.

a) Supposons que A_k soit positif.

Alors : $f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(a_{k+1})$ et $f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(b)$
 ou $f(b) \rightarrow z \rightarrow f(a_k)$

d'où : $f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(b) \rightarrow f(a_{k+1})$

La subdivision \dot{a} étant subordonnée à f , l'arc A_k ne peut pas contenir S^1 tout entier. Par suite : $z \notin B_{k+1}$.

b) Supposons que A_k soit négatif.

Alors : $f(a_{k+1}) \rightarrow z \rightarrow f(a_k)$ et $f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(b)$
 ou $f(b) \rightarrow z \rightarrow f(a_k)$

d'où : $f(a_{k+1}) \rightarrow f(b) \rightarrow z \rightarrow f(a_k)$

La subdivision \dot{a} étant subordonnée à f , $z \notin B_{k+1}$.

2;2 $z \notin B_k \implies z \in B_{k+1}$ et, de plus, A_k et B_{k+1} sont de même signe.

a) Supposons que A_k soit positif.

$$\text{Alors : } f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(a_{k+1}) \text{ et } f(a_k) \rightarrow f(b) \rightarrow z$$

$$\text{ou } f(b) \rightarrow f(a_k) \rightarrow z$$

$$\text{d'où : } f(a_k) \rightarrow f(b) \rightarrow z \rightarrow f(a_{k+1})$$

$$\text{ou : } f(b) \rightarrow f(a_k) \rightarrow z \rightarrow f(a_{k+1})$$

Dans les deux cas, $z \in B_{k+1}$ et B_{k+1} est positif.

b) Supposons que A_k soit négatif.

$$\text{Alors : } f(a_{k+1}) \rightarrow z \rightarrow f(a_k) \text{ et } z \rightarrow f(a_k) \rightarrow f(b)$$

$$\text{ou } z \rightarrow f(b) \rightarrow f(a_k)$$

$$\text{d'où : } f(a_{k+1}) \rightarrow z \rightarrow f(a_k) \rightarrow f(b)$$

$$\text{ou : } f(a_{k+1}) \rightarrow z \rightarrow f(b) \rightarrow f(a_k)$$

Dans les deux cas, $z \in B_{k+1}$ et B_{k+1} est négatif.

On peut résumer ce second cas ainsi :

Lorsque le point z appartient à A_k , il appartient à l'un des deux arcs B_k et B_{k+1} si et seulement s'il n'appartient pas à l'autre et l'arc auquel il appartient est du même signe que A_k .

Il est facile de vérifier que, dans ce cas, $\deg(f, \hat{a}, z) = \deg(f, \hat{b}, z)$.

Lemme 4.1.3

Soient f et \hat{a} comme ci-dessus. Soient z_1 et z_2 deux points distincts de $S^1 \setminus (f(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

- $z_1 \rightarrow z_2$;
- l'arc $[z_1, z_2]$ ne contient aucun point de $(f(a_i))_{1 \leq i \leq n}$

Alors : $\deg(f, \hat{a}, z_1) = \deg(f, \hat{a}, z_2)$

Si un membre A_i de la f -iro de \hat{a} contenait un seul des deux points z_1 et z_2 , alors l'arc $[z_1, z_2]$ contiendrait l'une des extrémités $f(a_i)$ ou $f(a_{i+1})$ de A_i . Compte tenu de l'hypothèse, pour tout membre A_i de la f -iro de \hat{a} , on a l'équivalence : $z_1 \in A_i \iff z_2 \in A_i$. D'où le résultat.

Lemme 4.1.4

Soient f et \hat{a} comme ci-dessus. Soient z_1 et z_2 deux points distincts de $S^1 \setminus (f(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ tels que l'arc $[z_1, z_2]$ contienne un unique point y de $(f(a_i))_{1 \leq i \leq n}$

Alors : $\deg(f, \hat{a}, z_1) = \deg(f, \hat{a}, z_2)$

Soient $k(1), k(2), \dots, k(p)$ les indices tels que : $\forall j, 1 \leq j \leq p, f(a_{k(j)}) = y$

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ la f -iro de \hat{a} . Si pour tout indice $i, f(a_i) = y$, alors tous les A_i sont nuls et : $\deg(f, \hat{a}, z_1) = \deg(f, \hat{a}, z_2) = 0$

Si, pour un indice $j, A_{k(j)}$ est nul, alors : $k(j+1) = k(j) + 1$.

On en déduit que si, pour tout indice $j, A_{k(j)}$ est nul, alors pour tout indice i, A_i est nul, et donc : $\deg(f, \hat{a}, z_1) = \deg(f, \hat{a}, z_2) = 0$

On supposera dorénavant qu'il existe un terme a_i de \hat{a} tel que : $f(a_i) \neq y$. Pour des raisons techniques, on suppose même, quitte à appliquer une permutation circulaire (cf 4.1.1), que : $f(a_1) \neq y$.

On montre comme dans le lemme précédent que pour les indices i distincts de $k(j) - 1$ et de $k(j)$, on a l'équivalence $z_1 \in A_i \iff z_2 \in A_i$

En tenant compte des $A_{k(j)}$ nuls, on se retrouve avec des couples d'arcs $(A_{k(t)-1}, A_{k(t+s)})$ **non nuls** et **bout-à-bout** c'est à dire que tous les arcs intermédiaires $A_{k(t+i)} \quad 1 \leq t \leq s-1$, sont tous nuls.

On va montrer que les calculs de $\deg(f, \hat{a}, z_1)$ et de $\deg(f, \hat{a}, z_2)$ restreints à un tel couple d'arcs donnent le même résultat.

Notons, pour alléger, $b := f(a_{k(r)-1})$, $y := f(a_k)$,
 $d := f(a_{k(r+s)+1})$, $B := A_{k(r)-1}$, $C := A_{k(r+s)}$, $u := z_1$, $v := z_2$.
 Notre hypothèse se note alors : $u \rightarrow y \rightarrow v$.
 On notera respectivement δ_u et δ_v les restrictions des calculs de
 $\deg(f, \tilde{a}, z_1)$ et de $\deg(f, \tilde{a}, z_2)$ aux arcs B et C .

On va examiner successivement les quatre cas possibles.

- a) B et C sont positifs : $b \rightarrow y \rightarrow d$.
 Puisque, par hypothèse, l'arc $[u, v]$ ne contient ni b ni d , on a nécessairement : $b \rightarrow u \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow d$.
 Si bien que $\delta_u = \delta_v = 1$.
- b) B et C sont négatifs : $d \rightarrow y \rightarrow b$.
 Puisque, par hypothèse, l'arc $[u, v]$ ne contient ni b ni d , on a nécessairement : $d \rightarrow u \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow b$.
 Si bien que $\delta_u = \delta_v = -1$.
- c) B est positif et C est négatif : $b \rightarrow d \rightarrow y$ ou $d \rightarrow b \rightarrow y$.
 Puisque, par hypothèse, l'arc $[u, v]$ ne contient ni b ni d , on a nécessairement : $d \rightarrow b \rightarrow u \rightarrow y \rightarrow v$ ou $b \rightarrow d \rightarrow u \rightarrow y \rightarrow v$.
 Si bien que $\delta_u = \delta_v = 0$.
- d) B est négatif et C est positif : $y \rightarrow b \rightarrow d$ ou $y \rightarrow d \rightarrow b$.
 Puisque, par hypothèse, l'arc $[u, v]$ ne contient ni b ni d , on a nécessairement : $u \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow d \rightarrow b$ ou $u \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow b \rightarrow d$.
 Si bien que $\delta_u = \delta_v = 0$.

On en déduit le résultat.

Proposition 4.1.5

Soient f une application continue de S^1 vers S^1 , z un point de S^1 et \tilde{a} et \tilde{b} deux subdivisions de S^1 subordonnées à f qui permettent de calculer $\deg(f, \tilde{a}, z)$ et $\deg(f, \tilde{b}, z)$.
 Alors $\deg(f, \tilde{a}, z) = \deg(f, \tilde{b}, z)$

Notons \tilde{c} la subdivision de S^1 obtenue en réunissant et en ordonnant les termes de \tilde{a} et de \tilde{b} . Remarquons qu'il peut très bien exister des termes de \tilde{c} qui figurent à la fois dans \tilde{a} et dans \tilde{b} .

Montrons que : $\deg(f, \tilde{a}, z) = \deg(f, \tilde{c}, z)$.

Soit n le nombre de termes de \tilde{c} qui ne figurent pas dans \tilde{a} .

Soient $\tilde{a}_0 := \tilde{a}$, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n := \tilde{c}$ $n+1$ subdivisions de S^1 obtenues par récurrence en construisant \tilde{a}_{i+1} en rajoutant à \tilde{a}_i un des termes de \tilde{c} qui n'y figurait pas.

D'après 4.1.2 on a : $\deg(f, \tilde{a}_{i+1}, z) = \deg(f, \tilde{a}_i, z)$; $0 \leq i \leq n-1$.

D'où : $\deg(f, \tilde{a}, z) = \deg(f, \tilde{c}, z)$.

On montre de la même façon que ; $\deg(f, \tilde{b}, z) = \deg(f, \tilde{c}, z)$.

D'où le résultat.

Proposition 4.1.6

Soient f une application continue de S^1 vers S^1 , z_1 et z_2 des points distincts de S^1 et $\tilde{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ une subdivision de S^1 subordonnée à f qui permet de calculer $\deg(f, \tilde{a}, z_1)$ et $\deg(f, \tilde{a}, z_2)$.
 Alors : $\deg(f, \tilde{a}, z_1) = \deg(f, \tilde{a}, z_2)$.

Soient $(f(a_{k_0}))_{1 \leq i \leq p}$ les points de $(f(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ contenus dans l'arc $[z_1, z_2]$. On les suppose réordonnés de telle sorte que :

$z_1 \rightarrow f(a_{k1}) \rightarrow f(a_{k2}) \rightarrow \dots \rightarrow f(a_{kp}) \rightarrow z_2$
 Si $p \leq 1$, on n'a qu'à appliquer 4.1.3 ou 4.1.4 pour obtenir le résultat.
 Si $p \geq 2$, soit la suite $(y_i)_{0 \leq i \leq p}$ définie par :
 - $y_0 := z_1 ; y_p := z_2$.
 - Pour un indice $i \ 1 \leq i \leq p-1$, y_i est un point arbitrairement choisi de l'arc $[f(a_{ki}), f(a_{k(i+1)})]$.
 Le lemme 4.1.4 s'applique à chacun des couples (y_i, y_{i+1}) , $0 \leq i \leq p$, si bien que l'on a : $\forall i, \ 0 \leq i \leq p, \ \text{deg}(f, \hat{a}, y_i) = \text{deg}(f, \hat{a}, y_{i+1})$.
 Et, de proche en proche, on obtient le résultat.

Définition
 D'après les deux précédentes propositions, on peut définir l'application $\text{deg} : \text{Top}(S^1, S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ en posant : $\text{deg} f := \text{deg}(f, \hat{a}, z)$, où l'on peut choisir arbitrairement \hat{a} et z pourvu que $\text{deg}(f, \hat{a}, z)$ soit défini.

Lemme 4.1.7

Notons $\text{Top}_{\text{kw}}(S^1, S^1)$ l'espace topologique que l'on obtient en munissant $\text{Top}(S^1, S^1)$ de la topologie compacte ouverte.
 L'application $f \longmapsto \text{deg} f$ induit une application localement constante de $\text{Top}_{\text{kw}}(S^1, S^1)$ vers \mathbb{Z} .

Soit f un point de $\text{Top}_{\text{kw}}(S^1, S^1)$. Soient $\hat{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et z tels que $\text{deg}(f, \hat{a}, z)$ soit défini. On va construire un voisinage ouvert U de f dans $\text{Top}_{\text{kw}}(S^1, S^1)$ tel que \hat{a} soit subordonnée à chacun de ses points. Puis on construira un voisinage ouvert W de f dans U tel que l'image réduite orientée de \hat{a} par chacun de ses points soit assez voisine de la f -iro de \hat{a} pour donner la même valeur lors du calcul du degré.

a) Construction de U .
 La subdivision \hat{a} étant subordonnée à f , il existe, pour chaque indice i , un arc ouvert O_i de longueur inférieure à 1 et qui contient l'arc $f([a_i, a_{i+1}])$.
 Soient $U_i := \langle [a_i, a_{i+1}], O_i \rangle$ et $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$.
 Il est facile de vérifier que la subdivision \hat{a} est subordonnée à chacun des points de U .
 b) Construction de V .
 Soit un réel ε strictement positif et strictement inférieur à toutes les longueurs des arcs $[f(a_i), z], 1 \leq i \leq n$.
 Notons $]f(a_i) - \varepsilon, f(a_i) + \varepsilon[$ l'arc ouvert centré en $f(a_i)$ et de longueur 2ε .
 Soient $V_i := \langle \{a_i\},]f(a_i) + \varepsilon, f(a_i) - \varepsilon[\rangle$, $V := \bigcap_{i=1}^n V_i$ et $V := U \cap V$.
 c) Pour tout point g de V , $\text{deg}(g, \hat{a}, z) = \text{deg}(f, \hat{a}, z)$.
 Soit g un point de V . Puisque g appartient à U , \hat{a} est subordonnée à g et $\text{deg}(g, \hat{a}, z)$ est défini.
 Soient A_i un terme de la f -iro de \hat{a} et B_i le terme correspondant de la g -iro de \hat{a} . Posons : $a := f(a_i) ; b := f(a_{i+1}) ; c := g(a_i) ; d := g(a_{i+1})$.
 Si A_i contient z , alors B_i est du même signe que A_i et contient z .
 Supposons que A_i soit positif. Par définition de ε , on a :
 $a - \varepsilon \rightarrow a \rightarrow a + \varepsilon \rightarrow z \rightarrow b - \varepsilon \rightarrow b \rightarrow b + \varepsilon$.
 Puisque g appartient à V , on a :
 $a - \varepsilon \rightarrow c \rightarrow a + \varepsilon \rightarrow z \rightarrow b - \varepsilon \rightarrow d \rightarrow b + \varepsilon$
 B_i est donc positif et contient z .
 Si A_i est négatif, en permutant a et b d'une part, et c et d d'autre part, on montre de façon analogue que B_i est négatif et contient z .

Si A_i est nul, B_i ne contient pas z .

On a par définition de ε : $z \rightarrow a - \varepsilon \rightarrow a \rightarrow a + \varepsilon$
 ou $a - \varepsilon \rightarrow a \rightarrow a + \varepsilon \rightarrow z$

Puisque g appartient à V , on n'a que les quatre possibilités suivantes

$z \rightarrow a - \varepsilon \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a + \varepsilon$ $a - \varepsilon \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a + \varepsilon \rightarrow z$
 $z \rightarrow a - \varepsilon \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow a + \varepsilon$ $a - \varepsilon \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow a + \varepsilon \rightarrow z$

On voit que dans tous les cas, B_i ne contient pas z .

Si A_i est positif et ne contient pas z .

Si z n'appartient pas à O_i alors, puisque g appartient à U , z n'appartient pas à B_i . Reste à examiner le cas où z appartient à O_i .

On a par définition de ε : $z \rightarrow a - \varepsilon \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow b + \varepsilon$
 ou $a - \varepsilon \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow b + \varepsilon \rightarrow z$

Si B_i est positif, alors $z \rightarrow a - \varepsilon \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b + \varepsilon$
 ou $a - \varepsilon \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b + \varepsilon \rightarrow z$

Si B_i est négatif, il est facile de vérifier que : $a - \varepsilon \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b + \varepsilon$

si bien que l'on a : $z \rightarrow a - \varepsilon \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b + \varepsilon$
 ou $a - \varepsilon \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b + \varepsilon \rightarrow z$

On voit que dans tous les cas, B_i ne contient pas z .

On déduit aisément de ce qui précède que : $\deg(g, \tilde{a}, z) = \deg(f, \tilde{a}, z)$.

Proposition 4.1.8

Si deux applications continues de S^1 dans S^1 sont homotopes, elles ont le même degré.

D'après 3.6.2, une homotopie entre deux éléments f et g de $\text{Top}(X, Y)$ n'est autre qu'un chemin de $\text{Top}_{\text{kev}}(S^1, S^1)$ de début f et de fin g .

L'application « deg » étant localement constante, le résultat est immédiat.

Corollaire

S^1 n'est pas contractile.

Si S^1 était contractile, l'identité 1_{S^1} serait homotope à une certaine application constante $S^1 \rightarrow x_0$. D'après la proposition précédente, ces deux applications devraient avoir le même degré. Or il est facile de vérifier que $\deg(1_{S^1}) = 1$ et que $\deg(S^1 \rightarrow x_0) = 0$.

4.2 La sphère S^2 n'est pas contractile.

A la différence du cercle, la sphère est simplement connexe (1.20). On va montrer qu'elle n'est pourtant pas contractile.

Commençons par définir les objets qui joueront le rôle que tenaient les arcs dans la section précédente.

Définitions simplexes formels

Considérons un élément (x_0, x_1, x_2) de $(S^2)^3$. Soit $\det(x_0, x_1, x_2)$ le déterminant de la matrice formée des coordonnées des trois points x_0, x_1 et x_2 rangés dans cet ordre.

Autrement dit : $\det(x_0, x_1, x_2) := \det(\overline{Ox_0}, \overline{Ox_1}, \overline{Ox_2})$,

Lorsque l'on applique à (x_0, x_1, x_2) une permutation de signature positive comme, par exemple, $(x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_0)$, cela ne change pas son déterminant.

On définit l'ensemble des **2-simplexes formels** de S^2 comme le quotient de $(S^2)^3$ par l'action du groupe σ_3^+ des permutations de signature positive.

Etant donné un 2-simplexe formel $\tilde{a} = (x_0, x_1, x_2)$ de S^2 , on pose $\det \tilde{a} := \det(x_0, x_1, x_2)$.

On dira que \tilde{a} est **dégénéré** si $\det \tilde{a} = 0$.

On dira que \tilde{a} est **positif** s'il n'est pas dégénéré et si $\det \tilde{a} > 0$.

On dira que \tilde{a} est **négatif** s'il n'est pas dégénéré et si $\det \tilde{a} < 0$.

Définition opposé d'un 2-simplexe

Si $\tilde{a} = (x_0, x_1, x_2)$ est un 2-simplexe formel de S^2 , on définit \tilde{a} en posant : $\tilde{a} := (x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})$ où σ est un élément de

signature négative du groupe des permutations σ_3 .
 Il est facile de vérifier que le signe de l'opposé d'un 2-simplexe formel est l'opposé du signe de ce dernier.
 Parmi ces 2-simplexes formels, il en existe certains qui sont « assez petits » pour délimiter un triangle sphérique.

Définition : 2-simplexes concrets

Soit $\hat{a} = (x_0, x_1, x_2)$ un 2-simplexe formel de S^2 .
 On notera $[\hat{a}]$ l'enveloppe convexe de $\{x_0, x_1, x_2\}$, c'est à dire le plus petit des convexes de \mathbb{R}^3 qui contiennent ces trois points.
 Lorsque \hat{a} est non dégénéré, $[\hat{a}]$ n'est autre que le triangle de sommets x_0, x_1 et x_2 .
 Lorsque le diamètre de $[\hat{a}]$ est trop petit pour qu'il contienne l'origine, c'est à dire lorsque $[\hat{a}]$ est contenu dans une demi boule ouverte de la boule unité, on peut projeter $[\hat{a}]$ sur S^2 à partir de l'origine.
 On note alors (\hat{a}) l'image de $[\hat{a}]$ par cette projection.
 Lorsque \hat{a} est non dégénéré, (\hat{a}) n'est autre que le triangle sphérique sous-tendu par $[\hat{a}]$.
 Lorsque \hat{a} est défini, on dit que \hat{a} est un **2-simplexe concret**.
 Il est facile de vérifier que $(-\hat{a}) = (\hat{a})$.

Définition : 2-simplexes géométriques

Pour des besoins qui apparaîtront plus bas, (démonstration de la proposition 4.2.6) on restreint cette dernière définition. On dira qu'un 2-simplexe concret \hat{a} est **géométrique** lorsque la longueur du plus grand des côtés de (\hat{a}) n'excède pas 1.

Définition Les faces d'un simplexe : côtés et sommets.

Soit $\hat{a} = (x_0, x_1, x_2)$ un 2-simplexe formel de S^2 .
 Les points x_0, x_1 et x_2 seront appelés **les sommets de \hat{a}** .
 Les couples de points $(x_0, x_1), (x_1, x_2)$ et (x_2, x_0) seront appelés **les côtés de \hat{a}** .

Les côtés d'un 2-simplexe sont des couples, non des ensembles à deux éléments. Ainsi le couple (x_0, x_2) n'est pas un côté du 2-simplexe \hat{a} de la définition précédente. 

Lorsque le 2-simplexe $\hat{a} = (x_0, x_1, x_2)$ est géométrique, on peut associer à chacun de ses trois côtés un arc orienté qui est porté par l'un des côtés du triangle sphérique (\hat{a}) .

Dans le cas du cercle, on a utilisé un résultat tellement évident qu'on ne l'a même pas mentionné. A savoir :

Soient deux arcs $[a, b]$ et $[c, b]$, assez petits pour être orientés et ayant b pour borne commune.
 Alors les points a et c sont situés du même côté de b si et seulement si les deux arcs $[a, b]$ et $[c, b]$ ont même sens.

Le lemme suivant va établir un résultat analogue, quoiqu'un peu moins évident, pour la sphère.

Lemme 4.2.1

Soient \hat{a} et \hat{b} deux 2-simplexes géométriques non dégénérés de S^2 qui ont un côté commun. Posons $\hat{a} = (x_0, x_1, x_2)$ et $\hat{b} = (x_0, x_1, x_3)$; leur côté commun est le couple (x_0, x_1) .
 Alors les points x_2 et x_3 sont situés du même côté du plan engendré par l'arc (x_0, x_1) si et seulement si \hat{a} et \hat{b} ont même signe.

Quelques remarques s'imposent :

- Le plan (affine) engendré par l'arc (x_0, x_1) n'est autre que le plan (vectoriel) engendré par les vecteurs $\overline{Ox_0}$ et $\overline{Ox_1}$

- Dire que deux points x_2 et x_3 sont situés du même côté d'un plan L revient à dire que le segment de ligne droite qui relie x_2 à x_3 ne rencontre pas le plan L .

Soit, pour tout point t de I , x_t défini par : $\overline{Ox_t} := t\overline{Ox_2} + (1-t)\overline{Ox_3}$. L'ensemble des x_t n'est autre que le segment de ligne droite qui relie x_2 à x_3 . Soit, pour tout t , $\mathfrak{a}_t = (x_0, x_t, x_1)$. Par multilinéarité, on a : $\det \mathfrak{a}_t = t \det \mathfrak{a} + (1-t) \det \mathfrak{b}$.

L'application $\delta: \begin{cases} I & \longrightarrow [\det \mathfrak{a}, \det \mathfrak{b}] \\ t & \longrightarrow \det \mathfrak{a}_t \end{cases}$ est donc strictement monotone. On a donc :

« $\det \mathfrak{a}$ et $\det \mathfrak{b}$ sont de signes opposés »

\iff « $\exists s \in I; \det \mathfrak{a}_s = 0$ »

\iff « il existe un point s de I tel que le point x_s du segment de ligne droite qui relie x_2 à x_3 appartient au plan engendré par les vecteurs $\overline{Ox_0}$ et $\overline{Ox_1}$ »

Définition : triangulations de S^2 .

On appelle **triangulation de S^2** un ensemble fini \mathfrak{A} de 2-simplexes géométriques non dégénérés positifs de S^2 qui vérifie :

- La réunion de tous les triangles (\mathfrak{a}) lorsque \mathfrak{a} décrit \mathfrak{A} redonne S^2 .

- Si deux éléments distincts \mathfrak{a} et \mathfrak{b} de \mathfrak{A} vérifient : $(\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b}) \neq \emptyset$, alors \mathfrak{a} et \mathfrak{b} ont exactement un côté commun et $(\mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{b})$ est égale à l'arc défini par ce côté commun.

Une propriété fort utile des triangulations de S^2 s'énonce ainsi :

Lemme 4.2.2

Si (a, b) est le côté d'un élément d'une triangulation \mathfrak{A} de S^2 , alors (b, a) sera le côté d'un autre élément de \mathfrak{A} et d'un seul.

La démonstration, purement géométrique, est laissée au lecteur.

Définition image d'un 2-simplexe formel par une application

Soient f une application (pas nécessairement continue) de S^2 vers S^2 et $\mathfrak{a} = (x_0, x_1, x_2)$ un 2-simplexe formel de S^2 . Le 2-simplexe formel $(f(x_0), f(x_1), f(x_2))$ sera appelé **l'image** de \mathfrak{a} par f et sera noté $f(\mathfrak{a})$.

L'image d'un 2-simplexe formel non dégénéré de S^2 par une application peut très bien être dégénéré. 

De même l'image d'un 2-simplexe géométrique de S^2 par une application n'est pas toujours géométrique.

Définition image d'une triangulation par une application

Soient f une application (pas nécessairement continue) de S^2 vers S^2 et \mathfrak{A} une triangulation. L'ensemble $\{f(\mathfrak{a}); \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}\}$ de 2-simplexes formels sera appelé **l'image** de \mathfrak{A} par f et sera noté $f(\mathfrak{A})$.

L'image d'une triangulation par une application n'est pas toujours une triangulation. 

Définition triangulation subordonnée à une application continue

Soit f une application continue de S^2 vers S^2 . On dira qu'une triangulation \mathfrak{A} est **subordonnée à f** lorsque, pour tout élément \mathfrak{a} de \mathfrak{A} , le diamètre de l'ensemble $f(\mathfrak{a})$ n'excède pas 1. Lorsqu'une triangulation \mathfrak{A} est subordonnée à une application continue f , puisque, pour tout élément \mathfrak{a} de \mathfrak{A} , on a : $(f(\mathfrak{a})) \subset f(\mathfrak{a})$, tous les 2-simplexes formels de S^2 qui appartiennent à $f(\mathfrak{A})$ sont géométriques. On peut alors associer à $f(\mathfrak{A})$ une famille de triangles sphériques qui jouera le même rôle que les iro de la section précédente.

L'image par une application f d'une triangulation \mathfrak{A} subordonnée à f n'est pas forcément une triangulation. En effet les triangles sphériques de la famille associée à $f(\mathfrak{A})$ peuvent être affreusement enchevêtrés.

Définition : le degré (1)

Soient \mathfrak{f} un ensemble fini de 2-simplexes géométriques de S^2 et z un point de S^2 qui n'appartient à aucun des côtés des éléments de \mathfrak{f} .

- On note $\text{pos}(\mathfrak{f}, z)$ le nombre d'éléments f de \mathfrak{f} non dégénérés, positifs et tels que z appartienne à l'intérieur du triangle (f) .
- On note $\text{neg}(\mathfrak{f}, z)$ le nombre d'éléments f de \mathfrak{f} non dégénérés, négatifs, et tels que z appartienne à l'intérieur du triangle (f) .
- On pose enfin : $\text{deg}(\mathfrak{f}, z) := \text{pos}(\mathfrak{f}, z) - \text{neg}(\mathfrak{f}, z)$.

Définition : le degré (2)

Soient une application f continue de S^2 vers S^2 , une triangulation \mathfrak{A} subordonnée à f et un point z de S^2 qui n'appartient à aucun des côtés des éléments de $f(\mathfrak{A})$.

On pose : $\text{deg}(f, \mathfrak{A}, z) := \text{deg}(f(\mathfrak{A}), z)$.

Proposition

$$\text{deg}(f, \mathfrak{A}, z) \text{ est indépendant de } z.$$

Pour les besoins de la démonstration, on introduit la définition suivante.

Définition déplacement des sommets d'un ensemble de 2-simplexes

Soit \mathfrak{A} un ensemble de 2-simplexes formels de S^2 .

On appellera **déplacement des sommets de \mathfrak{A}** une application ϕ de \mathfrak{A}^0 vers S^2 .

Si $a = (a, b, c)$ est un élément de \mathfrak{A} , on définit l'**image** de a par ϕ comme le 2-simplexe formel $(\phi(a), \phi(b), \phi(c))$. Il sera noté $\phi(a)$.

L'ensemble $\{\phi(a) : a \in \mathfrak{A}\}$ sera appelé l'**image** de \mathfrak{A} par ϕ et sera noté $\phi(\mathfrak{A})$.

Lorsque tous les éléments de \mathfrak{A} sont géométriques, on dira qu'un déplacement ϕ des sommets de \mathfrak{A} est **raisonnable** lorsque tous les éléments de $\phi(\mathfrak{A})$ sont géométriques.

Définition : le degré (3)

Soient une triangulation \mathfrak{A} , un déplacement raisonnable ϕ des sommets de \mathfrak{A} et un point z de S^2 qui n'appartient à aucun des

côtés des éléments de $\phi(\mathfrak{A})$.

On pose : $\text{deg}(\phi, \mathfrak{A}, z) := \text{deg}(\phi(\mathfrak{A}), z)$

Comme pour l'image d'une triangulation par une application, et pour les mêmes raisons, l'image d'une triangulation par un déplacement de ses sommets est en général très loin d'être une triangulation, même si le déplacement est raisonnable.



Lemme 4.2.3

Soient \mathfrak{A} une triangulation, ϕ un déplacement raisonnable des sommets de \mathfrak{A} et $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ n points de S^2 qui n'appartiennent à aucun des côtés des éléments de $\phi(\mathfrak{A})$.

Il existe alors un autre déplacement raisonnable des sommets de \mathfrak{A} que l'on notera ψ , calculé à partir de ϕ et de $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ tel que : Tous les éléments de $\psi(\mathfrak{A})$ sont non dégénérés ;

Pour tout $i, 1 \leq i \leq n, \text{deg}(\phi, \mathfrak{A}, z_i) = \text{deg}(\psi, \mathfrak{A}, z_i)$

On fait subir à chaque élément dégénéré $\phi(b)$ de $\phi(\mathfrak{A})$ une transformation qui consiste, en écartant légèrement l'un de ses sommets, à faire de b un 2-simplexe $\psi(b)$ non dégénéré et assez étroit pour que $(\psi(b))$ ne contienne aucun des n points $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$.

Ce faisant, on veille, en écartant les sommets, à ce que, pour tout élément non dégénéré $\phi(a)$ de $\phi(\mathfrak{A})$, $\psi(a)$ soit non dégénéré et vérifie :

$$\forall i, z_i \in (\psi(a)) \iff z_i \in (\phi(a)).$$

Il est facile de vérifier que ψ satisfait aux conditions requises.

Lemme 4.2.4

Soient \mathcal{F} une triangulation et ϕ un déplacement raisonnable des sommets de \mathcal{F} . Soient z_1 et z_2 deux points distincts de S^2 qui n'appartiennent à aucun des côtés des éléments de $(\phi(\mathcal{F}))$.

Alors $\deg(\phi, \mathcal{F}, z_1) = \deg(\phi, \mathcal{F}, z_2)$.

Étape 1

Dans le cas où aucun des éléments de $(\phi(\mathcal{F}))$ n'est dégénéré, $\deg(\phi, \mathcal{F}, z_1) = \deg(\phi, \mathcal{F}, z_2)$.

Préliminaire 1.1

Dans le cas où aucun des éléments de $(\phi(\mathcal{F}))$ n'est dégénéré,

Si (H) $\|z_1 z_2\| < 1$.

Si on note $[z_1, z_2]$ l'arc de grand cercle le plus court qui joint z_1 à z_2 , $[z_1, z_2]$ contient exactement un point, que l'on notera x , qui appartient à l'un des côtés de l'un des éléments de $(\phi(\mathcal{F}))$ sans en être un sommet.

alors $\deg(\phi, \mathcal{F}, z_1) = \deg(\phi, \mathcal{F}, z_2)$.

Soit $\{(a_i, b_i) : 1 \leq i \leq p\}$ l'ensemble de tous les côtés associés à x .

Par hypothèse, pour chaque indice i , $1 \leq i \leq p$, on a :

il existe un point c_i de S^2 tel que $\tau_i := (a_i, b_i, c_i)$ appartienne à \mathcal{F} et x appartient à l'arc $[\phi(a_i), \phi(b_i)]$.

\mathcal{F} étant une triangulation, d'après 4.2.2, il existe pour chaque indice i , $1 \leq i \leq p$, un point d_i de S^2 tel que $\delta_i := (b_i, a_i, d_i)$ appartienne à \mathcal{F} .

Posons $\mathcal{F} := \{\phi(\tau_i) : 1 \leq i \leq p\} \cup \{\phi(\delta_i) : 1 \leq i \leq p\}$

Par définition de \mathcal{F} , $[z_1, z_2]$ ne rencontre aucun des côtés des triangles de $(\phi(\mathcal{F})) \setminus \mathcal{F}$. Ceci entraîne que si l'un de ces triangles contient l'un des points z_1 ou z_2 , alors il contiendra l'autre. On en déduit que $\deg(\phi(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{F}, z_1) = \deg(\phi(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{F}, z_2)$

Puisqu'évidemment $\deg(\phi, \mathcal{F}, z_k) = \deg(\phi(\mathcal{F}) \setminus \mathcal{F}, z_k) + \deg(\mathcal{F}, z_k)$

il nous reste à montrer que : $\deg(\mathcal{F}, z_1) = \deg(\mathcal{F}, z_2)$

On va montrer en fait qu'en notant, pour chaque indice i , $1 \leq i \leq p$,

$\mathcal{C}_i := \{\phi(\tau_i), \phi(\delta_i)\}$, on a : $\deg(\mathcal{C}_i, z_1) = \deg(\mathcal{C}_i, z_2)$

Soit donc un indice i . Ecrivons respectivement $a, b, c, d, \mathcal{C}, c$ et δ pour $a_i, b_i, c_i, d_i, \mathcal{C}_i, \tau_i$ et δ_i . Notons $C := \phi(\tau_i)$ et $D := \phi(\delta_i)$.

Tout d'abord l'hypothèse (H) entraîne :

- (a) l'un au moins des points z_1 et z_2 appartient à l'un des triangles C et D .
- (b) chacun des triangles C et D contient au plus l'un des points z_1 et z_2 .

Ceci acquis, l'on peut, pour des raisons évidentes de symétrie, se ramener aux deux cas suivants : 1) $z_1 \in C \setminus D$ et $z_2 \in D \setminus C$;

2) $z_1 \notin C \cup D$ et $z_2 \in D \cap C$.

Cas 1) On a déjà : $\deg(\mathcal{C}_i, z_1) = 1$; $\deg(\mathcal{C}_i, z_2) = 1$;

Soit P le plan engendré par l'arc $(\phi(a), \phi(b))$.

On montre facilement que les points z_1 et $\phi(c)$ sont du même côté de P et qu'il en est de même des points z_2 et $\phi(d)$. Puisque, d'après (H), z_1 et z_2 sont situés de part et d'autre de P , il en est de même des points $\phi(c)$ et $\phi(d)$. D'après 4.2.1, les 2-simplexes $\phi(\tau) = (\phi(a), \phi(b), \phi(c))$ et $\phi(\delta) = (\phi(a), \phi(b), \phi(d))$ sont donc de signes opposés. On en déduit que $\phi(\tau)$ et $\phi(\delta)$ sont de même signe et donc que :

$$\deg(\mathbb{G}, z_1) = \deg(\mathbb{G}, z_2) = \pm 1;$$

Cas 2) Ici, on a : $\deg(\mathbb{G}, z_1) = 0$ et $\deg(\mathbb{G}, z_2) \in \{-2, 0, 2\}$.

On montre facilement que (H) entraîne que les points $z_2, \phi(c)$ et $\phi(d)$ sont du même côté de P . D'après 4.2.1, les deux 2-simplexes

$$\phi(c) = (\phi(a), \phi(b), \phi(c)) \text{ et } -\phi(d) = (\phi(a), \phi(b), \phi(d))$$

sont donc de même signe. On en déduit que $\phi(c)$ et $\phi(d)$ sont de signes opposés et donc que : $\deg(\mathbb{G}, z_1) = \deg(\mathbb{G}, z_2) = 0$.

Montrons l'étape 1. Il est facile de vérifier qu'il nous est loisible de relier les points z_1 et z_2 par une suite finie $\{z_1 = x_1, x_2 \dots x_n = z_2\}$ de points de S^2 tels que chacun des couples (x_i, x_{i+1}) vérifie l'hypothèse

(H) du préliminaire. En appliquant ce dernier, on trouve :

$$\forall i, \deg(\phi, \mathbb{A}, x_i) = \deg(\phi, \mathbb{A}, x_{i+1}).$$

Si bien que de proche en proche, on obtient :

$$\deg(\phi, \mathbb{A}, z_1) = \deg(\phi, \mathbb{A}, z_2).$$

Ceci établi, on peut passer à l'étape suivante. Soit ψ le déplacement raisonnable des sommets de \mathbb{A} construit à partir de ϕ , de z_1 et de z_2

en appliquant 4.2.3. En appliquant l'étape 1 à ψ , on obtient :

$$\deg(\phi, \mathbb{A}, z_1) = \deg(\psi, \mathbb{A}, z_1) = \deg(\psi, \mathbb{A}, z_2) = \deg(\phi, \mathbb{A}, z_2).$$

Proposition 4.2.5

Soient une application f continue de S^2 vers S^2 , une triangulation \mathbb{A} subordonnée à f et un point z de S^2 n'appartenant à aucun des côtés des éléments de $f(\mathbb{A})$.

Alors $\deg(f, \mathbb{A}, z)$ est indépendant de z .

Puisque \mathbb{A} est subordonnée à f , le déplacement des sommets de \mathbb{A} induit par f est raisonnable. On lui applique alors 4.2.4.

Etant données une application f continue de S^2 vers S^2 et une triangulation \mathbb{A} subordonnée à f , on peut donc définir le nombre entier $\deg(f, \mathbb{A})$ comme suit :

$$\deg(f, \mathbb{A}) := \deg(f, \mathbb{A}, z)$$

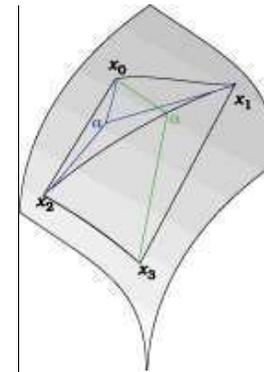
où z est un point de S^2 que l'on peut choisir arbitrairement pourvu qu'il n'appartienne à aucun des côtés des éléments de $f(\mathbb{A})$.

Proposition 4.2.6

Soient f une application continue de S^2 vers S^2 et \mathbb{A} et \mathbb{B} deux triangulations subordonnées à f . Alors : $\deg(f, \mathbb{A}) = \deg(f, \mathbb{B})$

Lemme

Dans le cas où \mathbb{B} est obtenue à partir de \mathbb{A} en y ajoutant un sommet, on a : $\deg(f, \mathbb{A}) = \deg(f, \mathbb{B})$



Explicitons : Soient \mathbb{A} une triangulation et a un point de S^2 qui n'est pas l'un de ses sommets. Deux cas peuvent se présenter selon que a appartient ou non à l'un des côtés de \mathbb{A} . Sur la figure ci-contre, on a représenté le premier cas en vert et le second en violet. Dans le premier cas, soient (x_0, x_1, x_2) et (x_3, x_2, x_1) les deux éléments de \mathbb{A} dont le côté commun $[x_1, x_2]$ contient a . On construit \mathbb{B} à partir de \mathbb{A} en retranchant de ce dernier

deux éléments ci-dessus et en ajoutant au résultat (x_0, a, x_2) , (x_0, x_1, a) et (x_3, x_2, a) et (x_3, a, x_1)

Dans le second cas, soit (x_0, x_1, x_2) l'élément de \mathbb{A} dont « l'intérieur » contient a . On construit \mathbb{B} à partir de \mathbb{A} en retranchant de ce dernier

l'élément ci-dessus et en ajoutant au résultat $(x_0, a, x_2), (x_0, x_1, a)$ et (a, x_1, x_2) . On voit ainsi que \mathcal{A} et \mathcal{B} , et par suite $f(\mathcal{A})$ et $f(\mathcal{B})$, ne diffèrent entre eux que par, au plus, six éléments. Remarquons que puisque $f(a)$ est contenu dans les images d'un (ou de deux) triangle(s) sphérique(s) associés à des éléments de \mathcal{A} , \mathcal{B} est subordonnée à f . Un calcul simple montre que six triangles sphériques associés à six 2-simplexes géométriques ne sont pas assez grands pour couvrir la surface entière de la sphère. Il existe donc un point z de S^2 qui n'appartient à aucun des six (au plus) triangles sphériques associés aux éléments de $(f(\mathcal{A}) \cup f(\mathcal{B})) \setminus (f(\mathcal{A}) \cap f(\mathcal{B}))$. Puisqu'on a évidemment : $\deg(f, \mathcal{A}, z) = \deg(f, \mathcal{B}, z)$, le lemme est une conséquence de 4.2.5.

On démontre la proposition à l'aide du lemme en utilisant la même démarche que dans la démonstration de 4.1.5.

Proposition 4.2.7

Pour toute application continue f de S^2 vers S^2 , il existe au moins une triangulation de S^2 subordonnée à f .

Tout d'abord, il faut remarquer que l'ensemble des triangles sphériques pleins et fermés constitue un système fondamental de voisinages de S^2 . Puisque f est continue, chaque point x de S^2 appartient donc à l'intérieur d'un triangle T_x tel que le diamètre de $f(T_x)$ n'excède pas 1. S^2 étant compacte, on extrait du recouvrement $\{T_x; x \in S^2\}$ le sous-recouvrement fini $\{T_i; 1 \leq i \leq p\}$. Soit $\{x_j; 1 \leq j \leq q\}$ l'ensemble de tous les points d'intersection des côtés des T_i , y compris les sommets de ces derniers. Il est facile de vérifier qu'il existe une triangulation \mathcal{A} dont l'ensemble des sommets est $\{x_j; 1 \leq j \leq q\}$. Puisque, par construction, tout triangle sphérique associé à un élément de \mathcal{A} est contenu dans un T_i , \mathcal{A} est subordonnée à f .

Définition : le degré d'une application continue de S^2 vers S^2

D'après les deux propositions précédentes, on peut définir le degré d'une application continue f de S^2 vers S^2 comme l'entier relatif $\deg(f, \mathcal{A})$ où \mathcal{A} est une triangulation de S^2 que l'on peut choisir arbitrairement pourvu qu'elle soit subordonnée à f .

On a l'analogie de 4.1.7 :

Lemme 4.2.8

Notons $Top_{kw}(S^2, S^2)$ l'espace topologique que l'on obtient en munissant $Top(S^2, S^2)$ de la topologie compacte ouverte. L'application $f \mapsto \deg f$ induit une application localement constante de $Top_{kw}(S^2, S^2)$ vers \mathbb{Z} .

La démonstration reprend point par point celle de 4.1.7 :

Soit f un point de $Top_{kw}(S^2, S^2)$. On va montrer qu'à tout couple (\mathcal{A}, z) tel que $\deg(f, \mathcal{A}, z)$ soit défini, on peut associer un voisinage U de f dans $Top_{kw}(S^2, S^2)$ tel que \mathcal{A} soit subordonnée à chacun de ses points. Puis on construira un voisinage ouvert W de f dans U tel que l'image de \mathcal{A} par chacun de ses points soit assez voisine de $f(\mathcal{A})$ pour donner la même valeur lors du calcul du degré.

Soient donc \mathcal{A} et z tels que $\deg(f, \mathcal{A}, z)$ soit défini.

a) Construction de U .

\mathcal{A} étant subordonnée à f , il existe, pour chaque élément a de \mathcal{A} , un ouvert O_a de S^2 dont le diamètre a une longueur inférieure à 1 et qui contient $f(a)$. Soient $U_a := \langle a, O_a \rangle$ et $U := \bigcap_{a \in \mathcal{A}} U_a$.

Puisque \mathcal{A} est fini, U est un voisinage de f . Il est facile de vérifier que \mathcal{A} est subordonnée à chacun des points de U .

b) Construction de V .

Notons \mathcal{A}^1 l'ensemble des côtés des éléments de \mathcal{A} . Si c est un élément de \mathcal{A}^1 , on notera $\langle c \rangle$ l'arc de grand cercle qui lui est associé. On notera $d(c, z)$ la distance entre $\langle c \rangle$ et z .

Soit un réel ε strictement positif et strictement inférieur à tous les nombres $d(c, z)$, $c \in \mathcal{A}^1$.

Soit, pour tout élément c de \mathcal{A}^1 , B_c la bande parallèle à $\langle c \rangle$, centrée en $\langle c \rangle$ et de largeur 2ε .

Posons : $W_c := \langle c, B_c \rangle$, $W := \bigcap_{c \in \mathcal{A}^1} W_c$ et $V := U \cap W$.

Il est facile de vérifier que, pour tout élément a de \mathcal{A} et tout élément g de V , on a : $z \in (f(a)) \iff z \in (g(a))$.

D'où le résultat.

Théorème 4.2.9

Si deux applications continues de S^2 dans S^2 sont homotopes, elles ont le même degré.

La démonstration est la même que celle de 4.1.8.

Corollaire

S^2 n'est pas contractile.

La démonstration est la même que celle du corollaire de 4.1.8.

5 Revêtements

L'étude des revêtements est un bon exemple d'utilisation de la théorie de Poincaré. En résumé, c'est une classe d'applications continues p , assez simples pour être déterminées à un homéomorphisme près par le mor-

chemin faisant nous rencontrerons d'autres exemples d'espaces topologiques non simplement connexes : les espaces projectifs réels.

5.1 Généralités et exemples

A seule fin de simplifier les propos, on introduit les définitions suivantes.

Définitions (vocabulaire)

Soient $p : Y \longrightarrow X$ une application continue et A une partie de X .

On dit qu'une partie B de Y est une **p-copie** de A lorsque la restriction de p à B induit un homéomorphisme de B sur A .

On dit qu'une famille $\{B_a\}_{a \in A}$ de parties de Y est une **pile** lorsque ses membres sont deux-à-deux disjoints.

Définition

Soit X un espace topologique. La donnée d'un **revêtement au-dessus de X** consiste en la donnée d'une application $p : Y \longrightarrow X$ continue, surjective et qui vérifie la propriété suivante :

Tout point de X admet un voisinage ouvert U dans X tel que $p^{-1}(U)$ soit la réunion des membres d'une pile de p -copies ouvertes de U .

Cette propriété peut aussi s'énoncer en termes de recouvrement.

- Il existe un recouvrement ouvert $\{U_a\}_{a \in A}$ de X tel que, pour tout indice a ,
- (REV) - $p^{-1}(U_a)$ soit la réunion disjointe d'ouverts $\{V_{a,b}\}_{b \in B}$ de Y ,
 - la restriction de p à chaque $V_{a,b}$ induise un homéomorphisme de $V_{a,b}$ sur U_a .

Premiers exemples

- 1) L'identité d'un espace topologique ou, plus généralement, tout homéomorphisme, est un revêtement au-dessus de son espace d'arrivée.
- 2) Si X est un espace topologique et si $\{\phi_a : Y_a \longrightarrow X\}_{a \in A}$ est une famille d'homéomorphismes de but X , alors
$$\begin{cases} \prod_{a \in A} Y_a & \longrightarrow & X \\ y_a & \longmapsto & \phi_a(y_a) \end{cases}$$
 est un revêtement au-dessus de X . Un tel revêtement est dit trivial.
- 3) L'application $p : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & S^1 \\ t & \longmapsto & (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{cases}$ que nous avons rencontrée au [GF 24](#), lors du premier calcul du groupe fondamental de S^1 . Dans ce cas, le recouvrement ouvert $\{U_a\}_{a \in A}$ de S^1 ne comporte que deux membres, U_1 et U_2 , et, pour $1 \leq i \leq 2$, $p^{-1}(U_i)$ est la réunion d'une pile dénombrable de copies de U_i .
- 4) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $h_n : \begin{cases} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ \theta & \longmapsto & n\theta \end{cases}$. On prend comme recouvrement de S^1 les deux ouverts $U_0 := S^1 \setminus \{0\}$ et $U_1 := S^1 \setminus \{\pi\}$
 On a : $h_n^{-1}(U_0) = \prod_{0 \leq k \leq n-1}]\frac{2k}{n}\pi, \frac{2(k+1)}{n}\pi[$
 et : $h_n^{-1}(U_1) = \prod_{0 \leq k \leq n-1}](\frac{2k}{n}-1)\pi, (\frac{2(k+1)}{n}-1)\pi[$

Proposition 5.1.1

Soient $\{X_j\}_{j \in J}$ une famille d'espaces topologiques et une application $p : Y \longrightarrow \prod_{j \in J} X_j$.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) p est un revêtement ;
- (ii) Pour tout indice j , $p_j : p^{-1}(X_j) \longrightarrow X_j$ est un revêtement.

Posons : $Y_j := p^{-1}(X_j)$. Remarquons que l'on a : $Y = \prod_{j \in J} Y_j$.

(i) \implies (ii) Soit un indice j . On voit immédiatement que, puisque p est surjective et continue, il en va de même pour p_j .

Soit x un point de X_j . D'après (i), il existe un voisinage U de x dans X et une pile $(\tilde{U}_a)_{a \in A}$ de p -copies ouvertes de U telle que :
 $p^{-1}(U) = \prod_{a \in A} \tilde{U}_a$. Soit $U_j := U \cap X_j$.

On a : $p^{-1}(U_j) = p^{-1}(U) \cap Y_j = \prod_{a \in A} (\tilde{U}_a \cap Y_j)$

De plus, la restriction de p_j à chaque $\tilde{U}_a \cap Y_j$ n'est autre que la restriction à $\tilde{U}_a \cap Y_j$ de l'homéomorphisme induit sur \tilde{U}_a par p ; c'est donc un homéomorphisme de $\tilde{U}_a \cap Y_j$ sur U_j .

Le point x étant arbitraire, p_j est un revêtement. L'indice j étant arbitraire, on a (ii).

(ii) \implies (i) Il est facile de vérifier que p est surjective et continue.

Soit x un point de X . Soit j l'unique indice tel que X_j contienne x .

D'après (ii) x admet un voisinage ouvert U_j dans X_j tel que $p^{-1}(U_j)$ soit la réunion des membres d'une pile de p_j -copies ouvertes de U_j .

U_j est aussi un ouvert de X et toute p_j -copie de U_j est aussi une p -copie de U_j . Le point x étant arbitraire, p est un revêtement.

Quitte à restreindre ainsi un revêtement au-dessus d'un espace topologique X aux composantes connexes de X , on pourra se limiter à l'étude des revêtements au-dessus d'espaces topologiques connexes.

Lemme 5.1.2

Si $p : Y \longrightarrow X$ est un revêtement, alors l'application $x \longmapsto \text{Card}(p^{-1}(x))$ est localement constante.

Soit x_0 un point de X . Puisque p est un revêtement, il existe un voisinage U de x dans X et une pile $(\tilde{U}_a)_{a \in A}$ de p -copies ouvertes de U dont la réunion redonne $p^{-1}(U)$,

Ceci entraîne que : $\forall x \in U, \text{Card}(p^{-1}(x)) = \text{Card } A$.

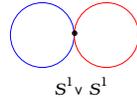
Définition

Soit $p : Y \twoheadrightarrow X$ un revêtement au-dessus d'un espace topologique X connexe. D'après le lemme précédent, $\text{Card}(p^{-1}(x))$ est constant sur X . On appelle **nombre de feuillettes de p** la valeur de $\text{Card}(p^{-1}(x))$ pour un point quelconque x de X .

Exemples

On va donner des exemples de différents revêtements au-dessus de l'espace topologique $S^1 \vee S^1$.

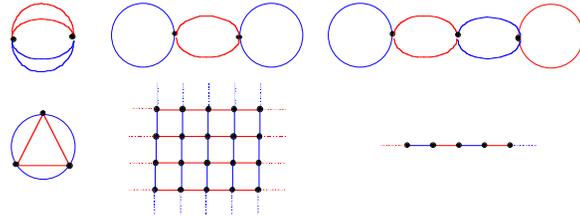
Comme on l'a mis en évidence dans la figure ci-contre, $S^1 \vee S^1$ présente trois parties disjointes remarquables :



- Le point commun aux deux cercles (très grossi dans la figure) : le nœud.
- Deux arcs de cercles

Les figures ci-dessous présentent les espaces de définition de divers revêtements au-dessus de l'espace topologique $S^1 \vee S^1$. Les revêtements eux-mêmes sont suggérés par la convention suivante :

Un revêtement applique les points « grossis » sur le nœud de $S^1 \vee S^1$ et chaque arc coloré sur l'arc de $S^1 \vee S^1$ de la même couleur.

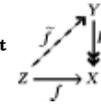


Les revêtements des exemples 1 et 2 ont deux feuillettes, ceux des exemples 3 et 4 en ont trois, celui de l'exemple 5 en a un nombre dénombrable. L'exemple 6 est en fait un contre-exemple. Tous les voisinages du nœud de $S^1 \vee S^1$, sauf $S^1 \vee S^1$ lui-même, présentent, lorsqu'on les prive du nœud, quatre composantes connexes. Pour qu'une application f de Y vers $S^1 \vee S^1$ ait une chance d'être un revêtement, il faut donc que cha-

que f -nœud de Y admette aussi un voisinage « à quatre brins ». L'exemple 6 ne remplit pas cette condition.

Définition

Soient $p : Y \twoheadrightarrow X$ un revêtement et $f : Z \twoheadrightarrow X$ une application continue. On appelle **remontée de f suivant p** une application continue $\tilde{f} : Z \twoheadrightarrow Y$ telle que :



$$p \circ \tilde{f} = f.$$

Proposition 5.1.3

Soient $p : Y \twoheadrightarrow X$ un revêtement, Z un espace topologique connexe et $f : Z \twoheadrightarrow X$ une application continue. Deux remontées \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 de f suivant p qui coïncident en un point de Z sont égales.

Soient donc deux remontées \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 de f suivant p qui coïncident au point z_0 de Z . Notons $M := \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}$, M contient z_0 et n'est donc pas vide. Puisque \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont continues, M est fermé.

Montrons que M est aussi ouvert.

Soit z un point de M . Posons $y := \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ et $x := p(y) = f(z)$. Puisque p est un revêtement, x et y admettent respectivement des voisinages U et V tels que V soit une p -copie de U .

Soit $W := \tilde{f}_1^{-1}(V) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V)$. Il est facile de vérifier que W est un voisinage de z contenu dans M .

M est donc un o_f non vide de l'espace connexe Z . D'où : $M = Z$.

La composition de deux revêtements n'est pas toujours un revêtement. On a toutefois le résultat suivant.

Proposition 5.1.4

Soient X, Y et Z trois espaces topologiques et $f : X \twoheadrightarrow Y$ et $g : Y \twoheadrightarrow Z$ deux applications continues. Si g et $g \circ f$ sont des revêtements alors f sera un revêtement.

Soient y un point de Y et $z := g(y)$. Il est facile de vérifier que, puisque g et $g \circ f$ sont des revêtements, z admet un voisinage U dont les images réciproques par g et $g \circ f$ sont respectivement des piles de g -copies et de $(g \circ f)$ -copies de U . Désignons par V le membre de cette pile de g -copies de U qui contient y et par $\{W_a\}_{a \in A}$ la sous-pile de la pile des $(g \circ f)$ -copies de U dont les membres contiennent un élément de $f^{-1}(y)$. On voit alors facilement que, pour tout indice a , W_a est une f -copie de V et que $f^{-1}(V) = \bigcup_{a \in A} W_a$.

Lemme 5.1.5

Un revêtement $p : Y \twoheadrightarrow X$ est ouvert et fermé.

Soient U un ouvert de Y , y , un élément de U et $x := p(y)$. Puisque p est un revêtement, y admet un voisinage ouvert U_1 tel que la restriction de p à U_1 soit un homéomorphisme de U_1 sur un ouvert V de X . Il est donc clair que $p(U \cap U_1)$ est un voisinage ouvert de x dans V , donc dans X , contenu dans $p(U)$. Cette construction étant vraie pour tout élément de $p(U)$, ce dernier est un ouvert.

Soient F un fermé de Y et x un point adhérent à $p(F)$. Puisque p est un revêtement, il existe un voisinage ouvert U de x , une famille $(y_a)_{a \in A}$ d'éléments de $p^{-1}(x)$ et une famille $(\tilde{U}_a)_{a \in A}$ d'ouverts de Y tels que :

- Pour tout indice a , y_a appartient à $p^{-1}(x)$;
- $p^{-1}(U) = \prod_{a \in A} \tilde{U}_a$;
- la restriction de p à chaque \tilde{U}_a induit un homéomorphisme de \tilde{U}_a sur U .

Le point x étant adhérent à $p(F)$, on a : $U \cap p(F) \neq \emptyset$
 et : $U \cap p(F) \neq \emptyset \implies F \cap \prod_{a \in A} \tilde{U}_a = p^{-1}(U) \cap F \neq \emptyset$
 $\implies \exists b \in A : F \cap \tilde{U}_b \neq \emptyset$.

La restriction de p à \tilde{U}_b étant un homéomorphisme de \tilde{U}_b sur U et x étant adhérent à $p(F)$, y_b est adhérent à $F \cap \tilde{U}_b$ et, par suite, à F .

Ce dernier étant fermé, il contient y_b . On en conclut que $x = p(y_b)$ appartient à $p(F)$.

5.2 Revêtements et foncteurs de Poincaré.

Proposition 5.2.1

Soient $p : Y \twoheadrightarrow X$ un revêtement, f et g deux applications continues de Z vers X et η une homotopie de f vers g .
 Pour toute remontée \tilde{f} de f suivant p , il existe une unique remontée $\tilde{\eta}$ de η suivant p qui est une homotopie de début \tilde{f} .
 Si, de plus, η est invariante sur une partie A de Z , il en sera de même pour $\tilde{\eta}$.

La démonstration de la première partie se calque sur celle du [lemme 1](#) de [GF 24](#). Il n'y a qu'à y remplacer S^1 par X , \mathbb{R} par Y et h par η . Montrons la seconde partie. Soit z un point de A . Par hypothèse, $\eta(I \setminus \{z\})$ est réduit à un seul point x de X . L'image du connexe $I \setminus \{z\}$ par $\tilde{\eta}$ est donc un connexe contenu dans $p^{-1}(x)$. Puisque p est un revêtement, $p^{-1}(x)$ est totalement discontinu. Le connexe $\tilde{\eta}(I \setminus \{z\})$ de $p^{-1}(x)$ est donc réduit à un seul point. Le point z ayant été choisi arbitrairement dans A , l'homotopie $\tilde{\eta}$ est invariante sur A .

Rappel

Si Z est un espace topologique, et si z est l'un de ses points, on note $\tilde{\pi}_1(Z)_z$ l'ensemble des flèches de $\tilde{\pi}_1(Z)$ de source z ou, si l'on préfère, l'ensemble des classes des chemins de Z de début z .

Proposition 5.2.2

Si $p : Y \twoheadrightarrow X$ est un revêtement, alors, pour tout point y de Y , le morphisme de groupoïdes $\tilde{\pi}_1 p$ induit une bijection de $\tilde{\pi}_1(Y)_y$ vers $\tilde{\pi}_1(X)_{p(y)}$.

Corollaire 1

Pour tout point y de Y et tout chemin γ de X de début $p(y)$ il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ de Y de début y qui est une remontée de γ suivant p .

C'est une application de la proposition précédente au cas où Z est l'espace topologique réduit à un seul point.

Soit y un point de Y . Notons ψ l'application de $\pi_1(Y)_y$ vers $\pi_1(X)_{p(y)}$ induite par $\tilde{\pi}_1 p$.

Soit $\langle \gamma \rangle$ un élément de $\pi_1(X)_{p(y)}$. D'après le corollaire précédent, il existe un élément $\tilde{\gamma}$ de $\pi_1(Y)_y$ tel que : $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. D'où : $\psi \langle \tilde{\gamma} \rangle = \langle p \circ \tilde{\gamma} \rangle = \langle \gamma \rangle$.

L'application ψ est donc surjective. Montrons qu'elle est injective.

Soient $\langle \lambda \rangle$ et $\langle \gamma \rangle$ deux éléments de $\pi_1(Y)_y$ tels que : $\tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle = \tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle$.

Il existe donc une homotopie Λ invariante sur $\{0, 1\}$, de début $p \circ \lambda$ et de fin $p \circ \gamma$. D'après la proposition précédente, il existe une unique homotopie $\tilde{\Lambda}$ invariante sur $\{0, 1\}$, de début λ telle que : $p \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda$.

Soit ν la fin de $\tilde{\Lambda}$. Puisque $p \circ \tilde{\Lambda} = \Lambda$ $p \circ \nu = p \circ \gamma$. D'autre part, $\tilde{\Lambda}$ étant invariante sur $\{0, 1\}$, le début de ν coïncide avec le début de λ c'est à dire y . D'après le corollaire précédent, on a : $\nu = \lambda$. Les chemins λ et γ sont donc mis en relation par $\tilde{\Lambda}$. D'où : $\langle \lambda \rangle = \langle \gamma \rangle$.

Corollaire 5.2.3

Si $p : Y \rightarrow X$ est un revêtement, alors :

- Le morphisme de groupoïdes $\tilde{\pi}_1 p$ est surjectif.
- Pour tout point y de Y , le morphisme de groupe de $\pi_1(Y, y)$ vers $\pi_1(X, p(y))$ induit par $\tilde{\pi}_1 p$ est injectif.

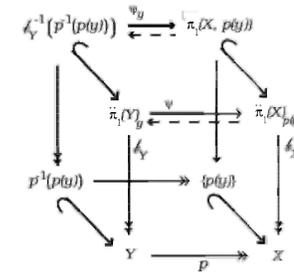
La démonstration est immédiate.

Corollaire 5.2.4

Si $p : Y \rightarrow X$ est un revêtement et si Y est connexe par arcs alors l'indice de $\pi_1(Y)$ dans $\pi_1(X)$ est égal au nombre de feuillettes de p .

Trois remarques s'imposent. D'une part, Y étant connexe par arcs, X l'est aussi : les groupes $\pi_1(Y)$ et $\pi_1(X)$ sont donc tous deux définis. D'autre part le corollaire précédent permet d'identifier $\pi_1(Y)$ avec un sous-groupe de $\pi_1(X)$. Enfin, X étant connexe par arcs, il est connexe et le nombre de feuillettes de p est défini.

Soit y un point de Y . On a le diagramme commutatif ci-contre. Les quatre applications verticales γ sont induites par les applications qui, à une classe de chemins, associent sa fin. Le fait que b_X et b_Y soient surjectives provient de l'hypothèse selon laquelle X et Y sont connexes par arcs. Les deux applications ψ et ψ_y sont induites



par la restriction de $\tilde{\pi}_1 p$. D'après la proposition précédente, ce sont des bijections.

Rappelons que l'indice de $\tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y))$ dans $\pi_1(X, p(y))$ n'est autre que le cardinal de l'ensemble quotient de la relation d'équivalence \otimes définie sur $\pi_1(X, p(y))$ par l'action à gauche de $\tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y))$.

Rappelons aussi que le nombre de feuillettes de p est par définition le cardinal de $p^{-1}(p(y))$.

On définit la relation d'équivalence $\tilde{\otimes}$ sur $b_Y^{-1}(p^{-1}(p(y)))$ à partir de \otimes et de la bijection ψ_y . Les relations $\tilde{\otimes}$ et \otimes ont le même ensemble quo-

tient. Grâce aux propriétés algébriques que ψ_y hérite de $\tilde{\pi}_1 p$, il est facile de vérifier que \otimes équivaut à la relation d'équivalence définie sur $b_Y^{-1}(p^{-1}(p(y)))$ par l'action à gauche de $\pi_1(Y, y)$. Il est facile de montrer que cette dernière relation équivaut à son tour à celle définie par la surjection b_Y .

On va pouvoir maintenant calculer d'autres groupes de Poincaré non triviaux : ceux des espaces projectifs réels.

Rappel les espaces projectifs réels

Soit n un entier naturel $n \geq 1$. On appelle « espace projectif réel de dimension n » l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} .

On note cet ensemble \mathbb{RP}^n .

Il est facile de vérifier que \mathbb{RP}^n est en bijection avec l'ensemble quotient de la relation d'équivalence \otimes définie sur la sphère S^n par :

$$x_1 \otimes x_2 \iff x_1 = \pm x_2.$$

On munit alors \mathbb{RP}^n de la topologie quotient de cette relation.

Il est facile de vérifier que la surjection $p_n : S^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ associée à la relation d'équivalence \otimes est un revêtement à deux feuillets.

Corollaire 5.2.5

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,
 $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

D'après le corollaire 5.2.4 $\text{Card} \left(\frac{\pi_1(\mathbb{RP}^n)}{\pi_1 p_n(\pi_1(S^n))} \right) = 2$.

Puisque, d'après GF 24, la sphère S^n est simplement connexe, on a :

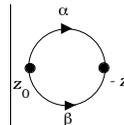
$$\pi_1 p_n(\pi_1(S^n)) = 0 \text{ et donc : } \frac{\pi_1(\mathbb{RP}^n)}{\pi_1 p_n(\pi_1(S^n))} \cong \pi_1(\mathbb{RP}^n).$$

D'où : $\text{Card}(\pi_1(\mathbb{RP}^n)) = 2$ et : $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Corollaire 5.2.6

$$\pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z}$$

1



Fixons un point z_0 de S^1 . Les deux arcs d'extrémités z_0 et $-z_0$ étant simplement connexes, il n'existe que deux éléments de $\tilde{\pi}_1(S^1)$ de bornage $(z_0, -z_0)$ sont les classes de chemins contenus dans ces arcs.

Soient $\langle \alpha \rangle$ et $\langle \beta \rangle$ ces deux éléments de $\tilde{\pi}_1(S^1)$

D'après 5.2.2, $\pi_1(\mathbb{RP}^1, \pm z_0)$ est égal à l'image par $\tilde{\pi}_1 p_1$ du sous-groupe H de $\tilde{\pi}_1(S^1)$ formé des classes de chemins dont les bornes appartiennent à $\{z_0, -z_0\}$.

Il est clair que H est engendré par $\pi_1(S^1, z_0)$, $\pi_1(S^1, -z_0)$, $\langle \alpha \rangle$ et $\langle \beta \rangle$.

Pour tout lacet λ d'extrémité z_0 , $-\lambda$ est un lacet d'extrémité $-z_0$

$$\text{D'où : } \pi_1 p_1(\pi_1(S^1, z_0)) = \pi_1 p_1(\pi_1(S^1, -z_0))$$

On a : $-\alpha = \beta^-$ donc : $\tilde{\pi}_1 p_1(\alpha) = \langle p_1 \alpha \rangle = \langle p_1 - \alpha \rangle = \langle p_1 \beta^- \rangle = \tilde{\pi}_1 p_1(\beta^-)$.

Au total $\pi_1(\mathbb{RP}^1, \pm z_0)$ est engendré par $\pi_1 p_1(\pi_1(S^1, z_0))$ et $\tilde{\pi}_1 p_1(\alpha)$.

D'autre part, si on note $\langle N \rangle$ le générateur de $\pi_1(S^1, z_0)$, $\langle -N \rangle$ est le générateur de $\pi_1(S^1, -z_0)$ et l'on a :

$$\langle \alpha \rangle \langle \beta^- \rangle = \langle N \rangle = \langle \beta \rangle \langle \alpha^- \rangle ; \quad - \langle \langle N \rangle \langle \alpha \rangle \rangle = \langle \beta^- \rangle \langle -N \rangle$$

Il est alors facile de conclure que $\pi_1(\mathbb{RP}^1, \pm z_0)$ est un groupe cyclique,

engendré par $\tilde{\pi}_1 p_1(\alpha)$ et dont le sous-groupe $2\pi_1(\mathbb{RP}^1, \pm z_0)$ est égal

à $\pi_1 p_1(\pi_1(S^1, z_0))$ qui lui-même, d'après 5.2.3, est isomorphe à \mathbb{Z} .

$\pi_1(\mathbb{RP}^1, \pm z_0)$ est donc isomorphe à \mathbb{Z} .

Proposition 5.2.7

Soient $p : Y \longrightarrow X$ un revêtement, x_0 un point de X et y_0 un point de $p^{-1}(x_0)$. Soient Z un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs, $f : Z \longrightarrow X$ une application continue et z_0 un point de $f^{-1}(x_0)$.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) Il existe une remontée \tilde{f} de f suivant p avec : $\tilde{f}(z_0) = y_0$
- (ii) $\tilde{\pi}_1 f(\pi_1(Z, z_0)) \subset \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_0))$

L'implication « (i) \implies (ii) » est une conséquence immédiate de l'égalité « $\tilde{\pi}_1 f = \tilde{\pi}_1 p \circ \tilde{\pi}_1 \tilde{f}$ » qui, elle-même résulte de la définition de \tilde{f} et de la functorialité de $\tilde{\pi}_1$. L'intérêt de la proposition réside dans la réciproque. Montrons donc « (ii) \implies (i) ».

a) Définissons une application \tilde{f} .

On a le diagramme ci-dessous. Si on le prive de \tilde{f} , on obtient un

diagramme commutatif.

Le fait que b_Z soit surjective provient de l'hypothèse selon laquelle Z est connexe par arcs. On va montrer :

Pour tout couple $(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle)$ d'éléments de $\tilde{\pi}_1(Z, z_0)$, $b_Z(\langle \gamma \rangle) = b_Z(\langle \delta \rangle)$

$$\implies b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f(\langle \gamma \rangle) = b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f(\langle \delta \rangle)$$

$$b_Z(\langle \gamma \rangle) = b_Z(\langle \delta \rangle)$$

$$\implies \exists \langle \lambda \rangle \in \pi_1(Z, z_0) : \langle \gamma \rangle = \langle \lambda \rangle \bullet \langle \delta \rangle$$

$$\implies \exists \langle \lambda \rangle \in \pi_1(Z, z_0) : b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f(\langle \gamma \rangle) = b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f(\langle \lambda \rangle \bullet \langle \delta \rangle) = b_Y \psi^{-1} (\tilde{\pi}_1 f(\langle \lambda \rangle) \bullet \tilde{\pi}_1 f(\langle \delta \rangle)).$$

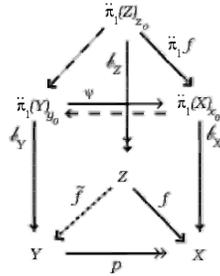
Par hypothèse, $\tilde{\pi}_1 f(\pi_1(Z, z_0)) \subset \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_0))$ D'où :

$$b_Z(\langle \gamma \rangle) = b_Z(\langle \delta \rangle) \implies \exists \langle \cdot \rangle \in \pi_1(Y, y_0) : b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f(\langle \gamma \rangle) = b_Y \psi^{-1} (\tilde{\pi}_1 p(\langle \cdot \rangle) \bullet \tilde{\pi}_1 f(\langle \delta \rangle))$$

$$\implies \exists \langle \cdot \rangle \in \pi_1(Y, y_0) : b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f(\langle \gamma \rangle) = b_Y (\psi^{-1} \tilde{\pi}_1 p(\langle \cdot \rangle) \bullet \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f(\langle \delta \rangle)) = b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f(\langle \delta \rangle)$$

Grâce à ce qui précède et à la surjectivité de b_Z , il est facile de montrer l'existence d'une application $\tilde{f} : Z \longrightarrow Y$ telle que : $\tilde{f} b_Z = b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f$

La commutativité du diagramme donne :



$$p \tilde{f} b_Z = p b_Y \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f = b_X \psi \psi^{-1} \tilde{\pi}_1 f = b_X \tilde{\pi}_1 f = f b_Z.$$

La surjectivité de b_Z entraîne alors l'égalité $p \tilde{f} = f$

b) Montrons que \tilde{f} est continue.

Soit z un point de Z . Il existe un voisinage ouvert U de $x = f(z)$ dans X et une p -copie \tilde{U} de U qui contient $y = \tilde{f}(z)$. Puisque Z est localement connexe par arcs, il contient un voisinage ouvert V de z , connexe par arcs, et tel que $f(V) \subset U$.

On va montrer que $\tilde{f}|_V = p_f^{-1} \circ f$.

Soit z' un autre point de V . Par définition, $\tilde{f}(z')$ est la fin d'un chemin $\tilde{\gamma}$ de Y , de début y_0 , qui est l'unique remontée suivant p d'un chemin γ de X , de début x_0 et de fin $f(z')$, arbitrairement choisi.

Puisque V est connexe par arcs, z et z' sont les bornes d'un chemin η de V . On peut donc choisir pour γ le composé $\delta \bullet (f \circ \eta)$, où δ est un chemin de X de bornage (x_0, x) .

Puisque $f(V) \subset U$, l'unique remontée suivant p de $f \circ \eta$ de début y n'est autre que $p_f^{-1} \circ f \circ \eta$.

D'autre part, soit $\tilde{\delta}$ l'unique remontée suivant p de δ , de début y_0 . Par définition de \tilde{f} , la fin de $\tilde{\delta}$ n'est autre que y .

Le composé $\tilde{\delta} \bullet (p_f^{-1} \circ f \circ \eta)$ est donc défini et se trouve être une remontée de $\delta \bullet (f \circ \eta)$ suivant p de début y_0 . D'après l'unicité d'une telle remontée et la définition de \tilde{f} , la fin de $\tilde{\delta} \bullet (p_f^{-1} \circ f \circ \eta)$ soit $p_f^{-1}(f(z'))$ est égale à $\tilde{f}(z')$.

On a donc montré $\tilde{f}|_V = p_f^{-1} \circ f$. \tilde{f} est donc continue sur V et en particulier au point z . Ce dernier étant arbitraire, \tilde{f} est continue.

En illustration de cette proposition, voici un résultat plus concret :

Corollaire

Pour toute application continue f de S^2 vers \mathbb{R}^2 , il existe un point x_0 de S^2 tel que : $f(x_0) = f(-x_0)$.

Avant de démontrer ceci, étudions le cas élémentaire de la dimension 1.

Corollaire 5.2.8

Pour toute application continue f de S^1 vers \mathbb{R} , il existe un point z_0 de S^1 tel que : $f(z_0) = f(-z_0)$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une application continue f de S^1 vers \mathbb{R} telle que : $\forall z \in S^1, f(z) \neq f(-z)$. Dans ce cas, soit g l'application de S^1 vers \mathbb{R} définie par : $g(z) := f(z) - f(-z)$.

L'application g est donc tout à la fois continue, partout non nulle et telle que : $\forall z \in S^1, g(z) = -g(-z)$.

Une telle application ne peut exister. En effet :

Toute application continue g de S^1 vers \mathbb{R} , telle que : $\forall z \in S^1, g(z) = -g(-z)$, s'annule en au moins un point de S^1 .

Soit z_0 un point de S^1 . Si $g(z_0) = 0$, on a fini.

Sinon soit A l'un des deux arcs de S^1 dont les bornes sont z_0 et $-z_0$. Puisque g est continue, $g(A)$ est un connexe de \mathbb{R} , autrement dit un intervalle, qui contient les deux nombres distincts et opposés $g(z_0)$ et $g(-z_0)$. $g(A)$ contient donc 0.

Corollaire 5.2.9

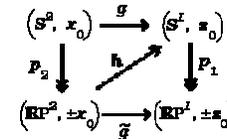
Pour toute application continue f de S^2 vers \mathbb{R}^2 , il existe un point x_0 de S^2 tel que : $f(x_0) = f(-x_0)$.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une application continue f de S^2 vers \mathbb{R}^2 , telle que : $\forall x \in S^2, f(x) \neq f(-x)$. Dans ce cas, soit g l'application de S^2 vers S^1 définie par : $g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$.

Puisque $\forall x \in S^2, g(x) = -g(-x)$, g induit une application continue \tilde{g}

de \mathbb{RP}^2 vers \mathbb{RP}^1 qui, à une paire $(x, -x)$ de points antipodaux de S^2 , associe la paire $(g(x), -g(x))$ de points antipodaux de S^1 .

Notons respectivement p_1 et p_2 les surjections canoniques de S^1 sur \mathbb{RP}^1 et de S^2 sur \mathbb{RP}^2 . Choisissons un point x_0 de S^2 et notons $z_0 := g(x_0)$.



Le diagramme ci-contre dans la catégorie des espaces topologiques munis d'une origine est commutatif. D'après 5.2.5 et 5.2.6,

le morphisme de groupes $\pi_1 \tilde{g}$ équivaut à un morphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ vers \mathbb{Z} . Son image est donc réduite à 0 et \tilde{g} remplit la condition (ii) de

5.2.7. D'après ce dernier résultat, il existe une remontée h de \tilde{g} suivant p_1 . A priori, rien ne prouve que $h p_2 = g$. C'est pourtant le cas. En effet $h p_2$ et g sont des remontées de $\tilde{g} p_2$ suivant p_1 qui coïncident en x_0 . D'après 5.1.3, on a donc : $h p_2 = g$. Cette égalité implique que, pour tout point x de S^2 , $g(x) = g(-x)$. Ceci contredit la définition même de g et, par suite, l'existence de f .

5.3 Classification des revêtements.

La démarche esposée dans cette section est suggérée par le corollaire :

Corollaire 5.3.1

Soient X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs et deux revêtements connexes par arcs $p : (Y, y_0) \twoheadrightarrow (X, x_0)$ et $q : (Z, z_0) \twoheadrightarrow (X, x_0)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe un homéomorphisme $\psi : (Y, y_0) \xrightarrow{\sim} (Z, z_0)$ tel que : $q \psi = p$.

(ii) $\tilde{\pi}_1 q (\pi_1(Z, z_0)) = \tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_0))$

L'implication « (i) \implies (ii) » est une conséquence immédiate de la functorialité de $\tilde{\pi}_1$. L'intérêt de la proposition réside dans la réciproque.

Montrons donc « (ii) \implies (i) ».

Puisque X est localement connexe par arcs, il est facile de vérifier que Y et Z le sont aussi. D'après 5.2.7 et 5.1.3 appliqués à p et à q , il existe un unique couple (ψ, φ) d'applications continues telles que :

$$\psi: (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0), \quad \varphi: (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0), \quad q\psi = p \text{ et } p\varphi = q.$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} p\varphi\psi = p \\ q\psi\varphi = q \end{cases}. \text{ Donc, d'après 5.1.3, } \begin{cases} \varphi\psi = 1_Y \\ \psi\varphi = 1_Z \end{cases}$$

Introduisons un peu de vocabulaire pour simplifier les énoncés.

Définition : revêtements munis d'une origine équivalents

Soient $p: (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ et $q: (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ deux revêtements munis d'une origine.

On dira que p et q sont équivalents lorsque :

- p et q sont des revêtements au-dessus du même espace topologique muni d'une origine (X, x_0) .
- Il existe un homéomorphisme $\psi: (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ tel que : $q\psi = p$.

Définition : sous-groupe associé à un revêtement

Soit un revêtement muni d'une origine $p: (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$

On appelle « sous-groupe associé » à p le sous-groupe $\pi_1 p (\pi_1(Y, y_0))$ de $\pi_1(X, x_0)$.

Le corollaire précédent dit que pour *certaines* espaces topologiques munis d'une origine (X, x_0) , deux revêtements munis d'une origine connexes par arcs au-dessus de (X, x_0) sont équivalents si et seulement s'ils ont le même sous-groupe associé.

On est donc amené à tenter de classer *certaines* revêtements, modulo la relation d'équivalence ci-dessus, au moyen de leur sous-groupe associé.

Commençons par préciser le sens de l'adjectif « certains » que nous avons employé deux fois ci-dessus. Dans une première approche, on introduit la définition suivante.

Définition

On notera Lca_0 la sous-catégorie pleine de Top_0 dont les objets sont les espaces topologiques connexes par arcs, localement connexes par arcs et munis d'une origine.

En particulier, on dira donc qu'un revêtement muni d'une origine

$$p: (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

est un Lca_0 -revêtement dès que (Y, y_0) et (X, x_0) sont des objets de Lca_0 .

Pour que l'on puisse classer les Lca_0 -revêtements au-dessus d'un objet (X, x_0) de Lca_0 au moyen de leur sous-groupe associé, il est nécessaire de pouvoir exhiber un tel revêtement qui soit associé à un sous-groupe

H de $\pi_1(X, x_0)$ choisi à l'avance.

La première question à laquelle on va répondre est la suivante :

Quelle propriété supplémentaire doit posséder un objet (X, x_0) de Lca_0 pour qu'il admette un Lca_0 -revêtement dont le sous-groupe associé est nul ? Remarquons que d'après 5.2.3, le sous-groupe associé à un revêtement $p: (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ connexe par arcs est nul si et seulement si Y est simplement connexe.

Sous-espaces topologiques semi-simplement connexes.

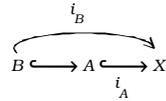
On dira qu'un sous-espace A d'un espace topologique X est **semi-simplement connexe dans X** lorsqu'il vérifie les deux propriétés équivalentes suivantes.

- ★ Tout lacet λ d'extrémité x contenu dans A est x -homotope dans X au lacet constant d'extrémité x .
- ★ Soit $i_A: A \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Pour tout point x de A , le morphisme de groupes $\pi_1 i_A: \pi_1(A, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$ est nul.

Proposition 5.3.2

Soient X un espace topologique et A un sous-espace de X semi-simplement connexe dans X .
 Tout sous-espace B de A est, lui aussi, semi-simplement connexe dans X .

L'injection canonique i_B se factorise à travers i_A comme dans le diagramme ci-contre.
Le résultat est donc une conséquence immédiate de la functorialité de π_1



Exemples

Tout sous-espace simplement connexe d'un espace topologique X y est semi-simplement connexe.

Tout sous-espace d'un espace topologique simplement connexe X y est semi-simplement connexe.

Notons, pour un point a de \mathbb{R}^2 , C_a le cercle de centre a et de rayon 1.

Si $\|a\| > 1$, C_a est semi-simplement connexe dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Si $\|a\| < 1$, C_a n'est pas semi-simplement connexe dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Définition

On dira qu'un espace topologique X est **localement semi-simplement connexe** lorsque chaque point x de X admet un voisinage U_x semi-simplement connexe dans X .

Remarque

D'après 5.3.2, un espace topologique X est localement semi-simplement connexe si et seulement s'il admet un système fondamental de voisinages semi-simplement connexes dans X .

Exemples d'espaces localement semi-simplement connexes

□ Tout espace topologique simplement connexe est évidemment localement semi-simplement connexe.

□ Le cercle S^1 et le plan privé de son origine sont tous deux localement semi-simplement connexes sans pour cela être simplement connexes.

□ Le sous-espace de \mathbb{R}^2 formé de la réunion des cercles de rayon $1/n$ et de centre $(1/n, 0)$, n décrivant \mathbb{N}^* , est connexe par arcs et localement connexe par arcs sans être localement semi-simplement connexe. En effet, le point $(0,0)$ n'y admet que des voisinages qui contiennent des cercles entiers et qui ne peuvent donc remplir la condition requise.



Proposition 5.3.3

Si un espace topologique X admet un revêtement $p : Y \twoheadrightarrow X$ simplement connexe, alors X est localement semi-simplement connexe.

Soit x_0 un point de X . Soit U_0 le voisinage de x_0 dont l'image réciproque par p est égale à la réunion d'une pile de p -copies. Soit x un point de U_0 . Soit λ un lacet d'extrémité x contenu dans U_0 . Soit enfin y un point de $p^{-1}(x)$.

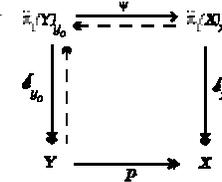
Notons alors $\tilde{\lambda}$ le lacet d'extrémité y obtenu en composant λ avec l'inverse local de p défini dans la p -copie de U_0 qui contient y . Puisque Y est simplement connexe, on a : $\langle \tilde{\lambda} \rangle = \langle \circ \rangle$. Donc en notant $\langle \lambda \rangle$ la classe de λ dans $\pi_1(X, x)$, on a : $\langle \lambda \rangle = \tilde{\pi}_1 p . \langle \tilde{\lambda} \rangle = \langle \circ \rangle$.

Théorème 5.3.4

Un objet (X, x_0) de Lca_0 admet un Lca_0 -revêtement simplement connexe $p : (Y, y_0) \twoheadrightarrow (X, x_0)$ si et seulement si X est localement semi-simplement connexe.

La proposition précédente montre la nécessité de cette condition.

Donnons-nous un espace topologique X connexe par arcs, localement connexe par arcs et localement semi-simplement connexe et construisons un revêtement simplement connexe et connexe par arcs.



Remarquons que, si $p : (Y, y_0) \twoheadrightarrow (X, x_0)$

est un tel revêtement, d'après 5.2.2, on a le diagramme ensemblistement commutatif ci-dessus.

La bijectivité de \tilde{b}_{y_0} provient de la simple connexité de Y .

Tout revêtement p de (X, x_0) simplement connexe et connexe par arcs doit donc être ensemblistement équivalent à \tilde{b}_{x_0} . Il nous reste donc à

construire une topologie sur $\tilde{\pi}_1(X)_{x_0}$ qui en fasse un espace simplement connexe et connexe par arcs et qui fasse de b_{x_0} un revêtement,

Notons pour simplifier $\tilde{X}_{[0]} := \tilde{\pi}_1(X)_{x_0}$ et $u_0 := b_{x_0} : \tilde{X}_{[0]} \longrightarrow X$.

Remarquons que, puisque X est localement connexe par arcs et localement semi-simplement connexe, il admet, d'après 5.3.2, un système fondamental \mathcal{U} de voisinages qui sont à la fois connexes par arcs et semi-simplement connexes dans X .

Soit $\langle \gamma \rangle$ un élément de $\tilde{X}_{[0]}$; soit x la fin de $\langle \gamma \rangle$.

Pour tout voisinage U de x appartenant à \mathcal{U} , on définit :

$$U_{\langle \gamma \rangle} := \langle \gamma \rangle \bullet \langle \eta \rangle_X \mid \langle \eta \rangle \in \tilde{\pi}_1(U)_x.$$

$U_{\langle \gamma \rangle}$ est donc une partie de $\tilde{X}_{[0]}$ contenant $\langle \gamma \rangle$ et contenue dans $u_0^{-1}(U)$.

(1) La restriction de u_0 à $U_{\langle \gamma \rangle}$ induit une bijection de $U_{\langle \gamma \rangle}$ sur U .

La surjectivité provient du fait que U est connexe par arcs et l'injectivité, du fait que U est semi-simplement connexe dans X .

(2) $\forall \langle \eta \rangle \in \tilde{\pi}_1(U)_x, U_{\langle \gamma \rangle \bullet \langle \eta \rangle} = U_{\langle \gamma \rangle}$.

Soit y la fin de $\langle \eta \rangle$. Rappelons les deux faits élémentaires suivants :

$$\forall \langle \cdot \rangle \in \tilde{\pi}_1(U)_y, \left(\langle \gamma \rangle \bullet \langle \eta \rangle \right) \bullet \langle \cdot \rangle = \langle \gamma \rangle \bullet \left(\langle \eta \rangle \bullet \langle \cdot \rangle \right)$$

$$\forall \langle v \rangle \in \tilde{\pi}_1(U)_x, \langle \gamma \rangle \bullet \langle v \rangle = \left(\langle \gamma \rangle \bullet \langle \eta \rangle \right) \bullet \left(\langle \eta \rangle^{-1} \bullet \langle v \rangle \right)$$

Les inclusions $U_{\langle \gamma \rangle \bullet \langle \eta \rangle} \subset U_{\langle \gamma \rangle}$ et $U_{\langle \gamma \rangle} \subset U_{\langle \gamma \rangle \bullet \langle \eta \rangle}$ proviennent respectivement du premier et du second de ces faits.

On peut aussi formuler ce résultat comme suit :

(2') $\forall \langle \eta \rangle \in U_{\langle \gamma \rangle}, U_{\langle \eta \rangle} = U_{\langle \gamma \rangle}$.

(3) Si $U_{\langle \gamma \rangle} \cap U_{\langle \delta \rangle} \neq \emptyset$, alors $U_{\langle \gamma \rangle} = U_{\langle \delta \rangle}$.

C'est une conséquence immédiate du résultat formulé précédemment.

(4) Pour tout couple $(U_{\langle \gamma \rangle}, V_{\langle \delta \rangle})$ où U et V appartiennent à \mathcal{U} , tel que $U_{\langle \gamma \rangle} \cap V_{\langle \delta \rangle} \neq \emptyset$, pour tout élément $\langle \epsilon \rangle$ de $U_{\langle \gamma \rangle} \cap V_{\langle \delta \rangle}$, et pour tout élément W de \mathcal{U} contenant la fin de $\langle \epsilon \rangle$ et contenu dans $U \cap V$, $W_{\langle \epsilon \rangle} \subset U_{\langle \gamma \rangle} \cap V_{\langle \delta \rangle}$

De façon évidente, on a : $W \subset U \implies W_{\langle \epsilon \rangle} \subset U_{\langle \epsilon \rangle}$. D'autre part, d'après (1), on a : $\langle \epsilon \rangle \in U_{\langle \gamma \rangle} \cap V_{\langle \delta \rangle} \implies U_{\langle \gamma \rangle} = U_{\langle \epsilon \rangle}$ et $V_{\langle \delta \rangle} = V_{\langle \epsilon \rangle}$.

La conclusion vient immédiatement.

Notons $\mathcal{V} := \{U_{\langle \gamma \rangle} \mid U \in \mathcal{U}, \langle \gamma \rangle \in u_0^{-1}(U)\}$.

D'après le précédent point, puisque \mathcal{U} est un système fondamental de voisinages, \mathcal{V} possède les propriétés d'un tel système.

Munissons donc $\tilde{X}_{[0]}$ de la topologie engendrée par \mathcal{V} .

Soient x un point de X , U un voisinage de x appartenant à \mathcal{U} et

$$\mathcal{V}_U := \{U_{\langle \gamma \rangle} \mid \langle \gamma \rangle \in u_0^{-1}(U)\}.$$

Il est clair que $u_0^{-1}(U)$ est égal à la réunion des membres de \mathcal{V}_U . Il est facile de vérifier que les points (1) et (3) ci-dessus entraînent que \mathcal{V}_U est une pile de u_0 -copies de U . \mathcal{U} étant un système fondamental de voisinages, on peut en conclure que $u_0 : \tilde{X}_{[0]} \longrightarrow X$ est un revêtement.

$\tilde{X}_{[0]}$ est connexe par arcs,

Notons \tilde{x}_0 le point de $\tilde{X}_{[0]}$ qui est la classe du lacet constant en x_0 .

Soient $\langle \gamma \rangle$ un point de $\tilde{X}_{[0]}$ de fin x et γ l'un de ses représentants.

Notons, pour tout point t de I , $\gamma_t := \gamma|_{[0, t]}$. On va montrer que

$\tilde{\gamma} : t \longmapsto \langle \gamma_t \rangle$ est une application continue de I vers $\tilde{X}_{[0]}$.

Notons, pour tout couple $(r; s)$ de points de I ,

$$\text{- Si } r \leq s, \gamma_{r \rightarrow s} := \gamma|_{[r, s]}$$

$$\text{- Si } r \geq s, \gamma_{r \rightarrow s} := \left(\gamma|_{[r, s]} \right)^{-}$$

Remarquons que, pour tout couple $(r; s)$ de points de I , on a :

$$\langle \gamma_r \rangle \bullet \langle \gamma_{r \rightarrow s} \rangle = \langle \gamma_s \rangle.$$

Soient t un point de I et $U_{\langle \eta \rangle}$ un élément de \mathcal{V} qui contient $\langle \gamma_t \rangle$.

D'après (2'), $U_{\langle \eta \rangle} = U_{\langle \gamma_t \rangle}$. D'autre part, d'après (1), U contient $\gamma(t)$

Puisque γ est continu, il existe un voisinage $[r, s]$ de t dans I tel

que $\gamma[r, s] \subset U$.

D'après l'égalité ci-dessus, on a : $\langle \gamma_r \rangle = \langle \gamma_t \rangle \bullet \langle \gamma_{t \rightarrow r} \rangle \in U_{\langle \gamma_t \rangle}$.
 Donc, d'après (2), $U_{\langle \gamma_t \rangle} = U_{\langle \gamma_r \rangle}$.
 Puisque, pour tout point t' de $[r, s]$, $\langle \gamma_{t'} \rangle = \langle \gamma_t \rangle \bullet \langle \gamma_{t \rightarrow t'} \rangle$, l'image de $[r, s]$ par $\tilde{\gamma}$ est contenue dans la u_0 -copie $U_{\langle \gamma_t \rangle}$ de U .
 Le voisinage $U_{\langle \gamma_t \rangle}$ de $\langle \gamma_t \rangle$ étant choisi arbitrairement dans un système fondamental de voisinages, $\tilde{\gamma}$ est continue en t .
 Tout point de $\tilde{X}_{[0]}$ est donc relié à \tilde{x}_0 par un chemin.

$\tilde{X}_{[0]}$ est simplement connexe.

Soit $\langle \lambda \rangle$ un élément de $\pi_1(\tilde{X}_{[0]}, \tilde{x}_0)$ et soit λ l'un de ses représentants. Notons $\tilde{\lambda} := u_0 \lambda$. Avec les notations introduites ci-dessus, λ et $\tilde{\lambda}$ sont deux remontées de λ suivant u_0 qui coïncident en 0 .
 D'après 5.1.3, on a : $\lambda = \tilde{\lambda}$. En particulier : $\tilde{x}_0 = \lambda(1) = \tilde{\lambda}(1) = \langle \lambda \rangle$.
 Autrement dit $\tilde{\pi}_1 u_0 \langle \lambda \rangle$ est égal à l'élément neutre de $\pi_1(X, x_0)$.
 D'après 5.2.3, $\langle \lambda \rangle$ est donc égal à l'élément neutre de $\pi_1(\tilde{X}_{[0]}, \tilde{x}_0)$.
 $\langle \lambda \rangle$ étant arbitraire, $\pi_1(\tilde{X}_{[0]}, \tilde{x}_0)$ est réduit à son élément neutre.

Définition

Si (X, x_0) est un objet de Lca_0 localement semi-simplement connexe, on appelle **revêtement universel de (X, x_0)** le Lca_0 -revêtement simplement connexe, $u_0 : (\tilde{X}_{[0]}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ construit au théorème précédent.

Ce théorème permet de montrer le résultat plus puissant qui suit :

Théorème 5.3.5

Soit (X, x_0) un objet de Lca_0 qui admet un revêtement universel $u_0 : (\tilde{X}_{[0]}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$.
 Pour tout sous-groupe H de $\pi_1(X, x_0)$, il existe un Lca_0 -revête-

ment de (X, x_0) , soit $u_H : (\tilde{X}_H, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, dont le sous-groupe associé est égal à H .

De plus u_0 se factorise de la façon ci dessous où θ_H est un revêtement. $(\tilde{X}_{[0]}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\theta_H} (\tilde{X}_H, y_0) \xrightarrow{u_H} (X, x_0)$

On définit sur $\tilde{X}_{[0]} = \tilde{\pi}_1(X)_{x_0}$ la relation : $\langle \gamma \rangle \sim \langle \delta \rangle \iff u_0 \langle \gamma \rangle = u_0 \langle \delta \rangle$
 $\langle \gamma \rangle \bullet \langle \delta \rangle^{-1} \in H$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que le fait que H soit un sous-groupe de $\pi_1(X, x_0)$ entraîne que la relation \sim est une équivalence.

Notons \tilde{X}_H l'espace topologique obtenu en munissant le quotient de la relation \sim de la topologie quotient induite par celle de $\tilde{X}_{[0]}$. Notons θ_H la surjection canonique de $\tilde{X}_{[0]}$ sur \tilde{X}_H . Rappelons que θ_H est continue et ouverte.

Puisque, par définition, pour tout couple $(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle)$ d'éléments de $\tilde{X}_{[0]}$, on a : $\theta_H \langle \gamma \rangle = \theta_H \langle \delta \rangle \iff u_0 \langle \gamma \rangle = u_0 \langle \delta \rangle$, l'application u_0 induit une application continue et surjective $u_H : \tilde{X}_H \longrightarrow X$ telle que : $u_0 = u_H \theta_H$.

Pour tout élément $U_{\langle \gamma \rangle}$ de \mathcal{V} , $\theta_H(U_{\langle \gamma \rangle})$ est une u_H -copie de U .

C'est une conséquence immédiate de l'égalité $u_0 = u_H \theta_H$ et du fait que $U_{\langle \gamma \rangle}$ soit une u_0 -copie de U .

Pour tout élément U de \mathcal{U} et tout élément $(\langle \gamma \rangle, \langle \delta \rangle)$ de $(u_0^{-1}(U))^2$
 $\theta_H(U_{\langle \gamma \rangle}) \cap \theta_H(U_{\langle \delta \rangle}) \neq \emptyset \implies \theta_H(U_{\langle \gamma \rangle}) = \theta_H(U_{\langle \delta \rangle})$

D'après (2) de la précédente démonstration, $\theta_H(U_{\langle \gamma \rangle}) \cap \theta_H(U_{\langle \delta \rangle}) \neq \emptyset$ entraîne que l'on peut supposer que : $\theta_H \langle \gamma \rangle = \theta_H \langle \delta \rangle$.

Autrement dit : il existe un élément $\langle \lambda \rangle$ de H tel que : $\langle \gamma \rangle = \langle \lambda \rangle \bullet \langle \delta \rangle$

Un élément de $\theta_H(U_{\langle \gamma \rangle})$ est de la forme $\theta_H(\langle \gamma \rangle \bullet \langle \eta \rangle)$, donc est égal à

$\theta_H(\langle \lambda \rangle \bullet \langle \delta \rangle \bullet \langle \eta \rangle)$ qui, par définition de θ_H est égal à $\theta_H(\langle \delta \rangle \bullet \langle \eta \rangle)$.

Tout élément de $\theta_H(U_{\langle \gamma \rangle})$ appartient donc à $\theta_H(U_{\langle \delta \rangle})$. On montre

l'inclusion inverse de la même manière.

Les deux faits précédents permettent de montrer facilement que u_H est un revêtement.

La connexité par arcs de \tilde{X}_H est une conséquence immédiate de la connexité par arcs de $\tilde{X}_{\{0\}}$ et de la continuité et de la surjectivité de θ_H .

$$\tilde{\pi}_1 p_H \left(\pi_1 \left(\tilde{X}_H, \theta_H \left(\tilde{x}_0 \right) \right) \right) = H$$

Soit $\langle \lambda \rangle$ un élément de H et soit λ l'un de ses représentants. Avec les notations introduites lors de la précédente démonstration, soit $\tilde{\lambda}$ l'uni-

que remontée de λ suivant u_0 de début \tilde{x}_0 . Il est facile de vérifier

que $\theta_H \tilde{\lambda}$ est l'unique remontée de λ suivant u_H de début $\theta_H \left(\tilde{x}_0 \right)$.

Puisque la fin de $\tilde{\lambda}$ est $\langle \lambda \rangle$, la fin de $\theta_H \tilde{\lambda}$ est $\theta_H \left(\langle \lambda \rangle \right) = \theta_H \left(\tilde{x}_0 \right)$.

$\theta_H \tilde{\lambda}$ est donc un élément de $\pi_1 \left(\tilde{X}_H, \theta_H \left(\tilde{x}_0 \right) \right)$ et $\langle \lambda \rangle = \tilde{\pi}_1 u_H$

$$\left(\left(\theta_H \tilde{\lambda} \right) \right)$$

est un élément de $\tilde{\pi}_1 u_H \left(\pi_1 \left(\tilde{X}_H, \theta_H \left(\tilde{x}_0 \right) \right) \right)$

Réciproquement, soient $\langle \Lambda \rangle$ un élément de $\pi_1 \left(\tilde{X}_H, \theta_H \left(\tilde{x}_0 \right) \right)$ et Λ

l'un de ses représentants. Posons $\lambda := u_H \Lambda$. Par un raisonnement analogue au précédent et avec les mêmes notations, on obtient :

$$\Lambda = \theta_H \tilde{\lambda} \quad \text{En particulier : } \theta_H \left(\tilde{x}_0 \right) = \Lambda(1) = \theta_H \tilde{\lambda}(1) = \theta_H \left(\langle \lambda \rangle \right)$$

Autrement dit : $\tilde{\pi}_1 u_H \left(\langle \Lambda \rangle \right) = \langle \lambda \rangle \in H$.

θ_H est un revêtement

Soit $\langle \gamma \rangle$ un élément de $\tilde{X}_{\{0\}}$. Rappelons que :

$$\theta_H^{-1} \left(\theta_H \langle \gamma \rangle \right) = \left\{ \langle \lambda \rangle \bullet \langle \gamma \rangle \mid \langle \lambda \rangle \in H \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \theta_H^{-1} \left(\theta_H \left(U_{\langle \gamma \rangle} \right) \right) &= \left\{ \langle \lambda \rangle \bullet \langle \gamma \rangle \bullet \langle \eta \rangle_X \mid \langle \eta \rangle \in \tilde{\pi}_1(U)_X : \langle \lambda \rangle \in H \right\} \\ &= \bigcup_{\langle \lambda \rangle \in H} U_{\langle \lambda \rangle \bullet \langle \gamma \rangle} \end{aligned}$$

D'après (3) de la précédente démonstration, la famille $\left\{ U_{\langle \lambda \rangle \bullet \langle \gamma \rangle} \mid \langle \lambda \rangle \in H \right\}$ est une pile. De plus, puisque $U_{\langle \gamma \rangle}$ et $\theta_H \left(U_{\langle \lambda \rangle \bullet \langle \gamma \rangle} \right)$ sont respectivement une u_0 -copie et une u_H -copie de U , $U_{\langle \lambda \rangle \bullet \langle \gamma \rangle}$ est une θ_H -copie de $\theta_H \left(U_{\langle \gamma \rangle} \right)$.

On obtient alors le théorème de classification des revêtements au moyen de leur sous-groupe associé.

Le corollaire suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur, justifie l'appellation de revêtement universel.

Corollaire 5.3.6

<p>Soit (X, x_0) un espace topologique muni d'une origine qui admet un revêtement universel u_0 de $(\tilde{X}_{\{0\}}, \tilde{x}_0)$ sur (X, x_0).</p> <p>Alors pour tout LCA-revêtement $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, il existe un revêtement $u: (\tilde{X}_{\{0\}}, \tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0)$ avec : $u_0 = q u$.</p>	
---	--

Théorème 5.3.7

<p>Soit (X, x_0) un espace topologique muni d'une origine qui admet un revêtement universel.</p> <p>La correspondance entre un LCA revêtement de (X, x_0) et son sous-groupe associé induit une bijection entre, d'une part, l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ et, d'autre part, les classes d'équivalence des LCA-revêtements de (X, x_0).</p>
--

C'est une conséquence immédiate de 5.3.1 et de 5.3.5.

Tous les espaces considérés étant connexes par arcs, on peut se demander ce que devient cette classification lorsque l'on « oublie les origines ». Oublier les origines revient à identifier les revêtements connexes par arcs et munis d'une origine au-dessus de (X, x_0) dont les applications sous-jacentes sont les mêmes et qui ne diffèrent que par leurs origines.

Corollaire 5.3.6

Soit (X, x_0) un espace topologique muni d'une origine qui admet un revêtement universel $u_0 : (\tilde{X}_{(0)}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$. Soient $q_1 : (Z_1, z_1) \longrightarrow (X, x_0)$ et $q_2 : (Z_2, z_2) \longrightarrow (X, x_0)$ deux LCA-revêtements de (X, x_0) . Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Les sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ associés à q_1 et à q_2 sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$.

(ii) q_1 et q_2 sont respectivement équivalents à deux LCA-revêtements $p_1 : (Y, y_1) \longrightarrow (X, x_0)$ et $p_2 : (Y, y_2) \longrightarrow (X, x_0)$ de (X, x_0) , dont les applications sous-jacentes sont les mêmes et qui ne diffèrent donc que par leurs origines.

(ii) \implies (i) D'après 5.3.6, il suffit de montrer que les sous-groupes associés aux deux revêtements, $p_1 = p_2$ du (ii) sont conjugués dans $\pi_1(X, x_0)$. Les groupes $\pi_1(Y, y_1)$ et $\pi_1(Y, y_2)$ se déduisent l'un de l'autre par une conjugaison associée à une flèche $\langle \gamma \rangle$ du groupoïde $\tilde{\pi}_1 Y$, de début y_1 et de fin y_2 . Les sous-groupes de $\pi_1(X, x_0)$ associés à p_1 et à p_2 se déduisent donc l'un de l'autre par la conjugaison associée à l'élément $p \langle \gamma \rangle$ du groupe $\pi_1(X, x_0)$.

(i) \implies (ii) Soient deux sous-groupes H et H' de $\pi_1(X, x_0)$ qui se déduisent l'un de l'autre par une conjugaison associée à un élément $\langle \lambda \rangle$ de $\pi_1(X, x_0)$. Notons $q : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ et $q' : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ les revêtements respectivement associés à H et à H' , par 5.3.5.

D'après 5.3.6, il suffit de montrer (ii) pour q et q' .
 La translation à gauche $\tau_{\langle \lambda \rangle} : \tilde{X}_{(0)} = \tilde{\pi}_1(X)_{x_0} \longrightarrow \tilde{\pi}_1(X)_{x_0} = \tilde{X}_{(0)}$ vérifie : $\theta_H \langle \gamma \rangle = \theta_H \langle \delta \rangle \iff \theta_{H'} \tau_{\langle \lambda \rangle} \langle \gamma \rangle = \theta_{H'} \tau_{\langle \lambda \rangle} \langle \delta \rangle$.
 $\tau_{\langle \lambda \rangle}$ induit donc une bijection ϕ de Z sur Z' telle que : $\phi \theta_H = \theta_{H'} \tau_{\langle \lambda \rangle}$.
 Il est facile de voir que : $\forall \langle \eta \rangle \in \tilde{X}_{(0)}, \tau_{\langle \lambda \rangle} (U_{\langle \eta \rangle}) = U_{\tau_{\langle \lambda \rangle} \langle \eta \rangle}$.
 D'où : $\phi \theta_H (U_{\langle \eta \rangle}) = \theta_{H'} \tau_{\langle \lambda \rangle} (U_{\langle \eta \rangle}) = \theta_{H'} (U_{\tau_{\langle \lambda \rangle} \langle \eta \rangle})$.

On en déduit que ϕ est un homéomorphisme de Z sur Z' . On laisse au lecteur le soin de vérifier que $q' \phi = q$.

En posant : $z_1 := \phi^{-1}(z'_0)$ les deux revêtements connexes par arcs et munis d'une origine au-dessus de (X, x_0) , $q : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ et $q' \phi : (Z, z_1) \longrightarrow (X, x_0)$ ne diffèrent que par leurs origines et ont respectivement H et H' pour sous-groupes associés.

5.4 Revêtements et actions de groupes

Définition (Rappel)

Soient un groupe (G, \cdot) et un espace topologique Y .

La donnée d'une **action continue de G sur Y** consiste en la donnée d'un morphisme Φ de G vers le groupe des homéomorphismes de Y dans lui-même.

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on écrit gy pour $\Phi(g)(y)$, et on dit que G **agit (continument) sur Y** .

On a alors : $\forall (g, g', y) \in G \times G \times Y, (gg')y = g(g'y)$ et $1_G y = y$

La relation \otimes_G définie sur Y par : $y \otimes_G y' \iff \exists g \in G; y' = gy$ est une équivalence.

Pour tout point y de Y , soit $Gy := \{gy; g \in G\}$ la classe de y modulo \otimes_G . On appelle Gy la **G-orbite de y** .

On note Y/G l'espace topologique constitué de l'ensemble des G-orbites de Y muni de la topologie finale de la surjection canonique q_G associée à \otimes_G , $q_G : Y \longrightarrow Y/G$.

On dit que G agit **librement** sur Y si, pour tout élément g de G , on a : $(\exists y \in Y: y = gy) \implies g = 1_G$.

On dit que G agit **transitivement** sur Y si, pour tout couple (y_1, y_2) d'éléments de Y , il existe un élément g de G tel que : $y_2 = gy_1$.

A titre d'exemple, le groupe abélien sous-jacent à un espace vectoriel topologique V agit continument, librement et transitivement sur V via les translations.

Dans cette section, on établira d'abord la condition nécessaire et suffisante que doit remplir un revêtement $p : Y \longrightarrow X$ pour être la surjection canonique associée à l'action d'un groupe G sur Y . Puis, réciproquement, on établira la condition nécessaire et suffisante que doit remplir l'action d'un groupe G sur Y pour que la surjection canonique associée, $q_G : Y \longrightarrow Y/G$, soit un revêtement.

Pour commencer deux remarques s'imposent :

Remarques

Lorsqu'un groupe G agit sur un espace topologique Y , chaque homéomorphisme ψ de Y dans lui-même qui est l'image d'un élément de G par l'action de G sur Y vérifie : $q_G \psi = q_G$, où q_G est la surjection canonique associée à l'action de G sur Y .

De plus, pour tout point y de Y , l'action de G sur Y induit une action **transitive** de G sur la G -orbite de y c'est à dire sur $q_G^{-1}(q_G(y))$.

Définition

Soit une surjection continue $p : Y \longrightarrow X$. On appelle **automorphisme de p** tout homéomorphisme ψ de Y dans lui-même qui vérifie : $p \psi = p$.

L'ensemble des automorphismes de p muni de la composition usuelle est un groupe que l'on note $\text{Aut } p$.

Remarque

Dans le cas où $q_G : Y \longrightarrow Y/G$, est la surjection canonique associée à l'action d'un groupe G sur Y , l'image de cette action est un sous-groupe de $\text{Aut } q_G$. On en déduit facilement que l'action usuelle de $\text{Aut } q_G$ sur Y induit une action transitive de $\text{Aut } q_G$ sur chaque « fibre » $q_G^{-1}(q_G(y))$ de q_G .

Proposition 5.4.1

Pour qu'une surjection continue donnée $p : Y \longrightarrow X$ puisse être identifiée à la surjection canonique associée à l'action d'un groupe G sur Y , il faut que $\text{Aut } p$ agisse transitivement sur chaque « fibre » $p^{-1}(p(y))$ de p .

C'est une conséquence immédiate des remarques précédentes.

Définition

On dira qu'une surjection continue $p : Y \longrightarrow X$ est **normale** lorsque, pour tout point x de X , $\text{Aut } p$ agit transitivement sur $p^{-1}(x)$.

Proposition 5.4.2

Soient X un espace topologique et $p : Y \longrightarrow X$ une surjection continue, normale et ouverte. Soit $q : Y \longrightarrow Y/(\text{Aut } p)$ la surjection canonique associée à $\text{Aut } p$. Alors il existe un homéomorphisme $\phi : X \longrightarrow Y/(\text{Aut } p)$ tel que : $q = \phi p$.

Puisque p est normal, on a, pour tout couple (y_1, y_2) de points de Y , $p(y_1) = p(y_2) \iff q(y_1) = q(y_2)$.

Il est facile d'en déduire qu'il existe une bijection $\phi : X \longrightarrow Y/(\text{Aut } p)$ telle que : $q = \phi p$.

Soit V un ouvert de X . $V = p(p^{-1}(V)) \implies \phi(V) = q(p^{-1}(V))$, $p^{-1}(V)$ étant un ouvert de Y et q étant ouverte, $\phi(V)$ est un ouvert de $Y/(\text{Aut } p)$.

En échangeant p et q d'une part, et ϕ et ϕ^{-1} d'autre part, un raisonnement analogue montre que ϕ est continu.

Exemples

Soit $p : \prod_{a \in A} Y_a \longrightarrow X$ le revêtement trivial associé à la famille d'homéomorphismes $\{\phi_a : Y_a \longrightarrow X\}_{a \in A}$.

Le groupe $\text{Aut } p$ est isomorphe au groupe des bijections de A dans

lui-même. Si σ est une telle bijection, il est facile de vérifier que

$$\begin{cases} \prod_{a \in A} Y_a & \longrightarrow & \prod_{a \in A} Y_a \\ y_a & \longmapsto & \phi_{\sigma a}^{-1} \phi_a(y_a) \end{cases} \text{ est un automorphisme de } p$$

□ Soit $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ le revêtement du cercle du 1.24. Il est facile de vérifier que les automorphismes de p ne sont autres que les translations de pas entier et donc que le groupe $\text{Aut } p$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

□ Soit $p_1 : S^1 \longrightarrow \mathbb{RP}^1$ le revêtement usuel à deux feuillettes, $\text{Aut } p_1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Corollaire 5.4.3

Pour tout revêtement connexe $p : Y \longrightarrow X$,
 $\text{Aut } p$ agit continument et librement sur Y .

□ C'est une conséquence immédiate de 5.1.3.

Proposition 5.4.4

Soient X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs et $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ un revêtement connexe de X . Les cinq assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_0))$ est normal dans $\pi_1(X, x_0)$
- (ii) Pour tout point y de Y , $\tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y))$ est normal dans $\pi_1(X, p(y))$
- (iii) Pour tout élément (y_1, y_2) de Y^2 tel que : $p(y_1) = p(y_2)$, $\tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_1)) = \tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_2))$.
- (iv) p est normal.
- (v) Si $q : Y \longrightarrow Y/(\text{Aut } p)$ désigne la surjection canonique associée à $\textcircled{\text{Aut } p}$, alors il existe un homéomorphisme $\phi : X \longrightarrow Y/(\text{Aut } p)$ tel que : $q = \phi p$.

Remarquons que X est connexe par arcs, que, puisque p est un homéomorphisme local, Y est localement connexe par arcs et donc que Y est connexe par arcs.

(iv) \implies (i) Il suffit de montrer que pour tout élément $\langle \lambda \rangle$ de $\pi_1(Y, y_0)$ et tout élément $\langle \gamma \rangle$ de $\pi_1(X, x_0)$ $\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \in \tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_0))$.

D'après 5.2.2, il existe un unique élément $\langle \gamma \rangle$ de $\tilde{\pi}_1 Y$, de début y_0 tel que : $\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle = \langle \gamma \rangle$. Notons y la fin de $\langle \gamma \rangle$. On a : $p(y) = p(y_0) = x_0$.

p étant normal, il existe un élément ψ de $\text{Aut } p$ tel que : $\psi(y) = y_0$.

$$\begin{aligned} \langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle &= \tilde{\pi}_1 p (\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle) = \tilde{\pi}_1 (p \circ \psi) (\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle) \\ &= \tilde{\pi}_1 p (\tilde{\pi}_1 \psi (\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle)). \end{aligned}$$

Puisque $\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle$ appartient à $\pi_1(Y, y)$, $\tilde{\pi}_1 \psi (\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle)$ appartient à $\pi_1(Y, y_0)$.

(i) \implies (ii) Soient $\langle \lambda \rangle$ un élément de $\pi_1(Y, y)$ et $\langle \gamma \rangle$ un élément de $\pi_1(X, p(y))$. Y étant connexe par arcs, il existe un élément $\langle \gamma \rangle$ de $\tilde{\pi}_1 Y$ de début y_0 et de fin y

$$\begin{aligned} \langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle &= \tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \left(\tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle^{-1} \right) \\ &\quad \cdot \left(\tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle^{-1} \right) \\ &\quad \cdot \left(\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle^{-1} \right) \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle \end{aligned}$$

$\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle$ peut donc s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \langle \alpha \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \beta \rangle \cdot \langle \alpha \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle$$

où : $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, $\beta \in \pi_1(Y, y_0)$.

$\tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_0))$ étant normal dans $\pi_1(X, x_0)$, il existe un élément $\langle \nu \rangle$ de $\pi_1(Y, y_0)$ tel que : $\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle = \tilde{\pi}_1 p (\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \langle \nu \rangle \cdot \langle \gamma \rangle)$.

D'où : $\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle \in \tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y))$

(ii) \implies (iii) Y étant connexe par arcs, il existe un élément $\langle \gamma \rangle$ de $\tilde{\pi}_1 Y$ de début y_1 et de fin y_2 . On a :

$$\tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_2)) \subset \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_2)) \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle^{-1} \subset \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_1))$$

La première inclusion provient de la normalité de $\tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_2))$ et la seconde est évidente. On montre de façon analogue que :

$$\tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_1)) \subset \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_2))$$

(iii) \implies (iv) Soient $p_1 : (Y, y_1) \twoheadrightarrow (X, x)$ et $p_2 : (Y, y_2) \twoheadrightarrow (X, x)$ deux « localisations » de p . D'après 5.2.7 et (iii), il existe une remontée ψ de p_1 suivant p_2 et une remontée ϕ de p_2 suivant p_1 telles que $\psi(y_1) = y_2$ et $\phi(y_2) = y_1$.

Puisque p_1 et p_2 admettent tous deux p comme application sous-jacente, il est facile de vérifier que ψ appartient à $\text{Aut } p$ et que $\phi = \psi^{-1}$.

(v) \iff (iv) C'est une conséquence immédiate de 5.1.5, 5.4.1, 5.4.2 et 5.4.3.

Définition (rappel)

Soient G un groupe et H l'un de ses sous-groupes.

Soit $N(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$. $N(H)$ est un sous-groupe de G .

De plus $N(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.

On appelle $N(H)$ le **normalisateur** de H .

Proposition 5.4.5

Soient X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs et $p : (Y, y_0) \twoheadrightarrow (X, x_0)$ un revêtement connexe de X .
Notons : $H := \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_0))$
Alors $\text{Aut } p$ est isomorphe à $N(H)/H$.

Soit ψ un élément de $\text{Aut } p$. Soit $y_1 = \psi(y_0)$.

$$(1) \quad \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_1)) = \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_0))$$

5.2.7 appliqué à ψ et à ψ^{-1} donne les deux inclusions ci-dessous :
 $\tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_1)) \subset \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_0))$; $\tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_1)) \supset \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_0))$.

Y étant connexe par arcs, $\tilde{\pi}_1 Y$ contient un élément $\langle \gamma \rangle$ de début y_0 et de fin y_1 .

$$(2) \quad \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle \in NH$$

Soit $\langle \lambda \rangle$ un élément de $\pi_1(Y, y_0)$

$$\tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \lambda \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle = \tilde{\pi}_1 p(\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \langle \gamma \rangle) \in \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_1))$$

D'après (1), $\tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \lambda \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle \in \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_0)) = H$.

$\langle \lambda \rangle$ étant arbitraire, on a : $\tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle^{-1} \cdot H \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle \subset H$.

D'après (1), il existe un élément $\langle \rangle$ de $\pi_1(Y, y_1)$ tel que : $\tilde{\pi}_1 p\langle \lambda \rangle = \tilde{\pi}_1 p\langle \rangle$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \lambda \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle^{-1} &= \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle^{-1} \\ &= \tilde{\pi}_1 p(\langle \gamma \rangle \cdot \langle \rangle \cdot \langle \gamma \rangle^{-1}) \in \tilde{\pi}_1 p(\pi_1(Y, y_0)) = H. \end{aligned}$$

$\langle \lambda \rangle$ étant arbitraire, on a : $\tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle \cdot H \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle^{-1} \subset H$.

Il est facile de conclure que $\tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle \in NH$

Soit $\Theta : NH \twoheadrightarrow NH/H$ la surjection canonique. D'après (2), la correspondance $\psi \longmapsto \langle \gamma \rangle \longmapsto \Theta(\tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle)$ associe un élément de NH/H à un élément de $\text{Aut } p$. Montrons que cette correspondance définit une application de $\text{Aut } p$ vers NH/H

Soient $\langle \gamma \rangle$ et $\langle \delta \rangle$ deux éléments de $\tilde{\pi}_1 Y$ de début y_0 et de fin y_1 .

$$\text{On a évidemment : } \langle \gamma \rangle = (\langle \gamma \rangle \cdot \langle \delta \rangle^{-1}) \cdot \langle \delta \rangle$$

D'où : $\tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle = \tilde{\pi}_1 p(\langle \gamma \rangle \cdot \langle \delta \rangle^{-1}) \cdot \tilde{\pi}_1 p\langle \delta \rangle$ où : $\tilde{\pi}_1 p(\langle \gamma \rangle \cdot \langle \delta \rangle^{-1}) \in H$.

$$\text{Donc : } \Theta(\tilde{\pi}_1 p\langle \gamma \rangle) = \Theta(\tilde{\pi}_1 p\langle \delta \rangle)$$

Notons Ξ l'application ainsi définie de $\text{Aut } p$ vers NH/H

Ξ est un morphisme de groupes.

Soient ψ et ϕ deux éléments de $\text{Aut } p$. Soient $\langle \gamma \rangle$ et $\langle \delta \rangle$ deux éléments de $\tilde{\pi}_1 Y$ de début y_0 et de fins respectives $\psi(y_0)$ et $\phi(y_0)$

On peut composer $\langle \gamma \rangle$ et $\tilde{\pi}_1 \psi\langle \delta \rangle$ On obtient l'élément $\langle \gamma \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 \psi\langle \delta \rangle$ de

début y_0 et de fin $\psi \circ \phi (y_0)$.

Par définition, on peut poser : $\Xi(\psi \circ \phi) = \Theta(\tilde{\pi}_1 p (\langle \gamma \rangle \cdot \tilde{\pi}_1 \psi \langle \delta \rangle))$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \Xi(\psi \circ \phi) &= \Theta(\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle) \cdot \Theta(\tilde{\pi}_1 p (\tilde{\pi}_1 \psi \langle \delta \rangle)) \\ &= \Xi(\psi) \cdot \Theta(\tilde{\pi}_1 p \circ \psi \langle \delta \rangle) = \Xi(\psi) \cdot \Theta(\tilde{\pi}_1 p \langle \delta \rangle) \\ &= \Xi(\psi) \cdot \Xi(\delta) \end{aligned}$$

$$\text{Ker } \Xi = 1_Y$$

a) Si $\psi \in \text{Ker } \Xi$, alors $\psi(y_0) = y_0$.

Soit $\langle \gamma \rangle$ un élément de $\tilde{\pi}_1 Y$ de début y_0 et de fin $\psi(y_0)$.

$$\begin{aligned} \psi \in \text{Ker } \Xi &\implies \Theta(\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle) = 0 \implies \tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle \in H \\ &\implies \langle \gamma \rangle \in \pi_1(Y, y_0) \quad (\text{Cf 5.2.2}) \implies \psi(y_0) = y_0. \end{aligned}$$

b) D'après a) et 5.4.1, $\psi = 1_Y$.

Ξ est surjective.

Pour tout élément $\langle \gamma \rangle$ de $\tilde{\pi}_1 Y$ de début y_0 et de fin y_1 tel que :

$$\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle \in N(H), \quad \tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_0)) = \tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_1))$$

$\tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_1))$ est égal à l'image de $\tilde{\pi}_1 p (\pi_1(Y, y_0))$ par la conjugaison associée à $\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle$. Si ce dernier appartient à $N(H)$ on a donc bien l'égalité ci-dessus.

D'après 5.2.2, tout élément de $N(H)$ est de la forme $\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle$. D'après l'égalité ci-dessus et 5.2.7, il existe un élément ψ de $\text{Aut } p$ tel que : $\psi(y_0) = y_1$. Donc pour tout élément $\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle$ de $N(H)$, il existe un élément ψ de $\text{Aut } p$ tel que : $\Xi(\psi) = \Theta(\tilde{\pi}_1 p \langle \gamma \rangle)$.

Corollaire

Lorsqu'un revêtement p de X par Y est normal et admet H pour sous-groupe associé, $\text{Aut } p$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0)/H$

Dans ce qui précède, on est parti de la donnée d'un revêtement p de X par Y pour définir le sous-groupe $\text{Aut } p$ du groupe $\text{Aut } Y$ des homéomorphismes de Y dans lui-même. On se pose maintenant le problème

réciproque : quelles propriétés un sous-groupe donné G de $\text{Aut } Y$ doit-il vérifier pour être le groupe des automorphismes d'un revêtement ?

Définition

Soient Y un espace topologique et G un groupe qui agit sur Y .

On dira que G **feuillette** Y lorsque :

Tout point de Y admet un voisinage U tel que la famille $\{gU : g \in G\}$ soit une pile. (i.e. : $gU \cap g'U \neq \emptyset \implies g = g'$)

Proposition 5.4.6

Pour tout revêtement $p:Y \longrightarrow X$, le groupe $\text{Aut } p$ feuillette Y

Soient y un point de Y , $x = p(y)$, V le voisinage de x qui admet une pile $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de p -copies. Soit U le membre de la pile qui contient y .

Soient ψ et ϕ deux éléments de $\text{Aut } p$ tels que : $\psi U \cap \phi U \neq \emptyset$. Il existe donc un couple (y_1, y_2) de points de U tel que $\psi(y_1) = \phi(y_2)$. On a donc : $p(y_1) = p(y_2)$. Puisque U est une p -copie, $y_1 = y_2$ et donc : $\psi(y_1) = \phi(y_1)$. Puisque $\text{Aut } p$ agit librement sur Y , $\psi = \phi$.

Proposition 5.4.7

Si un groupe G feuillette un espace topologique Y , alors la surjection canonique $q: Y \longrightarrow Y/G$ est un revêtement normal. Si de plus Y est connexe, $G = \text{Aut } q$.

Soit x un point de Y/G . Choisissons un point y de $q^{-1}(x)$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de y tel que $\{gU : g \in G\}$ soit une pile. D'après les définitions de q et de la topologie de Y/G , il est facile de vérifier que $q(U)$ est un voisinage de x et que $q^{-1}(q(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$.

La restriction de q à U est injective.

Soient y_1 et y_2 deux points de U tels que : $q(y_1) = q(y_2)$.

Il existe donc un élément g de G tel que : $y_2 = gy_1 \in U \cap gU$

Puisque $\{gU : g \in G\}$ est une pile, $g = 1_G$ et donc $y_2 = y_1$.

Il est facile d'en déduire que la restriction de q à chaque gU est injective. Puisque q est continue et ouverte, chaque gU est une q -copie de $q(U)$. Le point x étant arbitraire, q est un revêtement.

Le groupe G agit transitivement sur chaque $q^{-1}(q(x))$. Il en va de même de $\text{Aut } q$ puisque ce dernier contient clairement G . q est donc normal.

Si Y est connexe, $G = \text{Aut } q$

Soient ϕ un élément de $\text{Aut } q$ et y un point de Y . Puisque l'on a $q\phi(y) = q(y)$, il existe un élément $g_{\phi,y}$ de G tel que $\phi(y) = g_{\phi,y}y$. Puisque $\text{Aut } q$ contient G et agit librement sur Y (cf 5.4.3), $\phi = g_{\phi,y}$. G contient donc $\text{Aut } q$ et, par suite, lui est égal.

Exemple 1 : les espaces projectifs réels

Soit $p_n : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ la surjection canonique. On a vu au 5.2.5 que p_n est un revêtement et que $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Appliquons 5.4.5 : il est facile de vérifier que, dans ce cas, $H = 0$, et donc que $\text{Aut } p_n \cong N(H) = \pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Puisque l'identité de S^n et la restriction à S^n de l'homothétie $x \longmapsto -x$ appartiennent évidemment à $\text{Aut } p_n$, on en conclut que ce dernier ne contient que ces deux éléments.

Exemple 2 : les espaces lenticulaires.

Soient m et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. L'application $(g, v) \longmapsto e^{2\pi i \frac{g}{m}} v$ définit une action du groupe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur S^{2n-1} qui feuillette S^{2n-1} .

On a considéré la sphère S^{2n-1} comme la partie de \mathbb{C}^n définie par : $\{(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n \mid |v_1|^2 + \dots + |v_n|^2 = 1\}$

a) Soit $W := \{(v_1, \dots, v_n) \in S^{2n-1} \mid \forall n, v_n \neq 0\}$

Tout point v de W admet un voisinage U tel que la famille

$\{gU : g \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\}$ soit une pile.

W est un ouvert de S^{2n-1} .

Notons $\mathcal{G}^n := (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid r_1^2 + \dots + r_n^2 = 1$

W est homéomorphe à $(S^1)^n \times \mathcal{G}^n$ par l'application qui à chaque composante complexe v_i de chaque point v de W , associe son argument et son module. Identifions donc W à cet espace. Notons que l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur S^{2n-1} s'identifie à :

$$\left(g, \left(\theta_1, \dots, \theta_n, r\right)\right) \longmapsto \left(\theta_1 + \pi \frac{g}{m}, \dots, \theta_n + \pi \frac{g}{m}, r\right)$$

Soit $u = \left(\theta_1, \dots, \theta_n, r\right)$ un point de W . Soit, pour chaque indice i A_i un arc de cercle ouvert, centré en θ_i et dont la longueur est strictement inférieure à $\frac{2\pi}{m}$. Soit $U := A_1 \times \dots \times A_n \times \mathcal{G}^n$,

Il est facile de vérifier que U est un voisinage de u dans S^{2n-1} , tel que la famille $gU : g \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ soit une pile.

Soit maintenant w un point quelconque de S^{2n-1} . Choisissons arbitrairement un point u de W . Il est facile de vérifier que :

- il existe une rotation Ψ de \mathbb{C}^n telle que $u = \Psi(w)$;
- Ψ induit un homéomorphisme de S^{2n-1} sur S^{2n-1} ;
- $\forall (g, z) \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times S^{2n-1}, g\Psi(z) = \Psi(gz)$.

Soit U le voisinage ouvert de u dans S^{2n-1} tel que $gU : g \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ soit une pile. $\Psi^{-1}(U)$ est alors un voisinage ouvert de w dans S^{2n-1} et $g\Psi^{-1}(U) : g \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est une pile.

Définition

L'espace topologique quotient de l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur S^{2n-1} définie ci-dessus est appelé **espace lenticulaire**. Notons-le $Lent(m, n)$.

Corollaire 5.4.8

$$\pi_1(Lent(m, n)) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

D'après 5.4.7, la surjection canonique $q : S^{2n-1} \longrightarrow Lent(m, n)$ est un revêtement normal et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \text{Aut } q$. La sphère S^{2n-1} étant connexe par arcs, $Lent(m, n)$ l'est aussi. Le groupe $\pi_1(Lent(m, n))$ est

donc défini. Appliquons 5.4.5 à q . Puisque S^{2n-1} est simplement connexe (GF 20) le sous-groupe H de $\pi_1(Lent(m, n))$ associé à q est réduit à 0. D'où le résultat.

Exemple 3

L'action de \mathbb{Z} sur \mathbb{R} définie par les translations feuilletée \mathbb{R} .

Pour associer une pile à un point donné t de \mathbb{R} , il suffit de choisir un intervalle I , centré en t et de longueur strictement inférieure à 1, puis de considérer les translatés de I .

Corollaire 5.4.9

Le groupe fondamental du tore est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{Z}, +)$.

Le tore T^2 peut être décrit comme le quotient de l'action de $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{Z}, +)$ sur le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par : $((j, k), (s, \theta)) \mapsto (s + j, \theta + k)$.

En généralisant un peu l'exemple 3 ci-dessus, il est facile de vérifier que cette action feuilletée le plan. D'après 5.4.7, la surjection canonique $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ est un revêtement normal et $\text{Aut } q \cong (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$.

Le plan \mathbb{R}^2 étant simplement connexe, le sous-groupe associé à q est réduit à 0. D'après le corollaire de 5.4.5, $\pi_1(T^2)$ est isomorphe à $\text{Aut } q$ et donc à $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$.

6 Complexes cellulaires

6.0 Quelques rappels

Proposition 6.0.1 : topologie finale

Soient E un espace topologique, X un ensemble et f une application de E vers X . Notons τ_E la topologie de E .

- La famille $\mathcal{U}_{f,E} := \{U \subset f(E) \mid f^{-1}(U) \in \tau_E\}$ est une topologie sur $f(E)$. De plus $f: E \rightarrow (f(E), \mathcal{U}_{f,E})$ est continue.
- $\mathcal{U}_{f,E}$ est la plus fine des topologies de $f(E)$ qui rendent f continue.
- Pour tout espace topologique F et toute application u de $f(E)$ vers F , $u: (f(E), \mathcal{U}_{f,E}) \rightarrow F$ est continue si et seulement si $u \circ f$ est continue.

Définition

La topologie $\mathcal{U}_{f,E}$ est appelée **topologie finale de f** ,

L'espace topologique $(f(E), \mathcal{U}_{f,E})$ sera noté $\text{Im } f$.

Définition

Soient X un ensemble, $E = \{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$ une famille d'espaces topologiques et $F = \{f_\alpha: E_\alpha \rightarrow X\}$ une famille d'applications.

On définit la topologie finale de la famille F comme la topologie finale de l'application $f: \prod_{\alpha \in A} E_\alpha \rightarrow X$ dont la restriction à chaque E_α est f_α . Autrement dit, la topologie finale de la famille $F = \{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ est la famille des parties U de X contenues dans la réunion des images des f_α et dont l'image réciproque par chacune des f_α est un ouvert de E_α .

Définition : topologie faible associée à une famille de sous-espaces.
 Soient (E, T) un espace topologique et A une famille de parties de E dont les membres recouvrent E . On définit la topologie faible associée à A comme la topologie finale de la famille des inclusions des membres de A . Autrement dit : une partie U de E est un ouvert de la topologie faible associée à A si et seulement si pour tout membre A de A , $U \cap A$ est ouvert dans A .
 On notera cette topologie T_A .
 Il est facile de vérifier que T_A est plus fine que T .

Définition : Topologie engendrée par les compacts
 Soient (E, T) un espace topologique et K la famille des parties compactes de E . Lorsque K recouvre E , comme par exemple lorsque E est séparé, on appelle T_K la **topologie engendrée par les compacts**.

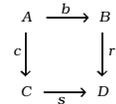
Rappels

(E, T) et (E, T_K) ont les mêmes compacts. $T_{K \cap K} = T_K$.
 T et T_K induisent la même topologie sur chacun de ces compacts.
 Si (E, T) est localement compact alors T et T_K sont égales.
 Une partie F de E est fermée dans T_K si et seulement si chacune de ses traces sur les membres de K est un membre de K .

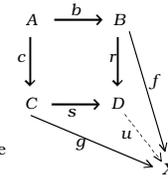
Les démonstrations relèvent de la topologie générale et ne présentent aucune difficulté. On les laisse donc au soin du lecteur.

Rappel : Carrés cocartésiens

Le carré commutatif ci-contre d'une catégorie C est **cocartésien** si et seulement si pour tout couple (f, g) de flèches de C telles que $fb = gc$, il existe une unique flèche u de C telle que $g = us$ et $f = ur$.



Autrement dit, avec nos conventions, on a le diagramme commutatif ci-contre.



Remarques

- En général, étant donné un couple (b, c) de flèches de même source d'une catégorie C , il n'existe pas de couple (r, s) qui permette de compléter (b, c) en un carré cocartésien.
- Donnons-nous un couple (b, c) de flèches de même source d'une catégorie C . Alors, si le couple (r, s) complète (b, c) en un carré cocartésien, il en sera de même de tous les couples de la forme (fr, fs) où f est une flèche inversible de C .
- Réciproquement, si deux couples distincts (r, s) et (r', s') complètent (b, c) en un carré cocartésien, alors il est facile de vérifier qu'il existe une flèche inversible f de C telle que $(r, s) = (fr', fs')$

Dans la catégorie **Ens** des ensembles, comme dans la catégorie **Top** des espaces topologiques on peut toujours compléter un couple de flèches de même source en un carré cocartésien.

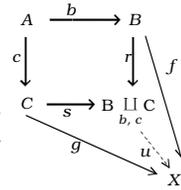
Proposition 6.0.2

Soit un couple (b, c) d'applications de même source. Il existe alors un couple (r, s) d'applications qui complète (b, c) en un carré cocartésien dans **Ens**.

Soient donc $b : A \longrightarrow B$ et $c : A \longrightarrow C$ deux applications de même source. Considérons la relation d'équivalence engendrée sur $B \amalg C$ par la relation $\otimes : x \otimes y \iff \exists a \in A : \begin{cases} x = b(a) \\ y = c(a) \end{cases}$
 Soit $B \amalg_{b,c} C$ le quotient de cette équivalence et soient les deux applications $i_B : B \longrightarrow B \amalg_{b,c} C$ et $i_C : C \longrightarrow B \amalg_{b,c} C$ qui sont respectivement obtenues en composant la surjection canonique associée à l'équivalence ci-dessus et les deux injections canoniques associées à $B \amalg C$. Il est facile de vérifier que le carré (b, c, i_B, i_C) est commutatif.

Il reste à montrer qu'il est cocartésien.

Soient donc deux applications f et g telles que $fb = gc$. L'application $f \amalg g : B \amalg C \rightarrow X$ est alors compatible avec l'équivalence ci-dessus. Elle se factorise alors par une unique application $u : B \amalg C \rightarrow X$. Le diagramme ci-contre est donc commutatif.



Définition

L'ensemble $B \amalg C$ est appelé **somme amalgamée** de b et c .

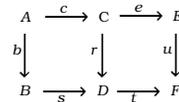
Proposition 6.0.3

Soient $b : \underline{A} \rightarrow \underline{B}$ et $c : \underline{A} \rightarrow \underline{C}$ deux applications continues de même source. Si on note respectivement B et C les ensembles sous-jacents à \underline{B} et \underline{C} , il existe sur $B \amalg C$ une topologie, notée $\underline{B \amalg C}$, telle que le carré (b, c, i_B, i_C) de la figure ci-dessus, qui est cocartésien dans \mathbf{Ens} , soit cocartésien dans \mathbf{Top} .

Il suffit de définir $\underline{B \amalg C}$ comme la topologie quotient de la relation d'équivalence dont $B \amalg C$ est le quotient.

Proposition 6.0.4

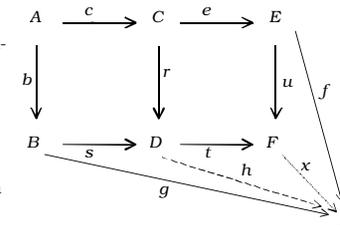
Considérons une catégorie \mathcal{C} et le diagramme commutatif de flèches de \mathcal{C} ci-contre.



- 1) Si les deux carrés qui le composent sont tous deux cocartésiens, alors le carré composé sera cocartésien.
- 2) Si le carré composé est cocartésien, et si la flèche s est un épimorphisme alors le carré de droite sera cocartésien

1) La démonstration s'effectue en construisant la figure ci-contre en trois étapes successives :

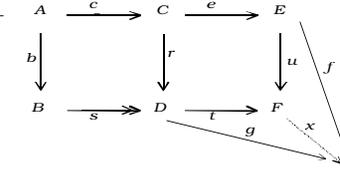
a) On se donne les deux carrés ainsi que les deux flèches f et g . (flèches en trait plein)



b) Le fait que le carré de gauche soit cocartésien entraîne, à partir des flèches fe et g , l'existence et l'unicité de la flèche h (en grands pointillés) telle que le diagramme obtenu soit commutatif.

c) Le fait que le carré de droite soit cocartésien entraîne, à partir des flèches f et h , l'existence et l'unicité de la flèche x (en petits pointillés) telle que le diagramme obtenu soit commutatif.

2) Le fait que le carré composé soit cocartésien entraîne, à partir des flèches f et gs , l'existence et l'unicité de la flèche x (en petits pointillés) telle que : $xts = gs$ et $xy = f$. s étant un épimorphisme, cela donne : $xt = g$.



On va s'intéresser à des cas très particuliers de carrés cocartésiens que nous rencontrerons un peu plus loin.

Proposition 6.0.5

Soit le carré ci-contre où les flèches horizontales désignent les inclusions usuelles et les flèches verticales des surjections.

Il est cocartésien si et seulement si v est bijective.

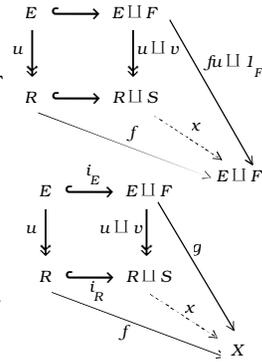
Supposons le carré cocartésien. Puisque $u \amalg v$ est surjectif, v l'est

également. Soit $f: R \rightarrow E$.
Le carré étant cocartésien, il existe une application $x: R \sqcup S \rightarrow E \sqcup F$ telle que le diagramme ci-contre soit commutatif. On en déduit que $x|_S = I_F$ et donc que v est injective.

Supposons v bijective. Soient f et g deux applications $f: R \rightarrow X$ et $g: R \sqcup S \rightarrow X$ avec $g|_E = fu$

$$\text{Soit } x := f \sqcup g|_F \circ v^{-1}$$

$$x(u \sqcup v) = (f \sqcup g|_F \circ v^{-1})(u \sqcup v) = (fu \sqcup g|_F \circ v^{-1}v) = g|_E \sqcup g|_F = g$$



Définition : espaces topologiques normaux

On dit qu'un espace topologique est **normal** lorsque deux fermés disjoints y admettent toujours des voisinages disjoints.

Proposition 6.0.6

Le quotient d'un espace topologique normal par l'un de ses fermés est séparé.

Soient X un espace topologique normal et A l'un de ses fermés.

Soient $q_A(x_1)$ et $q_A(x_2)$ deux points distincts de X/A . Deux cas peuvent se présenter :

- soit (1) $x_1 \in X \setminus A$ et $x_2 \in X \setminus A$,
- soit (2) $x_1 \in X \setminus A$ et $x_2 \in A$;

Dans le cas (1), puisque A est fermé, x_1 et x_2 admettent respectivement des voisinages V_1 et V_2 qui ne rencontrent pas A ; puisque X est normal, il est séparé ; on peut donc supposer, quitte à les restreindre autour de x_1 et de x_2 , que : $V_1 \cap V_2 = \emptyset$; il est alors facile de vérifier que : $V_i = q_A^{-1}(q_A(V_i))$ ($i=1,2$) et donc que $q_A(V_1)$ et $q_A(V_2)$ sont respectivement des voisinages de $q_A(x_1)$ et de $q_A(x_2)$ qui, de plus, sont disjoints.

Reste le cas 2. Rappelons que A et $\{x_j\}$ sont fermés ; puisque X est normal, A et $\{x_j\}$ admettent des voisinages disjoints que l'on notera U et V ; il est alors aisé de voir que $q_A(U)$ et $q_A(V)$ sont respectivement des voisinages des points $q_A(x_1)$ et $q_A(x_2)$ qui, de plus, sont disjoints.

6.1 Structure cellulaire sur un ensemble

Notations

Pour tout entier naturel non nul n , on note D^n la boule unité de \mathbb{R}^n . Autrement dit : $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum |x_i| \leq 1\}$.

Rappelons que $D^1 = [-1, 1]$, que la frontière ∂D^n de D^n est S^{n-1} et que son intérieur, que l'on note $\overset{\circ}{D}^n$, est égal à $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum |x_i| < 1\}$ ou encore à $D^n \setminus S^{n-1}$.

Par convention, $D^0 := \{0\}$, $\overset{\circ}{D}^0 := \{0\}$, $\partial D^0 := \emptyset$.

Définition : n -cellule d'un ensemble

Soit E un ensemble.

Pour tout entier naturel n et toute application τ de D^n dans E , on définit respectivement l'**intérieur** et la **frontière** de τ comme les restrictions de τ à l'intérieur $\overset{\circ}{D}^n$ de D^n et à la frontière S^{n-1} de D^n . On notera respectivement $\overset{\circ}{\tau}$ et $\partial\tau$ ces deux applications.

Un **plan de cellule de dimension n** de E est une application τ de D^n dans E telle que :

- $\overset{\circ}{\tau}$ soit injective.
- $\text{Im } \tau = \text{Im } \overset{\circ}{\tau} \sqcup \text{Im } \partial\tau$ Autrement dit : $\tau = \overset{\circ}{\tau} \sqcup \partial\tau$.

On introduit la relation \otimes sur l'ensemble des plans de cellule de E :

- a) $\dim \tau = \dim \mathfrak{b}$
- b) En posant $n := \dim \tau$, il existe un homéomorphisme θ de D^n sur lui-même tel que : $\theta(\overset{\circ}{D}^n) = \overset{\circ}{D}^n$ et $\mathfrak{b} = \tau \theta$.

Il est facile de vérifier que \otimes est une relation d'équivalence.

Une **description cellulaire de dimension n** de E est une classe d'équivalence de plans de cellule modulo la relation \circledast .

Lorsque deux plans de cellule définissent la même description cellulaire, leurs intérieurs et leurs frontières (et par suite, eux-mêmes) auront des images identiques. Les images d'une description cellulaire, de son intérieur et de sa frontière sont donc toutes trois parfaitement définies.

Une **cellule de dimension n** de E (en abrégé : **n -cellule**) est l'image d'une description cellulaire.

Remarque

D'après la convention ci-dessus, les images de l'intérieur et de la frontière d'une 0-cellule sont respectivement un point et l'ensemble vide.

Définition : description cellulaire régulière

On dit qu'une description cellulaire d'un ensemble E est **régulière** lorsqu'elle admet un plan ϵ injectif. Il est facile de vérifier que tous les plans d'une description cellulaire régulière sont injectifs.

Définition : Structure de complexe cellulaire

La donnée d'un **complexe cellulaire** sur un ensemble E consiste en la donnée d'une famille \mathcal{X} de descriptions cellulaires de E telle que :

(CC0) \mathcal{X} soit non vide.

(CC1) $E = \coprod_{c \in \mathcal{X}} \text{Im } \dot{c}$.

(CC2) Pour tout membre b de \mathcal{X} de dimension n , $\text{Im } \partial b$ soit la réunion disjointe des images des intérieurs de membres de \mathcal{X} de dimensions au plus égales à $n-1$.

Autrement dit : $\forall b \in \mathcal{X}, \exists \mathcal{Z} \subset \mathcal{X} \mid \forall c \in \mathcal{Z}, \dim c \leq \dim b - 1$

b) $\text{Im } \partial b = \coprod_{c \in \mathcal{Z}} \text{Im } \dot{c}$

Définition

Dans un complexe cellulaire (E, \mathcal{X}) , il existe une bijection entre \mathcal{X} et la famille des images de ses membres, appelée l'**ensemble des cellules**

de (E, \mathcal{X}) . Une cellule d'un complexe cellulaire donné a donc une description cellulaire bien définie.

On identifiera donc abusivement cellule, description cellulaire et plan de cellule.



Si C est une cellule d'un complexe cellulaire (E, \mathcal{X}) associée au plan de cellule ϵ , on note $\partial C := \text{Im } \partial \epsilon$ et $\dot{C} := \text{Im } \dot{\epsilon}$.

Proposition 6.1.1

Un complexe cellulaire comporte au moins une 0-cellule.

Si un complexe cellulaire donné comporte une 1-cellule, alors, d'après (CC2), il comporte au moins une 0-cellule.

Un complexe cellulaire qui ne comporte aucune 0-cellule ne comporte donc aucune 1-cellule.

De même, (CC2) entraîne que lorsqu'un complexe cellulaire donné ne comporte aucune cellule de dimension inférieure ou égale à $n-1$, il ne comportera aucune n -cellule.

Un raisonnement par récurrence montre alors qu'un complexe cellulaire qui ne comporterait aucune 0-cellule ne comporterait aucune cellule et ne remplirait donc pas (CC0)

Exemples et contre-exemples

- 1 Tout ensemble E admet une structure triviale de complexe cellulaire. C'est celle induite par la famille de tous les singletons de E .
- 2 Fixons un point z_0 de S^1 . Soit $\alpha : t \mapsto 2\pi t + z_0$. $\{z_0\}$ et α sont

des cellules de S^1 de dimensions respectives 0 et

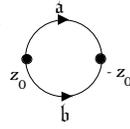
1. Il est facile de vérifier que la famille $\{\{z_0\}, \alpha\}$

munit S^1 d'une structure de complexe cellulaire.



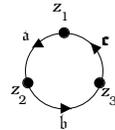
Remarquons que la 1-cellule α n'est pas régulière.

- 3 Fixons un point z_0 de S^1 . Soient a et b les deux chemins « naturels » d'extrémités z_0 et $-z_0$. Ce sont des 1-cellules régulières de S^1 .

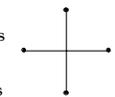


La famille $\{z_0, -z_0, a, b\}$ munit S^1 d'une structure de complexe cellulaire.

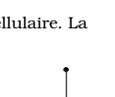
- 4 Lorsque l'on rajoute un troisième point, on obtient un autre complexe cellulaire qui comprend trois 0-cellules et trois 1-cellules régulières.



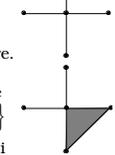
- 5 Soit l'ensemble E constitué par l'image des chemins suivants de \mathbb{R}^2 : $t \mapsto (2t-1, 0)$; $t \mapsto (0, 2t-1)$. Bien que ces derniers soient des 1-cellules de E , ils ne le munissent pas d'une structure de complexe cellulaire. La condition (CC1) n'est pas remplie.



- 6 En revanche, les quatre chemins $t \mapsto (t-1, 0)$, $t \mapsto (t, 0)$; $t \mapsto (0, t-1)$ et $t \mapsto (0, t)$ munissent E d'une structure de complexe cellulaire.



- 7 Ajoutons à E le chemin $t \mapsto (t, t-1)$ ainsi que le triangle plein $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, y \geq 1-x\}$ qui constitue une 2-cellule. Soit F l'ensemble ainsi obtenu. Soit \mathcal{C} la famille constituée par les cinq 0-cellules (les cinq points), les cinq 1-cellules (les cinq segments) et la 2-cellule (le triangle). (F, \mathcal{C}) est un complexe cellulaire.



- 8 Soit \mathcal{A} la famille constituée par, d'une part, tous les singletons de S^1 , et, d'autre part, l'identité de D^2 . \mathcal{A} est un complexe cellulaire sur D^2 qui comporte une infinité de 0-cellules, aucune 1-cellule et une seule 2-cellule.

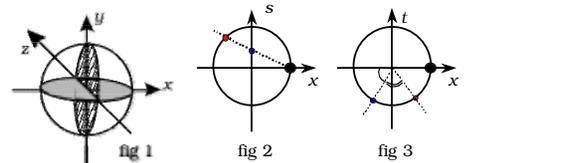


- 9 Soit $S^2_{x \leq 0}$ la demi-sphère de S^2 des points à abscisse négative ou nulle. Soit l'application f_1 de D^2 vers $S^2_{x \leq 0}$ définie ci-après :

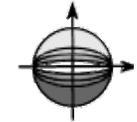
si a est un point de D^2 , identifié au disque équatorial d'abscisse nulle de S^2 , soit l'axe des s porté par le diamètre de D^2 qui contient a ; on a représenté a par une pastille bleue sur la figure 2 ; on définit $f_1(a)$ (pastille rouge) comme le point d'intersection entre S^2 et la droite passant par les points a et $(1, 0, 0)$.

Soit l'application f_2 de $S^2_{x \leq 0}$ vers S^2 définie ci-après : si b est un point de $S^2_{x \leq 0}$, on dessine la figure 3 dans le plan défini par l'axe des abscisses et le rayon de S^2 qui contient b ; on a représenté b par une pastille bleue sur la figure 3 ; on définit $f_2(b)$ comme le point de S^2 dont l'angle avec l'axe des abscisses est le double de celui de b . Il est facile de vérifier que f_1 est bijective et que la restriction de f_2 à $S^2_{x \leq 0} \setminus (0, -1), (0, 1)$ est injective.

L'application $f_2 \circ f_1$ est donc une 2-cellule non régulière de S^2 ; jointe au singleton $(1, 0, 0)$ elle forme un complexe cellulaire de S^2 .



- 10 Soient, pour tout entier non nul n , A_n (respectivement : B_n) l'arc des points à ordonnées positives (respectivement : à ordonnées négatives) de l'ellipse centrée à l'origine de grand axe horizontal de longueur 2 et de petit axe vertical de longueur $\frac{2}{n}$. Soit $A_\infty = -1, 1 \cup 0$.



Sur la figure, on peut voir de haut en bas, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_\infty, B_4, B_3, B_2$ et B_1 . Soient, pour tout entier non nul n , K_n (respectivement : L_n) la région du plan ayant pour frontière $A_n \cup A_{n+1}$ (respectivement : $B_n \cup B_{n+1}$). Sur la figure, on peut voir de haut en bas,

K_1, K_2, K_3, L_3, L_2 et L_1 . Munissons ces divers ensembles de plans de cellules injectifs de façon à en faire des cellules régulières de D^2 .

La famille \mathfrak{B} ci-dessous est un complexe cellulaire de D^2 .

$$\{(-1, 0)\}, \{(1, 0)\}, \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \cup \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \cup \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \cup \{L_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Définition : dimension d'un complexe cellulaire

Soit (E, \mathfrak{X}) un complexe cellulaire. Considérons la partie $D_{\mathfrak{X}}$ de \mathbb{N} constituée des dimensions des membres de \mathfrak{X} . Si $D_{\mathfrak{X}}$ admet un plus grand élément, soit n , on dira que (E, \mathfrak{X}) est de **dimension** n . Sinon, on dira que (E, \mathfrak{X}) est de **dimension infinie**.

Définition

On dira qu'un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) est **fini** ou **dénombrable** lorsque la famille \mathfrak{X} est finie ou dénombrable.

Définition : n -squelette d'un complexe cellulaire

Soient (E, \mathfrak{X}) un complexe cellulaire de dimension k et n un entier au plus égal à k .

Notons \mathfrak{X}^n la sous-famille formée des membres de \mathfrak{X} de dimension n .

Notons $\mathfrak{X}^{\leq n}$ la sous-famille formée des membres de \mathfrak{X} de dimension au plus égales à n .

On définit le n -squelette de (E, \mathfrak{X}) comme la partie de E , que l'on note $sk^n(E, \mathfrak{X})$, obtenue par la réunion (disjointe) des images des intérieurs des membres de $\mathfrak{X}^{\leq n}$.

Autrement dit : $sk^n(E, \mathfrak{X}) := \coprod_{\substack{c \in \mathfrak{X} \\ \dim c \leq n}} \text{Im } \overset{\circ}{c}$.

Remarque

Une définition équivalente d'un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) est obtenue en remplaçant la condition (CC1) par les trois conditions suivantes :

(CC1a) $E = \bigcup_{c \in \mathfrak{X}} \text{Im } c$

(CC1b) Pour tout couple (c_1, c_2) d'éléments de \mathfrak{X} de même dimension

$$\text{Im } c_1 \cap \text{Im } c_2 = \text{Im } \partial c_1 \cap \text{Im } \partial c_2.$$

(CC1c) Pour tout couple (c_1, c_2) d'éléments de \mathfrak{X} avec $\dim c_1 < \dim c_2$

$$\text{Im } c_1 \cap \text{Im } c_2 \neq \emptyset \implies \text{Im } c_1 \subset \text{Im } \partial c_2.$$

L'équivalence entre ces deux définitions est une conséquence immédiate de (CC2).

Définition

Un sous-complexe cellulaire d'un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) est un complexe cellulaire (A, \mathfrak{Y}) tel que A soit une partie de E et \mathfrak{Y} une sous-famille de \mathfrak{X} .

Exemples

- ◆ Pour tout complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) , $(sk^n(E, \mathfrak{X}), \mathfrak{X}^{\leq n})$ est un sous-complexe cellulaire de (E, \mathfrak{X}) .
- ◆ Si C est une cellule d'un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) , notons \mathfrak{X}_C la famille des membres de \mathfrak{X} contenus dans C . Alors (C, \mathfrak{X}_C) est un sous-complexe cellulaire de (E, \mathfrak{X}) .

Proposition 6.1.2

Si (A, \mathfrak{Y}) est un sous-complexe cellulaire d'un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) alors, pour toute cellule C de (E, \mathfrak{X}) , les trois assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\overset{\circ}{C} \cap A \neq \emptyset$ (ii) $C \subset A$. (iii) $C \in \mathfrak{Y}$

(i) \implies (iii) (i) et (CC1) appliqué à (A, \mathfrak{Y}) entraînent qu'il existe une cellule C' de \mathfrak{Y} telle que $\overset{\circ}{C} \cap \overset{\circ}{C'} \neq \emptyset$. Puisque $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$, (CC1) appliqué à (E, \mathfrak{X}) entraîne alors que $\overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{C'}$. D'où (iii).

Les implications (iii) \implies (ii) \implies (i) sont immédiates.

Définition : topologie associée à un complexe cellulaire

Soit un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) . On appelle **topologie associée à (E, \mathfrak{X})** la topologie (de E) finale de la famille \mathfrak{X} , vue comme une famille de plans de cellule.

L'espace topologique associé au complexe cellulaire (E, \mathcal{X}) sera noté $[E, \mathcal{X}]$.

Remarque

Il est facile de vérifier que deux familles équivalentes de plans de cellule engendrent la même topologie associée.

La proposition suivante donne des exemples d'ouverts de la topologie associée à un complexe cellulaire. Mais, attention, il y en a d'autres !

Proposition 6.1.3

Soit (E, \mathcal{X}) un complexe cellulaire. Si C est une de ses cellules qui n'est contenue dans aucune autre cellule, alors son intérieur $\overset{\circ}{C}$ est un ouvert de $[E, \mathcal{X}]$.

Remarquons qu'une cellule d'un complexe cellulaire peut très bien être contenue dans la frontière d'une autre cellule de plus grande dimension. Soit C une cellule qui n'est contenue dans aucune autre cellule. Il est facile de vérifier que son intérieur $\overset{\circ}{C}$ ne rencontre aucune autre cellule. Si $\iota : D^n \rightarrow C$ est le plan de cellule de C , $\iota^{-1}(\overset{\circ}{C}) = D^n$ est un ouvert de D^n . Si $\iota' : D^m \rightarrow C'$ est un autre plan de cellule, on a : $\iota'^{-1}(\overset{\circ}{C}) = \iota'^{-1}(\overset{\circ}{C} \cap C') = \emptyset$. $\iota'^{-1}(\overset{\circ}{C})$ est un ouvert trivial de D^m . Puisque les images réciproques de $\overset{\circ}{C}$ par les plans de cellule de (E, \mathcal{X}) sont toutes ouvertes, $\overset{\circ}{C}$ est un ouvert de $[E, \mathcal{X}]$.

Corollaire 6.1.4

L'intérieur d'une cellule de dimension n d'un complexe cellulaire de dimension n est un ouvert.

Définition : frontière potentielle

On appelle **frontière potentielle de rang n** d'un complexe cellulaire (E, \mathcal{X}) une application δ de S^{n-1} dans E dont l'image est la réunion d'intérieurs de cellules de \mathcal{X} de dimensions au plus égales à $n-1$.

Exemples

- La frontière (bien réelle) de tout plan de n -cellule d'un complexe cellulaire est une frontière potentielle de dimension n de ce dernier.
- Toute application constante d'une sphère unité de dimension arbitraire vers une 0-cellule d'un complexe cellulaire est une frontière potentielle de ce dernier
- Tout couple de 0-cellules d'un complexe cellulaire est l'image d'exactly deux frontières potentielles de dimension 1 de ce dernier.
- Plus généralement, si $\iota : D^n \rightarrow E$ est un n -plan de cellule d'un complexe cellulaire (E, \mathcal{X}) , et si on note ρ la projection de S^n sur D^n , $\rho : (x_1, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_1, \dots, x_n)$, alors $\iota \rho$ est une frontière potentielle de dimension $n+1$ de (E, \mathcal{X}) .

La proposition suivante peut s'énoncer de façon imagée :

Lorsqu'on rajoute de la chair à un squelette d'un complexe cellulaire, on obtient un nouveau complexe cellulaire.

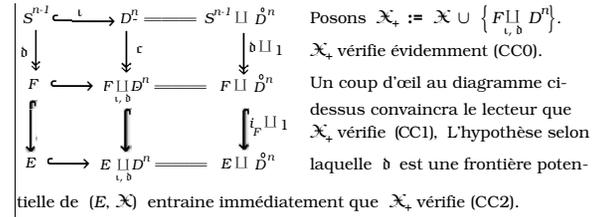
Proposition 6.1.5

Soient (E, \mathcal{X}) un complexe cellulaire et δ une frontière potentielle de dimension n de (E, \mathcal{X}) . Notons ι l'inclusion de S^{n-1} dans D^n et F l'image de δ .

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\iota} & D^n \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \iota \\
 E & \xrightarrow{\iota_E} & E \amalg_{\iota, \delta} D^n
 \end{array}$$

Alors $(E \amalg_{\iota, \delta} D^n, \mathcal{X} \cup \{F \amalg_{\iota, \delta} D^n\})$ est un complexe cellulaire dont (E, \mathcal{X}) est un sous-complexe.

Le carré commutatif de l'énoncé, cocartésien par définition, se décompose en le diagramme commutatif ci-dessous dont le carré du haut est, lui aussi, cocartésien par définition. 6.0.5 montre que ι est un plan de cellule de $E \amalg_{\iota, \delta} D^n$. Puisque E est contenu dans $E \amalg_{\iota, \delta} D^n$, tout plan de cellule de E est un plan de cellule de $E \amalg_{\iota, \delta} D^n$.



Proposition 6.1.6

Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la proposition précédente, en munissant respectivement E et $E \sqcup_{\iota, \delta} D^n$ des topologies associées à (E, \mathcal{X}) et à $(E \sqcup_{\iota, \delta} D^n, \mathcal{X} \cup \{F \sqcup_{\iota, \delta} D^n\})$, si on suppose de plus que la frontière potentielle δ est continue, alors le carré commutatif de l'énoncé précédent est cocartésien dans la catégorie des espaces topologiques.

Il suffit de montrer que si une application f de $E \sqcup_{\iota, \delta} D^n$ vers un espace topologique Z est telle que $f \circ c : D^n \rightarrow Z$ et $f \circ i_E : E \rightarrow Z$ soient continues, alors elle est continue.

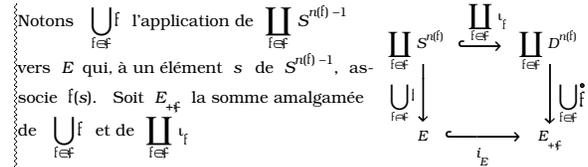
Puisque $f \circ i_E$ est continue, pour tout plan de cellule ε de \mathcal{X} , $f \circ \varepsilon = f \circ i_E \circ \varepsilon$ est continue. Puisque, de plus, $f \circ c$ est continue, on en conclut que, pour tout plan de cellule η de $\mathcal{X} \cup \{c\}$, $f \circ \eta$ est continue. Par définition de la topologie associée à $(E \sqcup_{\iota, \delta} D^n, \mathcal{X} \cup \{F \sqcup_{\iota, \delta} D^n\})$, f est continue.

Notations : famille de frontières potentielles

Afin de généraliser 6.1.5 et 6.1.6 à des familles quelconques de frontières potentielles, on utilisera les notations suivantes,

Soient (E, \mathcal{X}) un complexe cellulaire et \mathfrak{f} une famille de frontières potentielles de (E, \mathcal{X}) .

Pour tout membre f de \mathfrak{f} , notons $S^{n(f)-1}$ sa sphère de définition et $D^{n(f)}$ la boule dont cette sphère est la frontière.



Comme dans 6.1.5, pour tout membre f de \mathfrak{f} , il existe une injection de $\text{Im } f \sqcup_{\iota, \delta} D^{n(f)} = \text{Im } f \sqcup D^{n(f)}$ dont la composition avec $f \sqcup 1$, que nous noterons \dot{f} , est un plan de cellule de $E_{+\mathfrak{f}}$ de frontière f .

Notons enfin $\dot{\mathfrak{f}} := \{\dot{f} \mid f \in \mathfrak{f}\}$

Proposition 6.1.7

Soient (E, \mathcal{X}) un complexe cellulaire et \mathfrak{f} une famille de frontières potentielles de (E, \mathcal{X}) . Avec les notations précédentes on a :
 $(E_{+\mathfrak{f}}, \mathcal{X} \cup \dot{\mathfrak{f}})$ est un complexe cellulaire dont (E, \mathcal{X}) est un sous-complexe.
 Si de plus la topologie $[E, \mathcal{X}]$ rend tous les membres de \mathfrak{f} continus, alors la topologie associée à $(E_{+\mathfrak{f}}, \mathcal{X} \cup \dot{\mathfrak{f}})$ rend le carré commutatif précédent cocartésien dans la catégorie des espaces topologiques.

La démonstration de la partie ensembliste ne présente aucune difficulté. La partie topologique se montre de la même façon que 6.1.6.

6.2 CW-complexes

Définition

Un **CW-complexe** sur un ensemble E est un complexe cellulaire (E, \mathcal{X}) tel que :

(CW1) La frontière de chacune de ses cellules soit égale à la réunion (disjointe) d'un **nombre fini** d'intérieurs de cellules de moindres dimensions.

(CW2) La topologie qui lui est associée soit **séparée**.

La proposition suivante fournit les exemples usuels de CW-complexes.

Proposition 6.2.1

Si un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) vérifie (CW1) et est de plus muni d'une topologie T séparée qui rend tous les plans de cellule de \mathfrak{X} continus, alors (E, \mathfrak{X}) est un CW-complexe,

Puisque tous les plans de cellule sont continus, la topologie associée à (E, \mathfrak{X}) est plus fine que T . Puisque cette dernière est séparée, la topologie associée à (E, \mathfrak{X}) le sera donc aussi.

Définition

La donnée d'un **S-complexe** sur un ensemble E consiste en la donnée d'un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) et d'une topologie T sur E séparée qui rend tous les plans de cellule de \mathfrak{X} continus.

Un quasi-CW-complexe est un S-complexe (E, T, \mathfrak{X}) qui vérifie (CW1).

Remarque

Un CW-complexe, muni de sa topologie, est évidemment un quasi-CW-complexe.



Rien n'indique que la topologie d'un quasi-CW-complexe (E, T, \mathfrak{X}) coïncide avec la topologie associée à (E, \mathfrak{X}) .

Examinons l'exemple 10 ci-dessus. La cellule A_∞ est une 1-cellule qui n'est contenue dans aucune autre cellule. D'après 6.1.3, son intérieur est un ouvert de la topologie associée à (D^2, \mathfrak{B}) sans être un ouvert de la topologie induite par \mathbb{R}^2 sur D^2 .

Reprenons les autres exemples du 6.1.

- 1 C'est un CW-complexe dont la topologie associée est la topologie discrète.
- 2, 3, 4 Puisque les applications α, β et γ sont continues, d'après 6.2.1, tous les trois sont des CW-complexes dont les topologies associées coïncident avec la topologie usuelle de S^1 .
- 5 Ce n'est même pas un complexe cellulaire.

- 6, 7 Tous les plans de cellules étant continus, d'après 6.2.1, ces deux complexes cellulaires sont des CW-complexes. Il est facile de vérifier que leurs topologies associées coïncident respectivement avec les topologies induites par \mathbb{R}^2 sur E et F .
- 8 (D^1, \mathfrak{A}) ne vérifie pas (CW1). Ce n'est donc pas un CW-complexe.
- 9 C'est un CW-complexe dont la topologie associée coïncide avec la topologie usuelle de S^2 .
- 10 On vient de voir que c'est un CW-complexe dont la topologie associée est strictement plus fine que la topologie usuelle de D^2 .

La dénomination « CW-complexe » provient de la terminologie anglaise. Dans cette langue, les complexes cellulaires qui vérifient (CW1) sont dits « closure finite », soit en abrégé « CF-complexes ». D'autre part, la topologie finale associée à une famille d'applications s'appelle « weak topology ». Il semble que les premiers chercheurs qui étudient ces notions se donnaient un espace topologique séparé (X, T) connu à l'avance, puis un complexe cellulaire sur X vérifiant (CW1) et dont la topologie associée coïncidait avec T . Ils appelèrent ces espaces topologiques « enrichis » des « CF-W-complexes ». Puis, à l'usage, ils abrégèrent.

Proposition 6.2.2

Tout plan de cellule d'un S-complexe (E, T, \mathfrak{X}) est fermé.

Soit $\kappa : D^n \longrightarrow E$ un tel plan de cellule. Par hypothèse, κ est continue. L'image par κ d'un compact de D^n est donc compacte dans T . Cette dernière étant, par hypothèse, séparée, l'image par κ d'un compact de D^n est donc fermée dans T . Tout fermé de D^n étant compact, κ est fermé.

Corollaire 6.2.3

Soient (E, T, \mathfrak{X}) un S-complexe et C l'une de ses cellules munie du plan de cellule $\kappa : D^n \longrightarrow E$.

- (i) C et $\partial C := \text{Im } \partial\kappa$ sont fermés dans T .
- (ii) $\overset{\circ}{\kappa}$ induit un homéomorphisme de $\overset{\circ}{D}^n$ sur $\overset{\circ}{C}$, considéré

comme sous-espace topologique de T .

(iii) C est l'adhérence de $\overset{\circ}{C}$.

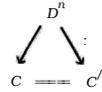
(iv) Si T' est une autre topologie sur E telle que (E, T', \mathfrak{X}) soit un quasi-CW-complexe, alors T et T' induisent la même topologie sur C .

(i) provient immédiatement de 6.2.2 et du fait que D^n et ∂D^n sont fermés dans D^n .

(ii) Puisque ι est fermé, $\overset{\circ}{\iota}$ l'est aussi. $\overset{\circ}{\iota}$ induit donc sur le sous-espace topologique $\text{Im } \overset{\circ}{\iota}$ de T une application bijective, continue et fermée, c'est à dire un homéomorphisme.

(iii) D'après (i), C est un fermé qui contient $\overset{\circ}{C}$. Si F est un autre fermé qui contient $\overset{\circ}{C}$, $\iota^{-1}(F)$ est un fermé de D^n qui contient $\overset{\circ}{D}^n$. Donc $\iota^{-1}(F) = D^n$ et $F \supset \iota(\iota^{-1}(F)) = C$. C est donc l'adhérence de $\overset{\circ}{C}$.

(iv) Notons respectivement C et C' les espaces topologiques induits sur l'ensemble C par les topologies T et T' .



Les deux flèches obliques du diagramme commutatif ci-contre sont des surjections continues qui, d'après 6.2.2, sont en outre fermées. Il est facile d'en déduire que l'identité du bas est elle aussi continue et fermée et qu'elle est donc un homéomorphisme.

Le résultat suivant est très souvent utilisé. Il permet de caractériser facilement les fermés d'un CW-complexe, et donc de décrire aisément sa topologie. Le lecteur remarquera que dans les démonstrations relatives aux CW-complexes, on utilisera les fermés bien plus souvent que les ouverts.

Corollaire 6.2.4

Dans un complexe cellulaire (E, \mathfrak{X}) qui vérifie (CW2), une partie de E est fermée si et seulement si ses traces sur les cellules de (E, \mathfrak{X}) sont toutes fermées.

D'après 6.2.2 et 6.2.3, pour une partie M d'une cellule C de \mathfrak{X} munie du plan de cellule ι , les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) M est fermée dans $[E, \mathfrak{X}]$; (ii) M est fermée dans C ;
 (iii) $\iota^{-1}(M)$ est fermée.

(i) \iff (ii) provient de ce que C est fermée dans $[E, \mathfrak{X}]$;

(i) \iff (iii) provient de ce que ι est continue et fermée.

Une partie F de E est fermée si et seulement si pour tout plan de cellule ι de (E, \mathfrak{X}) , $\iota^{-1}(F)$ est fermée, c'est à dire, d'après ce qui précède, si et seulement si pour toute cellule C de (E, \mathfrak{X}) , $F \cap C$ est fermée.

Corollaire 6.2.5

Si (E, T, \mathfrak{X}) est un S-complexe fini, alors $T = [E, \mathfrak{X}]$ et (E, \mathfrak{X}) est un CW-complexe.

(E, \mathfrak{X}) étant fini, il vérifie trivialement (CW1). D'après 6.2.1, (E, \mathfrak{X}) est un CW-complexe. Puisque (E, T, \mathfrak{X}) est un S-complexe, on a : $T \leq [E, \mathfrak{X}]$.

On a aussi : $T \geq [E, \mathfrak{X}]$.

Si F est un fermé de $[E, \mathfrak{X}]$, chacune de ses traces sur un membre de \mathfrak{X} en est un fermé, et donc, d'après 6.2.3 (iv), un fermé de T ; puisque (E, \mathfrak{X}) est fini, F , égal à la réunion finie de telles traces, est égal à une réunion finie de fermés de T et est donc un fermé de T .

Corollaire 6.2.6

La topologie associée à un CW-complexe est engendrée par ses compacts,

Pour les définitions et les propriétés d'une topologie engendrée par ses compacts, se reporter à la section A2.2 de l'annexe.

Soit (E, \mathfrak{X}) un CW-complexe. Il suffit de montrer que tout fermé de $[E, \mathfrak{X}]_K$ est fermé dans $[E, \mathfrak{X}]$. Par définition, un fermé de $[E, \mathfrak{X}]_K$ est une partie de E dont la trace sur chaque compact K de $[E, \mathfrak{X}]$ est fermée dans K . En particulier, la trace d'un fermé de $[E, \mathfrak{X}]_K$ sur chaque cellule C de \mathfrak{X} est fermée dans C .

D'après 6.2.4, un fermé de $[E, \mathfrak{X}]_K$ est donc fermé dans $[E, \mathfrak{X}]$.

Proposition 6.2.7

Si (A, \mathfrak{U}) est un sous-complexe cellulaire d'un CW-complexe (E, \mathfrak{X}) alors A est fermé dans $[E, \mathfrak{X}]$.

D'après 6.2.4, il nous faut montrer que la trace de A sur chacune des cellules de (E, \mathfrak{X}) est fermée. Soit donc C une telle cellule. On rencontre trois cas : a) $A \cap C = \emptyset$; b) $A \cap \overset{\circ}{C} \neq \emptyset$; c) $\emptyset \neq A \cap C = A \cap \partial C$. Dans le cas a), $A \cap C$ est clairement fermée. Dans le cas b), d'après 6.1.2, $A \cap C = C$ qui est fermée d'après 6.2.2. Il reste donc le cas c). Puisque (E, \mathfrak{X}) vérifie (CW1), il existe un nombre fini de membres de \mathfrak{X} , soient $\{C_i\}_{1 \leq i \leq k}$, tels que : $\partial C = \prod_{i=1}^k \overset{\circ}{C}_i = \bigcup_{i=1}^k C_i$. Soient $\{i(j) : 1 \leq j \leq m \leq k\}$ les m indices tels que $A \cap \overset{\circ}{C}_i \neq \emptyset$. $\overset{\circ}{C}_{i(j)}$. D'après 6.1.2, pour tout indice j , on a : (2) $C_{i(j)} \subset A \cap C$. D'où : (1) $\implies A \cap C = \prod_{j=1}^m (A \cap \overset{\circ}{C}_{i(j)}) \subset \prod_{j=1}^m (A \cap C_{i(j)})$
 (2) $\implies \bigcup_{j=1}^m (A \cap C_{i(j)}) \subset A \cap C$.
 Donc : $A \cap C = \bigcup_{j=1}^m (A \cap C_{i(j)}) = \bigcup_{j=1}^m C_{i(j)}$.
 $A \cap C$ est donc la réunion d'un nombre fini de fermés de (E, \mathfrak{X}) et, par suite, est fermée.

Proposition 6.2.8

Une partie compacte d'un CW-complexe ne rencontre qu'un nombre fini d'intérieurs de cellules.

On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe une partie compacte K d'un CW-complexe (E, \mathfrak{X}) qui rencontre un nombre infini de cellules de \mathfrak{X} . Il existe alors une famille dénombrable $\{\overset{\circ}{C}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'intérieurs de cellule distincts qui rencontrent tous K .
 K contient alors une partie dénombrable $M := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont chaque élément x_n est contenu dans l'intérieur de cellule $\overset{\circ}{C}_n$.

(1) Pour toute cellule B de \mathfrak{X} , $M \cap B$ est fini.

D'après (CW1), B est égale à la réunion (disjointe) d'un nombre fini d'intérieurs de cellules. Puisque chacun d'entre eux ne peut contenir plus qu'un seul élément de M , $M \cap B$ est fini.

On en déduit immédiatement :

(2) Pour toute partie P de M et toute cellule B de \mathfrak{X} , $P \cap B$ est fini.

Puisque $[E, \mathfrak{X}]$ est séparé, toute partie finie de E en est un fermé.

D'après 6.2.4 et (2) on a : (3) Toute partie P de M est fermée.

et (4) Toute partie P de M est fermée dans M .

Il est facile d'en déduire : (5) M est un sous-espace discret de $[E, \mathfrak{X}]$.

D'après (3), M est un fermé. M étant contenu dans un compact, M est un compact. Une partie compacte et discrète étant finie, M est fini.

D'où une contradiction avec la définition de M .

Voisinages tubulaires d'une partie d'un CW-complexe.

Rappels : Voisinages tubulaires d'une partie de \mathbb{R}^n .

Soient A une partie de \mathbb{R}^n et ε un réel strictement positif. Désignons par $B(a, \varepsilon)$ la boule ouverte de \mathbb{R}^n de centre a et de rayon ε .

Posons $T_\varepsilon(A) := \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

$T_\varepsilon(A)$ est évidemment un voisinage ouvert de A . On l'appelle **le voisinage tubulaire de A de rayon ε** .

On va construire un analogue des voisinages tubulaires pour les CW-complexes.

Construction 6.2.9

Soient A une partie d'un CW-complexe (X, \mathfrak{X}) et ϕ une application de \mathfrak{X} dans \mathbb{R}_+^* .

On construit une famille $N_{\phi, c}(A) \mid c \in \mathfrak{X}$ de parties de X qui, entre autres propriétés remarquables que nous établirons et utiliserons par la suite, vérifie :

- pour tout plan de cellule b de \mathfrak{X} , $N_{\phi, b}(A)$ est un ouvert de $\text{Im } b$, qui contient $A \cap \text{Im } b$;
- si l'on note, pour un entier naturel n , $N_{\phi}^n(A)$ la réunion des $N_{\phi, b}(A) \mid \dim b = n$, alors : $N_{\phi}^n(A) \subset N_{\phi}^{n-1}(A)$; de plus, pour tout plan de cellule b de dimension inférieure ou égale à n de \mathfrak{X} , $N_{\phi}^n(A) \cap \text{Im } b = N_{\phi, b}(A)$;
- si l'on note $N_{\phi}(A)$ la réunion des $N_{\phi, c}(A) \mid c \in \mathfrak{X}$ alors $N_{\phi}(A)$ est un voisinage ouvert de A dans X, \mathfrak{X} .

On va procéder par récurrence sur la dimension des cellules.

Amorçons la récurrence en posant ; $N_{\phi}^0(A) := A \cap \text{sk}^0(X, \mathfrak{X})$; autrement dit : $N_{\phi}^0(A)$ est l'ensemble (éventuellement vide) de toutes les 0-cellules de (X, \mathfrak{X}) contenues dans A .

On suppose que pour tout plan de cellule b de dimension n de \mathfrak{X} , $N_{\phi, b}(A)$ est connu, qu'il contient $A \cap \text{Im } b$ et qu'il est ouvert dans $\text{Im } b$.

On suppose de plus que, pour tout plan de cellule b de dimension inférieure ou égale à n de \mathfrak{X} , $N_{\phi}^n(A) \cap \text{Im } b = N_{\phi, b}(A)$.

Soit c un plan de cellule de \mathfrak{X} de dimension $n+1$.

Soit Ψ l'homéomorphisme de $[1, 0] \times S^n$ sur $D^{n+1} \setminus \{0\}$ qui généralise les coordonnées cylindriques à la dimension $n+1$.

On pose $N_{\phi, c}(A) := \overset{\circ}{\tau}_{\phi(c)} \left(\overset{\circ}{\tau}^{-1}(A) \right) \cup c \Psi \left([1, 1 - \phi(c)] \times \partial c^{-1}(N_{\phi}^n(A)) \right)$

D'après l'hypothèse de récurrence, $N_{\phi}^n(A)$ est un voisinage ouvert de $A \cap \text{sk}^n(X, \mathfrak{X})$ dans $\text{sk}^n(X, \mathfrak{X})$. D'après les propriétés élémentaires des CW-complexes, $\Psi \left([1, 1 - \phi(c)] \times \partial c^{-1}(N_{\phi}^n(A)) \right)$ est un ouvert de D^{n+1} .

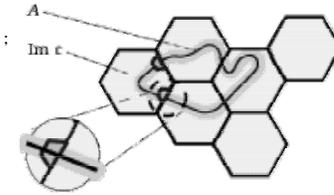
Il est facile de vérifier qu'il est saturé pour c . On en déduit facilement que $N_{\phi, c}(A)$ est un voisinage ouvert de $A \cap \text{Im } c$ dans $\text{Im } c$.

Soit b un plan de cellule de dimension inférieure ou égale à n de \mathfrak{X} ; par construction, $N_{\phi}^{n+1}(A) \cap \text{Im } b = N_{\phi}^n(A) \cap \text{Im } b$; d'après l'hypothèse de récurrence, $N_{\phi}^{n+1}(A) \cap \text{Im } b = N_{\phi, b}(A)$, Si c est un plan de cellule de \mathfrak{X} de dimension $n+1$, on déduit de ce qui précède, de la définition de $N_{\phi, c}(A)$ et des propriétés élémentaires des complexes cellulaires que $N_{\phi}^{n+1}(A) \cap \text{Im } c = N_{\phi, c}(A)$

De plus, il est facile de vérifier que ; $N_{\phi}^n(A) \subset N_{\phi}^{n+1}(A)$

Dans l'exemple ci-contre, on a supposé que ϕ était constant ; pour toutes les 2-cellules.

$N_{\phi, c}(A)$ est ici composé de $\overset{\circ}{\tau} \left(T_{\phi} \left(\overset{\circ}{\tau}^{-1}(A) \right) \right)$ et de deux voisinages à ses extrémités.



Posons $N_{\phi}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{\phi}^n(A)$

On voit aisément que, pour tout élément c de \mathfrak{X} , $N_{\phi}(A) \cap \text{Im } c = N_{\phi, c}(A)$. Puisqu'on a montré par récurrence que, pour tout plan de cellule c de \mathfrak{X} , $N_{\phi, c}(A)$ est un ouvert de $\text{Im } c$, $N_{\phi}(A)$ est un ouvert de $[X, \mathfrak{X}]$.

Remarque

Dans la construction précédente, on a supposé que les rayons des tubes, c'est à dire l'application ϕ , étaient donnés à l'avance. Rien n'empêche, en fait, de construire ϕ en même temps que la famille $\{N_{\phi, c}(A) \mid c \in \mathfrak{X}\}$,

Proposition 6.2.10

Un CW-complexe est normal.

Soient (X, \mathfrak{X}) un CW-complexe et A et B deux de ses fermés disjoints. On va construire par récurrence un voisinage tubulaire de A et un autre de B qui seront disjoints.

On utilisera les mêmes notations que dans la construction précédente.

Pour amorcer la récurrence, il suffit de constater que $N_\phi^0(A)$ et $N_\phi^0(B)$ sont évidemment disjoints.

Soit n un entier naturel. Supposons que l'on a construit :

- Une application ϕ de $\mathfrak{X}^{<n}$ dans \mathbb{R}_+^* ;
- Deux familles $N_{\phi, b}^n A$ $b \in \mathfrak{X}^{<n}$ et $N_{\phi, b}^n B$ $b \in \mathfrak{X}^{<n}$ telles que ;
 $N_\phi^n(A) \cap N_\phi^n(B) = \emptyset$.

Soit τ un plan de cellule de \mathfrak{X} de dimension $n+1$.

a) Par hypothèse, $N_\phi^n(A) \cap N_\phi^n(B) = \emptyset$; $\partial\tau^{-1}(N_\phi^0(A))$ et $\partial\tau^{-1}(N_\phi^0(B))$ sont alors des ouverts disjoints de la frontière S^1 de D^{n+1} ; puisque (X, \mathfrak{X}) est un CW-complexe, $\partial\tau^{-1}(N_\phi^n(A))$ et $\partial\tau^{-1}(N_\phi^n(B))$ sont respectivement réunion d'un nombre fini d'ouverts de la forme $\partial\tau^{-1}(N_{\phi, a}^n A)$ et $\partial\tau^{-1}(N_{\phi, b}^n B)$; on peut donc trouver un réel positif non nul ε tel que :
 $\Psi(1, 1-\varepsilon, \partial\tau^{-1}(N_\phi^n(A))) \cap \Psi(1, 1-\varepsilon, \partial\tau^{-1}(N_\phi^n(B))) = \emptyset$

b) $\tau^{-1}(A)$ et $\tau^{-1}(B)$ sont deux fermés de D^{n+1} , donc sont des compacts ; puisqu'ils sont disjoints, on montre facilement qu'il existe un réel positif non nul δ_0 (la distance entre $\tau^{-1}(A)$ et $\tau^{-1}(B)$) tel que, pour tout réel $\delta \leq \delta_0$, $T_\delta(\tau^{-1}(A))$ et $T_\delta(\tau^{-1}(B))$ sont disjoints.

c) En choisissant $\phi(\tau) := \min(\varepsilon, \delta_0)$, les deux parties de D^{n+1} suivantes $T_{\phi, \tau}(\tau^{-1}(A)) \cup \Psi(1, 1-\phi(\tau), \partial\tau^{-1}(N_\phi^n(A)))$ et $T_{\phi, \tau}(\tau^{-1}(B)) \cup \Psi(1, 1-\phi(\tau), \partial\tau^{-1}(N_\phi^n(B)))$ sont disjointes. Puisqu'elles sont saturées pour τ , on en déduit que

$$N_{\phi, \tau}^n(A) := \tau \left(T_{\phi, \tau}(\tau^{-1}(A)) \cup \Psi(1, 1-\phi(\tau), \partial\tau^{-1}(N_\phi^n(A))) \right)$$

$$\text{et } N_{\phi, \tau}^n(B) := \tau \left(T_{\phi, \tau}(\tau^{-1}(B)) \cup \Psi(1, 1-\phi(\tau), \partial\tau^{-1}(N_\phi^n(B))) \right)$$

sont eux aussi disjoints,

d) Soit τ un plan de cellule de \mathfrak{X} ;

Si $\dim \tau \leq n$, $N_\phi^{n-1}(A) \cap \text{Im } \tau = N_\phi^n(A) \cap \text{Im } \tau$;
 si $\dim \tau = n+1$, $N_\phi^{n-1}(A) \cap \text{Im } \tau = N_{\phi, \tau}^n(A) \cap \text{Im } \tau$;

On a les mêmes relations avec B . On déduit de ce qui précède que pour tout plan de cellule τ de \mathfrak{X} ; $N_\phi^{n+1}(A) \cap N_\phi^{n+1}(B) \cap \text{Im } \tau = \emptyset$;

On en conclut que ; $N_\phi^{n+1}(A) \cap N_\phi^{n+1}(B) = \emptyset$

On a donc construit par récurrence une application ϕ de \mathfrak{X} dans \mathbb{R}_+^* et les voisinages $N_\phi(A)$ et $N_\phi(B)$ qui sont disjoints.

6.3 Constructions élémentaires dans les CW-complexes.

La classe des CW-complexes est stable pour un certain nombre d'opérations : sous-complexes, ajout de cellules, produit cartésien, quotient par un sous-complexe, suspension...

Chacune d'elles permet d'obtenir, à partir d'un ou de plusieurs CW-complexes, un nouveau CW-complexe ainsi que certaines applications telles les projections liées à un produit cartésien ou la surjection liée à un quotient. Pour établir la continuité de ces applications, on aura recours au lemme suivant :

Lemme 6.3, 1

Soient deux CW-complexes (X, \mathfrak{X}) et (Y, \mathfrak{Y}) et une application $f : X \longrightarrow Y$ telle que l'image par f de toute cellule B de \mathfrak{X} soit contenue dans une cellule C de \mathfrak{Y} .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) $f : [X, \mathfrak{X}] \longrightarrow [Y, \mathfrak{Y}]$ est continue.
- (ii) Toutes les applications $f_B : B \longrightarrow C$ induites par les restrictions de f à chacune des cellules B de \mathfrak{X} sont continues.

(i) \Rightarrow (ii) est évidente. Montrer (ii) \Rightarrow (i) revient, d'après 6.2.4, à montrer :

Pour tout fermé F de Y et toute cellule B de \mathfrak{X} ,
 $f^{-1}(F) \cap B$ est fermé dans B

Par hypothèse, il existe une cellule C de \mathfrak{Y} avec ; $f(B) \subset C$.

D'où ; $f^{-1}(F) \cap B = f^{-1}(F \cap C) \cap B = f_B^{-1}(F \cap C)$.

Puisque F est un fermé de Y , $F \cap C$ est un fermé de C .
 Puisque f_B est continue, $f_B^{-1}(F \cap C)$ est fermé dans B .

Sous-complexes

Théorème 6.3.2

Si (A, \mathfrak{U}) est un sous-complexe cellulaire d'un CW-complexe (E, \mathfrak{X}) alors la topologie associée à (A, \mathfrak{U}) coïncide avec la topologie induite sur A par celle de (E, \mathfrak{X}) .

Notons respectivement $T_{\mathfrak{X}}$ et $T_{\mathfrak{U}}$ les topologies associées à (E, \mathfrak{X}) et à (A, \mathfrak{U}) et $T_{\mathfrak{X}}|_A$ la topologie induite sur A par celle de (E, \mathfrak{X}) .

On va montrer qu'une partie F de A est fermée pour $T_{\mathfrak{U}}$ si et seulement si elle est fermée pour $T_{\mathfrak{X}}|_A$.

D'après 6.2.3 (iv), $T_{\mathfrak{U}}$ et $T_{\mathfrak{X}}|_A$ induisent la même topologie sur chacune des cellules de \mathfrak{U} . Autrement dit : $\forall C \in \mathfrak{U}, T_{\mathfrak{X}}|_C = T_{\mathfrak{U}}|_C$.

Supposons F fermée pour $T_{\mathfrak{X}}|_A$. Il existe alors une partie H de E , fermée pour $T_{\mathfrak{X}}$ et telle que : $F = H \cap A$.

Pour toute cellule C de \mathfrak{U} , $F \cap C = H \cap C$ est un fermé de $T_{\mathfrak{X}}|_C = T_{\mathfrak{U}}|_C$.

D'après 6.2.4, F est fermée pour $T_{\mathfrak{U}}$.

Réciproquement, supposons F fermée pour $T_{\mathfrak{U}}$.

Rappelons que d'après 6.2.4, A est fermée dans $T_{\mathfrak{X}}$. Pour que F soit fermée dans $T_{\mathfrak{X}}|_A$, il suffit donc qu'elle soit fermée dans $T_{\mathfrak{X}}$, c'est à dire, d'après 6.2.4, que ses traces sur les cellules de (E, \mathfrak{X}) y soient toutes fermées. Soit donc C une telle cellule.

Comme dans la démonstration de 6.2.7, trois cas se présentent :

a) $F \cap C = \emptyset$; b) $F \cap \overset{\circ}{C} \neq \emptyset$; c) $\emptyset \neq F \cap C = F \cap \partial C$.

Dans le cas a), $F \cap C$ est clairement fermée. Dans le cas b), $A \cap \overset{\circ}{C} \neq \emptyset$;

d'après 6.1.2 C est un membre de \mathfrak{U} . $F \cap C$ est donc un fermé de C .

Dans le cas c), on montre comme dans la démonstration de 6.2.6, qu'il existe un nombre fini de membres de \mathfrak{X} , soient $\{C_i\}_{1 \leq i \leq k}$, tels que :

$$\forall i, F \cap \overset{\circ}{C}_i \neq \emptyset \text{ et : } F \cap C = \bigcup_{i=1}^k F \cap C_i.$$

Pour tout indice i , on a alors : $A \cap \overset{\circ}{C}_i \neq \emptyset$; d'après 6.1.2, C_i est donc un membre de \mathfrak{U} : $F \cap C_i$ est donc fermée dans C_i , et donc dans $T_{\mathfrak{X}}$.

$$F \cap C = \bigcup_{i=1}^k F \cap C_i \text{ est donc fermée dans } T_{\mathfrak{X}}.$$

Corollaire 6.3.3

Tout sous-complexe cellulaire d'un CW-complexe est un CW-complexe.

Soit (A, \mathfrak{U}) un sous-complexe cellulaire d'un CW-complexe (E, \mathfrak{X}) . Il est facile de vérifier que (A, \mathfrak{U}) « hérite » (CW1) de (E, \mathfrak{X}) . D'autre part, avec les notations de 6.2.8, puisque $T_{\mathfrak{X}}$ est séparée, $T_{\mathfrak{X}}|_A$ l'est aussi ;

d'après 6.2.8, $T_{\mathfrak{U}}$ est séparée et (A, \mathfrak{U}) vérifie donc (CW2).

Ajout de cellules

Lorsque l'on « remplume » un squelette d'un CW-complexe, on obtient encore un CW-complexe.

Proposition 6.3.4

Soient (E, \mathfrak{X}) un CW-complexe et \mathfrak{f} une famille de frontières potentielles continues de (E, \mathfrak{X}) . Alors, avec les notations de 6.1.7, $(E_{+\mathfrak{f}}, \mathfrak{X} \cup \mathfrak{f})$ est un CW-complexe.

Tout d'abord, d'après 6.1.7, $[E_{+\mathfrak{f}}, \mathfrak{X} \cup \mathfrak{f}]$ est la topologie « somme amalgamée » de $[E, \mathfrak{X}]$ et de la topologie de $\prod_{f \in \mathfrak{f}} D^{r(f)}$. En se reportant à la définition des sommes amalgamées de la section 6.0, le lecteur vérifiera facilement que, si l'on note $\Sigma : E \amalg \prod_{f \in \mathfrak{f}} D^{r(f)} \longrightarrow E_{+\mathfrak{f}}$ la surjection qui définit $E_{+\mathfrak{f}}$, les parties de $E_{+\mathfrak{f}}$ de la forme $\Sigma(U \amalg V)$, où U et

V sont respectivement des ouverts de E , \mathcal{X} et de $\prod_{i \in \mathbb{F}} D^{n(i)}$, constituent une base de voisinages ouverts de la topologie de $E_{+\mathbb{F}}$.

On en déduit facilement que, puisque E et $\prod_{i \in \mathbb{F}} D^{n(i)}$ sont séparés,

$E_{+\mathbb{F}}$ est lui aussi séparé. $(E_{+\mathbb{F}}, \mathcal{X} \cup \mathring{\mathbb{F}})$ remplit donc (CW2).

Pour montrer que $(E_{+\mathbb{F}}, \mathcal{X} \cup \mathring{\mathbb{F}})$ remplit (CW1), il suffit de montrer :

Pour tout membre \mathring{f} de $\mathring{\mathbb{F}}$ de rang n , l'image de \mathring{f} , qui n'est autre que l'image de la frontière de \mathring{f} , est la réunion d'un nombre fini d'intérieurs de cellules de \mathcal{X} de dimensions au plus égales à $n-1$.

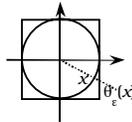
Soit donc un membre \mathring{f} de $\mathring{\mathbb{F}}$. Puisque c'est une frontière potentielle, il suffit d'établir que son image ne rencontre qu'un nombre fini d'intérieurs de cellules de \mathcal{X} . Puisque \mathring{f} est continue, son image est compacte ; la proposition 6.2.8 permet d'achever la démonstration.

Produit cartésien

L'étude des produits cartésiens de CW-complexes nécessite les quelques résultats élémentaires ci-dessous.

Rappels

Notons, pour un élément ε de $]0, 1[$, θ_ε l'homéomorphisme du cercle de rayon ε sur le carré concentrique de côté 2ε .



Notons, pour tout entier n strictement positif, P^n le pavé unité de \mathbb{R}^n ; autrement dit $P^n := \underbrace{[-1, 1] \times \dots \times [-1, 1]}_n$.

Notons $\theta_{\varepsilon, n}$ l'homéomorphisme de la $(n-1)$ -sphère de rayon ε sur le $(n-1)$ -cube concentrique de côté 2ε défini de la même façon que θ_ε .

La famille $\theta_{\varepsilon, n} \mid \varepsilon \in]0, 1[$ induit un homéomorphisme Θ_n de la boule unité D^n sur le pavé unité P^n qui vérifie : $\Theta_n(\partial D^n) = \partial P^n$.

Pour tout couple (p, q) d'entiers strictement positifs, on a : $P^p \times P^q = P^{p+q}$.

Soit $\Phi_{p,q} = \theta_{p+q}^{-1} \circ (\theta_p \times \theta_q)$.

$\Phi_{p,q}$ est un homéomorphisme de $D^p \times D^q$ vers D^{p+q} .

Puisque : $\partial P^{p+q} = \partial P^p \times P^q \cup P^p \times \partial P^q$, on obtient :

- (1) $\Phi_{p,q}^{-1}(\partial D^{p+q}) = \partial D^p \times D^q \cup D^p \times \partial D^q$;
- (2) $\Phi_{p,q}^{-1}(D^{p+q}) = D^p \times D^q$.

Proposition 6.3.5

Soient E et F deux ensembles. Si b et c sont respectivement des plans de cellule de E et de F de dimensions p et q , alors $(b \times c) \circ \Phi_{p+q}^{-1}$ est un plan de cellule de $E \times F$.

Posons $\delta = (b \times c) \circ \Phi_{p+q}^{-1}$.

D'après (1), on a : $\delta(S^{p+q-1}) = (b(S^{p-1}) \times c(D^q)) \cup (b(D^p) \times c(S^{q-1}))$

Autrement dit : $\text{Im } \partial \delta = (\text{Im } \partial b \times \text{Im } c) \cup (b \times \text{Im } \partial c)$

D'après (2) : $\delta = (b \times c) \circ \Phi_{p+q}^{-1}$. Puisque b et c sont injectives

δ l'est aussi. Il est facile de vérifier que $\text{Im } \partial \delta \cap \text{Im } \delta = \emptyset$

Proposition 6.3.6

Soient (E, \mathcal{X}) et (F, \mathcal{Y}) deux complexes cellulaires.
 Soit $\mathcal{X} \square \mathcal{Y} := (b \times c) \circ \Phi_{p+q}^{-1} \mid b \in \mathcal{X}, c \in \mathcal{Y}, \dim b = p, \dim c = q$.
 Alors $(E \times F, \mathcal{X} \square \mathcal{Y})$ est aussi un complexe cellulaire.
 Les cellules de $\mathcal{X} \square \mathcal{Y}$ ne sont autres que les parties de $E \times F$ de la forme $B \times C$ où B et C sont respectivement des cellules de \mathcal{X} et de \mathcal{Y} .
 Si (E, \mathcal{X}) et (F, \mathcal{Y}) vérifient (CW1) alors $(E \times F, \mathcal{X} \square \mathcal{Y})$ vérifiera aussi (CW1).
 Si (E, \mathcal{X}) et (F, \mathcal{Y}) sont des CW-complexes alors $(E \times F, \mathcal{X} \square \mathcal{Y})$ sera aussi un CW-complexe.

La démonstration de la partie ensembliste de cette proposition ne présente aucune difficulté. On la laisse au lecteur après lui avoir rappelé que, si B et C sont respectivement des cellules de \mathcal{X} et de \mathcal{Y} , alors :

(1) $B \sqcap C$ est une cellule de $\mathcal{X} \sqcap \mathcal{Y}$ (2) $\overset{\circ}{B} \overset{\circ}{\cap} C = \overset{\circ}{B} \overset{\circ}{\cap} \overset{\circ}{C}$

(3) $\partial(B \sqcap C) = (\partial B \sqcap C) \cup (B \sqcap \partial C)$.

La partie topologique est une conséquence immédiate de 6.2.1.

Définition

Etant donnés les deux CW-complexes (E, \mathcal{X}) et (F, \mathcal{Y}) , on appelle **produit cartésien de (E, \mathcal{X}) et de (F, \mathcal{Y})** le CW-complexe $(E \times F, \mathcal{X} \sqcap \mathcal{Y})$.

On le note : $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$.

Remarque



La topologie définie sur $E \times F$ par $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$ est en général plus fine que le produit des topologies associées à (E, \mathcal{X}) et à (F, \mathcal{Y}) .

Autrement dit : $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y}) \supseteq E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$,

En particulier, même si, d'après 6.2.5, E, \mathcal{X} et F, \mathcal{Y} sont engendrées par leurs compacts, $E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$ n'est en général pas engendrée par ses compacts.

Proposition 6.3.7

$$(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y}) = \left(E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y} \right)_K.$$

Pour les définitions et les propriétés d'une topologie engendrée par ses compacts, se reporter à la section 6.0.

D'après 6.2.3, si B et C sont respectivement une cellule de \mathcal{X} et une cellule de \mathcal{Y} , alors $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$ et $E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$ induisent la même topologie sur $B \times C$.

(1) $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y}) \subseteq \left(E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y} \right)_K$.

Soient T un fermé de $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$ et K un compact de $E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$.

Si L est un compact de $E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$ qui contient K et si $T \cap L$ est un fermé de L alors $T \cap K$ est un fermé de K .

Si tel est le cas, $T \cap L$ et, par suite, $T \cap K = (T \cap L) \cap K$ sont compacts.

D'où la conclusion.

Construisons L . Il existe un compact K_E de E, \mathcal{X} et un compact K_F de F, \mathcal{Y} tels que K soit contenu dans $K_E \times K_F$. D'après 6.2.8, quitte à agrandir K_E et K_F , on peut supposer qu'il existe p cellules de \mathcal{X} et q cellules de \mathcal{Y} , soient B_i $1 \leq i \leq p$ et C_j $1 \leq j \leq q$, telles que :

$K_E = \bigcup_{1 \leq i \leq p} B_i$ et $K_F = \bigcup_{1 \leq j \leq q} C_j$. Si bien que l'on a :

$K \subset K_E \times K_F \subset \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} B_i \times C_j =: L$

L , union finie de compacts, est compact.

Puisque T est fermé dans $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$, alors, pour tout couple d'indices (i, j) , il en va de même de $T_{ij} := T \cap B_i \times C_j$. D'après la remarque, T_{ij} est fermé dans $E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$.

Puisque $T \cap L = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} T_{ij}$,

$T \cap L$, union finie de fermés, est fermé dans $E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$, donc dans L . D'après le point précédent, $T \cap K$ est un fermé de K . Puisque T et K sont arbitraires, on a (1).

(2) $\left(E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y} \right)_K \subseteq (E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$

Soient T un fermé de $\left(E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y} \right)_K$ et $B \times C$ une cellule de $\mathcal{X} \sqcap \mathcal{Y}$.

D'après 6.2.3, $B \times C$ est un compact de $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$ donc d'après (1), un compact de $\left(E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y} \right)_K$ et donc de $E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$.

$T \cap (B \times C)$ est donc un compact de $E, \mathcal{X} \times F, \mathcal{Y}$. D'après la remarque,

$T \cap (B \times C)$ est aussi un compact de $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$. Puisque $B \times C$ est arbitraire, d'après 6.2.4, T est fermé dans $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$.

T étant arbitraire, on a (2).

Proposition 6.3.8

Soient (E, \mathcal{X}) et (F, \mathcal{Y}) deux CW-complexes. Alors les projections usuelles $p_E : E \times F \longrightarrow E$ et $p_F : E \times F \longrightarrow F$ deviennent des applications continues respectivement de $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$ sur E, \mathcal{X} et de $(E, \mathcal{X}) \times (F, \mathcal{Y})$ sur F, \mathcal{Y} .

Il est facile de voir que p_E et p_F vérifient les hypothèses de 6.3.1.

Quotient par un sous-complexe

Remarque

Considérons le complexe cellulaire de l'exemple 6 de la section 6.1 et ajoutons-lui la 1-cellule constituée par le chemin $c : t \mapsto (t, t-1)$. Notons (E, f) le complexe cellulaire ainsi obtenu, A l'image de c et $\bar{A} = \{(0, -1), (1, 0), c\}$. (A, \bar{A}) est évidemment un sous-complexe cellulaire de (E, f) .



$(E \setminus A, f \setminus \bar{A})$ n'est pas un complexe cellulaire : par exemple, le segment $[0, 1[\setminus \{0\}$ ne peut pas être une cellule.



Le complexe cellulaire qui se rapproche le plus de $(E \setminus A, f \setminus \bar{A})$ est obtenu en « réduisant » A à un seul point.

On appelle ce complexe cellulaire le « quotient de (E, f) par (A, \bar{A}) ».



Définition : complexes cellulaires quotients

Soient respectivement (X, \mathcal{X}) et (A, \bar{A}) un complexe cellulaire et l'un de ses sous-complexes cellulaires.

Notons $X/A := (X \setminus A) \sqcup \{x_\infty\}$, où x_∞ figure un point abstrait, et $q_A : X \rightarrow X/A$ la surjection dont les restrictions à $X \setminus A$ et à A sont respectivement l'identité de $X \setminus A$ et l'application de A sur $\{x_\infty\}$.

Notons enfin $\mathcal{X}/\bar{A} := q_A \circ c \mid c \in \mathcal{X}$.

Remarquons que \mathcal{X}/\bar{A} a même cardinal que l'ensemble $(\mathcal{X} \setminus \bar{A}) \sqcup \{x_\infty\}$.

Proposition 6.3.9

Soient respectivement (X, \mathcal{X}) et (A, \bar{A}) un complexe cellulaire qui vérifie (CW1) et l'un de ses sous-complexes cellulaires.

- a) $(X/A, \mathcal{X}/\bar{A})$ est un complexe cellulaire qui vérifie (CW1).
- b) $X/A, \mathcal{X}/\bar{A}$ est égale à la topologie finale de la surjection $q_A : X, \mathcal{X} \rightarrow X/A$.

La démonstration de a) est purement ensembliste et ne présente aucune difficulté. On la laisse au lecteur. Il ne faut pas oublier de vérifier que les membres de \mathcal{X}/\bar{A} sont des plans de cellule. Montrons b).

Notons τ la topologie finale de q_A . Un plan de cellule de \mathcal{X}/\bar{A} est de la forme $q_A c$, où c est un plan de cellule de \mathcal{X} . Puisque, par définition, τ rend q_A continue, elle rend également continus tous les plans de cellule de \mathcal{X}/\bar{A} . τ est donc moins fine que $X/A, \mathcal{X}/\bar{A}$.

D'autre part, par définition de $X/A, \mathcal{X}/\bar{A}$, pour tout plan de cellule c de \mathcal{X} , $q_A c$ est continu. Donc, par définition de X, \mathcal{X} , l'application $q_A : X, \mathcal{X} \rightarrow X/A, \mathcal{X}/\bar{A}$ est continue. $X/A, \mathcal{X}/\bar{A}$ est donc moins fine que τ et donc égale à τ .

Proposition 6.3.10

Soient (X, \mathcal{X}) un CW-complexe et (A, \bar{A}) l'un de ses sous-complexes cellulaires. Alors $(X/A, \mathcal{X}/\bar{A})$ est un CW-complexe.

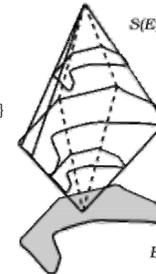
Rappelons tout d'abord que, d'après 6.2.7, A est fermé ; d'autre part, d'après 6.2.10, (X, \mathcal{X}) est normal. D'après 6.0.6, la topologie finale de q_A est séparée. Enfin d'après le résultat précédent, $X/A, \mathcal{X}/\bar{A}$ est égale à cette dernière.

Suspensions

Rappel : suspensions d'espaces topologiques

Soit E un espace topologique. On définit la **suspension** de E comme le quotient de $E \times I$ par la relation d'équivalence consistant à identifier $E \times \{0\}$ à un point et $E \times \{1\}$ à un autre point.

On note $S(E)$ cet espace topologique.



Remarque

On a : $S(E) \cong \frac{E \times I}{E \times \{0\} \cup E \times \{1\}} \cong \frac{E \times I}{E \times \{0\}} \cup \frac{E \times I}{E \times \{1\}}$

Rappel : suspensions d'applications continues

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application continue. Il est facile de vérifier que l'application $f \circ \iota_1: E \times I \longrightarrow F \times I$ induit une application continue de $S(E)$ vers $S(F)$ que l'on note $S(f)$.

Rappel

Pour tout entier naturel n , $S(S^n) \approx S^{n+1}$.

Proposition 6.3.11

Tout CW-complexe (X, \mathcal{X}) induit sur $S(X)$ une structure de CW-complexe.
De plus, la topologie associée à cette structure est la même que celle de $S(X)$.

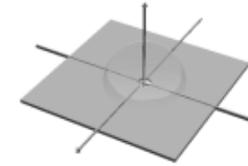
Munissons I de la structure de CW-complexe définie par $\{0\}, \{1\}, I$. Il est facile de vérifier que $(X \times \{0\}, \mathcal{X} \square \{0\})$ et $(X \times \{1\}, \mathcal{X} \square \{1\})$ sont des sous-complexes du CW-complexe $(X \times I, \mathcal{X} \square \{0, 1\}, I)$. On définit $S(X, \mathcal{X})$ comme le résultat des deux quotients successifs de $(X \times I, \mathcal{X} \square \{0, 1\}, I)$ par $(X \times \{0\}, \mathcal{X} \square \{0\})$ puis par $(X \times \{1\}, \mathcal{X} \square \{1\})$.
D'après 6.2.5, la topologie usuelle de I coïncide avec $I, \{0\}, \{1\}, I$.
D'après A2.2.3, la topologie de $(X, \mathcal{X}) \times I$ est engendrée par ses compacts. Elle coïncide donc avec la topologie de $(X, \mathcal{X}) \times I$.
Il est alors facile de montrer la seconde assertion grâce à 6.3.9 et 6.3.10.

6.4 Le groupe fondamental d'un CW-complexe.

Dans cette section, on va voir que le groupe fondamental d'un CW-complexe ne dépend que de son 2-squelette.
Puis, à partir d'un groupe G donné, on construira un CW-complexe de dimension 2 dont le groupe fondamental sera isomorphe à G .
On va commencer par « boucher des trous en collant des rustines ».

Considérons par exemple l'espace topologique $E = [-1, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dans la figure ci-après, on a plongé E dans \mathbb{R}^3 . Rappelons que : $\pi_1(E) \approx \mathbb{Z}$.

On bouche le trou de E en collant le disque unité D^2 le long du cercle χ de E de centre $(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.



L'espace topologique $D^2 \cup_\chi E$ ainsi obtenu est homéomorphe au sous-espace de \mathbb{R}^3 évoqué dans la figure ci-dessus et formé de la réunion de E et de la demi-sphère creuse de centre $(0, 0)$ et

de rayon $\frac{1}{2}$. Il est facile de voir que tout lacet de $D^2 \cup_\chi E$ peut être reserré en contournant le trou de E par la demi-sphère. $D^2 \cup_\chi E$ est donc simplement connexe, c'est à dire qu'il n'est pas troué. La proposition suivante généralise ce procédé.

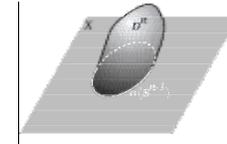
Proposition 6.4.1

Soient X un espace topologique connexe par arcs, n un entier au moins égal à 2, σ une application continue de S^{n-1} vers X et x_1 un point de $\text{Im } \sigma$.

Soit $N(x_1) := \{\pi_1(\sigma, z, \langle \lambda \rangle) \mid z \in \sigma^{-1}(x_1), \langle \lambda \rangle \in \pi_1(S^{n-1}, x_1)\}$

Désignons par $[N(x_1)]$ le sous-groupe normal de $\pi_1(X, x_1)$ engendré par $N(x_1)$.

Alors $\pi_1(D^n \cup_\sigma X, x_1) \approx \pi_1(X, x_1) / [N(x_1)]$.



Soit y_0 le point de l'image de \mathring{D}^n dans $D^n \cup_\sigma X$ qui correspond au centre de \mathring{D}^n .

Notons $A := (D^n \cup_\sigma X) \setminus \{y_0\}$
et $B := (D^n \cup_\sigma X) \setminus X$.

Il est facile de vérifier que A et B forment un recouvrement de Van Kampen et que $A \cap B$ est égal à l'image de $\overset{\circ}{D}^n \setminus \{0\}$ dans $D^n \underset{\sigma}{\vee} X$.

(1) Il existe une rétraction progressive f de A en X , telle que $f(A \cap B)$ soit contenu dans $\sigma(S^{n-1})$.

Soit r la rétraction de $D^n \setminus \{0\}$ en S^{n-1} définie par : $z \longmapsto \frac{1}{\|z\|}z$.

$\Phi : (t, z) \longmapsto (1-t)z + trfz$ est une homotopie de l'identité de $D^n \setminus \{0\}$ vers r , invariante sur S^{n-1} . r est donc une rétraction progressive.

$r \sqcup 1_X$ induit la rétraction progressive f de A en X de l'énoncé.

(2) $\pi_1(B) \approx 0$.

B est homéomorphe à $\overset{\circ}{D}^n$ qui est notoirement simplement connexe.

$A \cap B$ contient x_j . Dans la suite, tous les lacets de $A \cap B$ seront supposés avoir x_j pour extrémité et, donc, les foncteurs de Poincaré seront supposés être « localisés » en conséquence. Soit le sous-ensemble M de $\pi_1(A) * \pi_1(B)$ défini par :

$$M := \left\{ \phi_A i_{BA}(\lambda) * \phi_B i_{AB}(\lambda^{-1}) \mid \langle \lambda \rangle \in \pi_1(A \cap B) \right\}$$

D'après le théorème de Van Kampen, $\pi_1(D^n \underset{\sigma}{\vee} X)$ est canoniquement isomorphe au quotient de $\pi_1(A) * \pi_1(B)$ par le sous-groupe distingué engendré par M .

D'après (2), $\pi_1(B)$ est réduit à 0, si bien que $\pi_1(A) * \pi_1(B)$ et M sont respectivement réduits à $\pi_1(A)$ et à $\left\{ i_{BA}(\lambda) \mid \langle \lambda \rangle \in \pi_1(A \cap B) \right\}$.

Rappelons que $i_{BA}(\lambda)$ est la classe dans $\pi_1(A)$ d'un lacet λ de $A \cap B$. Appliquons maintenant $\pi_1(f)$. D'après (1) et 3.5.6, $\pi_1(f)$ est un iso-

morphisme de $\pi_1(A)$ sur $\pi_1(X)$. On en conclut que $\pi_1(D^n \underset{\sigma}{\vee} X)$ est isomorphe au quotient de $\pi_1(X)$ par le sous-groupe distingué engendré par $\pi_1(f).M$. Il reste à montrer que : $\pi_1(f).M = N$.

L'élément $\pi_1(f). \langle \lambda \rangle_A$ de $\pi_1(f).M$ est égal à $\langle f \circ \lambda \rangle_X$. En fait $f \circ \lambda$ est de la forme $r \circ \lambda$, un lacet de S^{n-1} identifié dans $D^n \underset{\sigma}{\vee} X$ au lacet $\sigma \circ r \circ \lambda$ de $\sigma(S^{n-1})$. Au total, $\pi_1(f). \langle \lambda \rangle_A = \pi_1 \sigma. \langle r \circ \lambda \rangle$.

Puisque λ était choisi arbitrairement dans $A \cap B$, on a : $\pi_1(f).M \subset N$.

Réciproquement, soit un lacet de S^{n-1} d'extrémité $r(x_j)$.

Posons $\lambda = \left\| r x_j \right\|$. C'est un lacet de $A \cap B$ d'extrémité x_j qui vérifie : $r \circ \lambda =$ On a donc, comme précédemment : $\pi_1(f). \langle \lambda \rangle_A = \pi_1 \sigma. \langle \rangle$

On a donc : $N \subset \pi_1(f).M$.

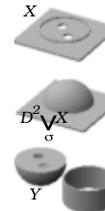
Corollaire 6.4.2

Soient X un espace topologique connexe par arcs, n un entier au moins égal à 3 et σ une application continue de S^{n-1} vers X . Alors : $\pi_1(D^n \underset{\sigma}{\vee} X) \approx \pi_1(X)$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, S^{n-1} est simplement connexe. (cf. 1.20). On en déduit que, dans ce cas, $N(x_j) = (0)$. D'où le résultat.

Remarque

Comme on le voit dans l'exemple suivant, l'image des rustines n'est pas tout-à-fait fidèle. Contrairement à une véritable rustine qui, pourvu qu'elle soit assez grande, peut boucher plusieurs trous, la « rustine topologique » ne peut en boucher qu'un seul.



Prenons pour X un plan percé de deux trous et pour σ un chemin circulaire à un seul tour de X tel qu'il entoure les deux trous. Rappelons que : $\pi_1(X) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. La proposition précédente donne : $\pi_1(D^2 \underset{\sigma}{\vee} X) \approx \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$

On peut aussi s'en convaincre en remarquant que $D^2 \underset{\sigma}{\vee} X$ se rétracte progressivement en l'ensemble Y figuré ci-contre qui lui-même est homéomorphe à un cylindre

On va maintenant coller tout un paquet de rustines.

Proposition 6.4.3

Soient X un espace topologique connexe par arcs, n un entier au moins égal à 2, $\sigma_q : q \in \mathcal{Q}$ une famille d'applications continues de S^{n-1} vers X et x_0 un point de X .

Désignons par σ l'application continue de $\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (S^{n-1} \rightarrow q)$ vers X induite par la famille $\sigma_q : q \in \mathcal{Q}$.

Soit $\underline{\chi} := \chi_q : q \in \mathcal{Q}$ une famille de chemins de X dont chaque membre a pour source x_0 et pour but un point de $\text{Im } \sigma_q$.

Désignons par $N(\underline{\chi})$ la partie de $\pi_1(X, x_0)$ formée des éléments de la forme : $\langle \chi_q \rangle * \pi_1 \sigma_q \langle \lambda \rangle * \langle \chi_q \rangle^{-1}$ où $\langle \lambda \rangle$ décrit $\pi_1(S^{n-1})$ et q décrit \mathcal{Q} .

Désignons par $N(\underline{\chi})$ le sous-groupe normal de $\pi_1(X, x_0)$ engendré par $N(\underline{\chi})$.

Alors : $\pi_1\left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n \rightarrow q) \vee_\sigma X\right) \cong \pi_1 X / N(\underline{\chi})$.



Dans la figure 1 ci-dessus, on a pris pour $\sigma_q : q \in \mathcal{Q}$ une famille de quatre chemins circulaires dans un plan percé de cinq trous. On s'y réfèrera sous le terme « l'exemple ».

Soit, pour chaque élément q de \mathcal{Q} , y_q le point de l'image de $D^{n-1} \rightarrow q$ dans $\left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n \rightarrow q)\right) \vee_\sigma X$ qui correspond au centre de D^n .

Si, en procédant comme dans la proposition précédente, on considère les ouverts $A := \left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n \rightarrow q)\right) \vee_\sigma X \setminus y_q : q \in \mathcal{Q}$

$$\text{et } B := \left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n \rightarrow q)\right) \vee_\sigma X \setminus X,$$

on s'aperçoit que leur intersection peut très bien ne pas être connexe par arcs, ce qui rend inopérant le théorème de Van Kampen. Dans l'exemple, (v. fig 2) $A \cap B$ est ainsi homéomorphe à la réunion disjointe de quatre demi-sphères percées. Pour contourner cette difficulté, on va relier les rustines entre elles d'une façon qui laisse invariants les groupes fondamentaux. Choisissons pour cela, pour tout élément q de \mathcal{Q} , un chemin injectif δ_q de l'image de $D^n \rightarrow q$ dans $\left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n \rightarrow q)\right) \vee_\sigma X$ composable avec χ_q .

On construit l'espace topologique Y à partir de la réunion disjointe

$$\left(\left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n \rightarrow q)\right) \vee_\sigma X\right) \sqcup \left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (I^2 \rightarrow q)\right)$$

en y procédant aux identifications suivantes :

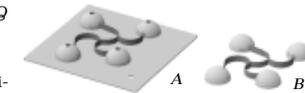
- pour tout élément q de \mathcal{Q} et tout élément t de I , $(t, 0, q)$ et $\chi_q(t)$;
- pour tout élément s de I , tous les éléments de la forme $(0, s, q)$;
- pour tout élément q de \mathcal{Q} et tout élément s de I , $(1, s, q)$ et $\delta_q(s)$.

Dans l'exemple, Y est homéomorphe à la figure 3. Notons z_0 le point de Y qui correspond à $(0, 1, q)$. Dans l'exemple, z_0 se situe au-dessus de x_0 . Y se rétracte progressivement en $\left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n \rightarrow q)\right) \vee_\sigma X$ d'une façon analogue à celle détaillée dans l'exemple 3 de la section 3.5, si bien que :

$$\pi_1(Y, z_0) \cong \pi_1\left(\left(\coprod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n \rightarrow q)\right) \vee_\sigma X, x_0\right)$$

Posons : $A := Y \setminus y_q : q \in \mathcal{Q}$

et $B := Y \setminus X$.



La figure ci-contre illustre la situation dans l'exemple.

Il est facile de vérifier que A et B forment un recouvrement de Van Kampen de Y .

(1) $\pi_1(A, z_0) \approx \pi_1(X, x_0)$.

Provient du fait que A se rétracte progressivement en X . Pour le montrer en détail, considérons l'espace topologique Y_1 obtenu à partir de

$X \amalg \left(\prod_{q \in \mathcal{Q}} (I^2 - \{q\}) \right)$ en y procédant aux identifications suivantes :

- pour tout élément q de \mathcal{Q} et tout élément t de I , $(t, 0, q)$ et $\chi_q(t)$;
- pour tout élément s de I , tous les éléments de la forme $(0, s, q)$;
- pour tout élément q de \mathcal{Q} , tous les éléments de la forme $(1, s, q)$.

Pour tout élément q de \mathcal{Q} , soit r_q la rétraction progressive de

$(X \vee_{\sigma, q} D^n) \setminus y_q$ en X analogue à la rétraction θ de la proposition précédente. La famille $r_q : q \in \mathcal{Q}$ induit une rétraction progressive de A en Y_1 . Il est facile de vérifier qu'il existe une rétraction progressive de Y_1 en X qui transforme chaque $I^2 - \{q\}$ en l'image de χ_q .

La proposition 3.5.6 permet de conclure.

(2) $\pi_1(B) \approx 0$.

Puisque D^n est rétractile, il existe une rétraction progressive de B en $Y_1 \setminus X$, qui est homéomorphe à l'espace Y_2 obtenu à partir de

$\prod_{q \in \mathcal{Q}} (I - \{0, 1\} - \{q\})$ en y identifiant, pour tout élément s de $0, 1$, tous

les éléments de la forme $(0, s, q)$. Il est facile de vérifier que Y_2 est rétractile. La proposition 3.5.6 permet de conclure.

(3) Notons $\iota_q : t \longmapsto (t, 1, q)$.

$$\pi_1(A \cap B, z_0) = \bigstar_{q \in \mathcal{Q}} \langle \iota_q \rangle \cdot \pi_1\left(\frac{1}{2}S^{n-1}\right) \langle q \rangle \cdot \langle \iota_q \rangle^{-1}$$

Soit, pour tout élément q de \mathcal{Q} , la partie C_q de $A \cap B$ qui y correspond à $(D^n - \{q\}) \amalg (I^2 - \{q\}) \setminus y_q$. Il est facile de vérifier que la famille C_q forme un recouvrement de Van Kampen. Puisque l'intersection $C_q \cap C_{q'}$ de deux quelconques membres distincts de cette famille est homéomorphe à $0, 1$, elle est simplement connexe, si bien que :

$$\pi_1(A \cap B, z_0) = \bigstar_{q \in \mathcal{Q}} \pi_1(C_q, z_0)$$

N.B. Puisque, dans ce cas, le foncteur J est injectif, chacun des

$\pi_1(C_q, z_0)$ s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(A \cap B, z_0)$ si bien que l'isomorphisme du théorème de Van Kampen devient une égalité.

Il est facile de vérifier que chacun des C_q se rétracte progressivement en $D^n \setminus y_q \setminus S^{n-1}$, espace qui, à son tour, se rétracte progressivement en $\frac{1}{2}S^{n-1}$. D'où, pour tout indice $q : \pi_1(C_q, z_0) = \langle \iota_q \rangle \cdot \pi_1\left(\frac{1}{2}S^{n-1}\right) \cdot \langle \iota_q \rangle^{-1}$

Appliquons le théorème de Van Kampen à Y :

Soit le sous-ensemble M de $\pi_1(A, z_0) * \pi_1(B, z_0)$ défini par :

$$M := \langle \phi_A i_{BA}(\langle \lambda \rangle) \cdot \phi_B i_{AB}(\langle \lambda \rangle^{-1}) \mid \langle \lambda \rangle \in \pi_1(A \cap B, z_0) \rangle$$

D'après Van Kampen, $\pi_1(Y, z_0) \approx \pi_1(A, z_0) * \pi_1(B, z_0) / M$

D'après (2), $\pi_1(A, z_0) * \pi_1(B, z_0)$ et M sont respectivement réduits à $\pi_1(A, z_0)$ et à $\langle i_{BA}(\langle \lambda \rangle) \mid \langle \lambda \rangle \in \pi_1(A \cap B, z_0) \rangle$.

Soit r la rétraction progressive de A en X évoquée au (1).

D'après 3.6.4, $\pi_1(r)$ induit un isomorphisme entre $\pi_1(A, z_0) / M$ et $\pi_1(X, x_0) / \pi_1 r . M$.

$$\text{D'après (3), } \pi_1(r) . M = \bigstar_{q \in \mathcal{Q}} \pi_1(r) \langle \lambda_q \rangle \mid \langle \lambda_q \rangle \in \langle \iota_q \rangle \cdot \pi_1\left(\frac{1}{2}S^{n-1}\right) \langle q \rangle \cdot \langle \iota_q \rangle^{-1}$$

Dans la démonstration de la proposition précédente, on a vu que :

$$\pi_1(r) i_{BA} \cdot \pi_1\left(\frac{1}{2}S^{n-1}\right) \langle q \rangle = \pi_1(\sigma_q) \pi_1(S^{n-1}) \langle q \rangle.$$

Par une démarche analogue, on montre que : $\pi_1(r) . M = N(\underline{X})$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \pi_1 X / N \underline{X} &\approx \pi_1(X, x_0) / \pi_1 r . M \approx \pi_1(A, z_0) / M \approx \pi_1(Y, z_0) \\ &\approx \pi_1\left(\left(\prod_{q \in \mathcal{Q}} (D^n - \{q\})\right) \vee_{\sigma} X, x_0\right) \end{aligned}$$

Remarque

Dans l'énoncé précédent, on a fait figurer une famille $D^n(q) : q \in Q$ de rustines de même dimension, n . En fait, cet énoncé reste vrai si n varie avec q , c'est à dire si l'on y remplace formellement n par une famille $n = n_q : q \in Q$ d'entiers au moins égaux à 2.

Corollaire

Soient X un espace topologique connexe par arcs, $n(q) : q \in Q$ une famille d'entiers au moins égaux à 3 et $\sigma_q : q \in Q$ une famille d'applications continues de $S^{n(q)-1}$ vers X .
 Alors : $\pi_1\left(\coprod_{q \in Q} D^{n(q)} \bigvee_{\sigma} X\right) \simeq \pi_1(X)$.

Corollaire 6.4.5

Le groupe fondamental d'un CW-complexe ne dépend que de son 2-squelette.

Avant d'aborder la seconde partie, la remarque suivante est nécessaire.

Remarque

Dans la proposition précédente, contrairement à ce que laissent penser les divers exemples et l'approche intuitive, on n'a pas supposé que l'application continue $\sigma : S^1 \rightarrow X$ était injective. Examinons un exemple dans lequel elle ne l'est pas. Considérons le cas où X est le cercle S^1 et où σ est l'application $z : \theta \mapsto 2\theta$. Il est facile de vérifier que l'isomorphisme entre $\pi_1(S^1)$ et \mathbb{Z} transforme N_2 en $2\mathbb{Z}$. Si bien que, d'après la proposition précédente, $\pi_1\left(D^2 \bigvee_{\sigma} S^1\right) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Théorème 6.4.6

Tout groupe G est le groupe fondamental d'un CW-complexe de dimension 2.

Rappel : groupes libres

Soit E un ensemble. On construit $E^* := \{1\} \amalg (E \setminus \{1\}) \amalg (E \setminus \{1\})$ puis l'ensemble E^* des suites finies d'éléments de E . On y procède aux identifications suivantes :

- pour tout élément e de E , $(1, (e, 1))$, $((e, 1), 1)$ et $((e, 1))$;
- pour tout élément e de E , $(1, (e, -1))$, $((e, -1), 1)$ et $((e, -1))$;
- pour tout élément e de E , $((e, 1), (e, -1))$, $((e, -1), (e, 1))$ et (1) .

La concaténation des suites finies induit sur l'ensemble ainsi obtenu une structure de groupe.

On appelle ce groupe **le groupe libre engendré par E** . On le note L_E .

On confond usuellement un élément e de E avec la classe de la suite à un élément $((e, 1))$. Si bien que, dans L_E , $e^{-1} = ((e, -1))$.

Plus intuitivement, on peut voir L_E comme l'ensemble des produits formels $e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_n$ où n est un élément de \mathbb{N}^* et où, pour chaque indice i soit e_i soit e_i^{-1} appartient à E .

Rappel

$$L_E \simeq \bigast_{e \in E} \mathbb{Z}$$

Rappel : présentation d'un groupe

Soit (G, \cdot) un groupe. La donnée d'une **présentation** de (G, \cdot) consiste en la donnée d'un couple (K, R) où :

- K est une partie génératrice de (G, \cdot) ;
- R est une partie génératrice du sous-groupe du groupe libre L_K noyau de l'homomorphisme surjectif de groupes de L_K sur (G, \cdot) qui, à un produit formel $e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_n$ d'éléments de K , associe la valeur de leur produit dans (G, \cdot) .

Remarque

Tout groupe (G, \cdot) admet au moins la présentation triviale $(G, \langle \text{Ker } \rho \rangle)$ où ρ est l'homomorphisme surjectif canonique de groupes de L_G sur (G, \cdot) .

Montrons le théorème.

Soit G un groupe. Soit (K, R) une présentation de G . On commence par construire un CW-complexe de dimension 1 qui comporte une seule 0-cellule et autant de 1-cellules que d'éléments de K .

Soit d'abord (S^1, \mathcal{S}) le CW-complexe de S^1 à une seule 0-cellule de l'exemple 2 de la page 136. Considérons ensuite la réunion disjointe

$$\left(\coprod_{k \in K} S^1 \quad k, \coprod_{k \in K} \mathcal{S} \quad k \right)$$

qui constitue clairement un CW-complexe.

Soit (X, \mathcal{X}) le quotient de ce CW-complexe par son 0-squelette. D'après les propositions 6.3.9 et 6.3.10, (X, \mathcal{X}) est un CW-complexe et \mathcal{X} est composé d'une seule 0-cellule que nous noterons x_0 et d'une famille $\mathcal{X}_k : k \in K$ de plans de 1-cellules indexée par K .

$$\pi_1(X) \approx L_K.$$

Construisons un recouvrement de Van Kampen de X . Considérons pour cela, pour chaque élément k de K , le voisinage ouvert U_k de x_0 dans $\text{Im } \mathcal{X}_k$ défini par : $U_k := \mathcal{X}_k \cap [0, \frac{1}{10}] \cup [\frac{1}{10}, 1]$.

Posons $U := \bigcup_{k \in K} U_k$. Il est facile de vérifier que U est un ouvert de X .

De plus U est rétractile.

Soit l'application continue ϕ de $I \cap [0, \frac{1}{10}] \cup [\frac{1}{10}, 1]$ vers $[0, \frac{1}{10}] \cup [\frac{1}{10}, 1]$ définie par : $\begin{cases} I \cap [0, \frac{1}{10}] \longrightarrow [0, \frac{1}{10}] \\ s, t \longmapsto st \end{cases} ; \begin{cases} I \cap [\frac{1}{10}, 1] \longrightarrow [\frac{1}{10}, 1] \\ s, t \longmapsto 1 - s(1-t) \end{cases}$

Soit, pour chaque élément k de K l'application continue ϕ_k de $I \cap U_k$ vers U_k définie par : $\phi_k(s, x_0) := x_0$;

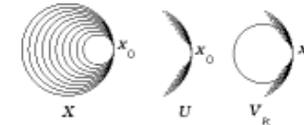
$$\forall x \in \text{Im } \mathcal{X}_k, \quad \phi_k(s, x) := \mathcal{X}_k(\phi(s, \mathcal{X}_k^{-1}(x)))$$

En se servant de l'application continue ϕ de $I \cap U$ vers U induite par la famille $\phi_k : k \in K$, il est facile de vérifier que U est rétractile.

On pose enfin, pour chaque élément k de K , $V_k := \text{Im } \mathcal{X}_k \cup U$.

Il est facile de vérifier que V_k est un ouvert de X et que, pour tout couple (k, l) d'éléments distincts de K , $V_k \cap V_l = U$. En outre, pour chaque élément k de K , en utilisant la sous-famille $\{\phi_l : l \in K \setminus k\}$ de la famille déjà rencontrée, il est facile de montrer que V_k se rétracte progressivement en $\text{Im } \mathcal{X}_k$.

La figure ci-contre illustre un exemple dans lequel K ne contient que huit éléments.



Dans le cas général, on voit aisément que $\{V_k : k \in K\}$ est un recouvrement de Van Kampen de X tel que :

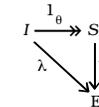
- Pour chaque élément k de K , $\pi_1(V_k) \approx \pi_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$;
- Pour tout couple (k, l) d'éléments distincts de K , $\pi_1(V_k \cap V_l) = 0$.

Le théorème de Van Kampen donne alors le résultat annoncé.

Rappelons trois résultats élémentaires, surtout pour fixer les notations.

- ♦ Pour tout point θ de S^1 , soit 1_θ le lacet de S^1 d'extrémité θ , injectif sur $]0, 1[$, qui parcourt S^1 dans le sens direct. Pour toute application continue σ de S^1 dans un espace topologique E et pour tout

$$\text{point } \theta \text{ de } S^1, \quad \pi_1(\sigma, \theta) \cdot \langle 1_\theta \rangle = \langle \sigma \circ 1_\theta \rangle.$$



- ♦ Pour tout lacet λ d'un espace topologique E d'extrémité x , il existe une unique application continue $\tilde{\lambda}$ de S^1 dans E telle que : $\tilde{\lambda}(0) = x$ et $\lambda = \tilde{\lambda} \circ 1_0$.

- ♦ L'inverse de l'isomorphisme de groupes de $\pi_1(X)$ sur L_K est engendré par $\{k \longmapsto \langle \sigma_k \circ 1_0 \rangle \mid k \in K\}$.

A tout élément $r = k(1) \cdot k(2) \dots k(p)$ de R , on associe le lacet λ_r de X , $\lambda_r := (\sigma_{k(1)} \circ 1_0) \cdot (\sigma_{k(2)} \circ 1_0) \cdot \dots \cdot (\sigma_{k(p)} \circ 1_0)$, puis l'application continue non injective σ_r de S^1 dans X induite par λ_r .

Considérons l'application continue σ de $\coprod_{r \in R} (S^1 \setminus \{r\})$ vers X induite par la famille $\sigma_r : r \in R$ puis l'espace topologique $\coprod_{r \in R} (D^1 \setminus \{r\}) \vee_{\sigma} X$. Appliquons la proposition 6.4.3; puisque le point x_0 appartient aux images de tous les membres de la famille $\sigma_r : r \in R$, on peut simplifier les calculs. En posant $N := \pi_1(\sigma_r, 0) \langle \lambda \rangle ; \langle \lambda \rangle \in \pi_1(S^1, 0)$, $r \in R$, on obtient : $\pi_1\left(\coprod_{r \in R} (D^1 \setminus \{r\}) \vee_{\sigma} X\right) \cong \pi_1 X / N$.

Il est aisé de voir que l'isomorphisme de $\pi_1(X)$ sur L_K transforme N en R si bien que : $\pi_1\left(\coprod_{r \in R} (D^1 \setminus \{r\}) \vee_{\sigma} X\right) \cong L_K / R \cong G$.

Conventions

Dans ce livre, on a utilisé les symboles suivants.

- $:=$ Affecte au symbole situé tout de suite avant lui la valeur située tout de suite après.
- \longrightarrow Symbolise une application.
- \longmapsto Définit une application en donnant une image à tout élément de son ensemble source.
- \twoheadrightarrow Symbolise une application surjective.
- \hookrightarrow Symbolise une application injective.

Tous les autres symboles utilisés sont soit standards soit définis de façon explicite.

Dans les diagrammes commutatifs d'applications :

- une flèche épaisse est donnée à l'avance,
- une flèche fine est laissée au choix du lecteur,
- une flèche en pointillés est déterminée par les flèches en trait plein.

Rappels sur les catégories

On se borne à rappeler des définitions et des résultats élémentaires. Le lecteur curieux pourra consulter avec profit [3]

Généralités

Définition

Une catégorie \mathcal{C} est la donnée :

- d'un ensemble abusivement noté \mathcal{C} ;
- d'un sous-ensemble \mathcal{C}^0 de \mathcal{C} que l'on appelle, suivant l'interprétation, l'ensemble des objets de la catégorie \mathcal{C} ou l'ensemble des unités de cette même catégorie ; on l'appelle aussi la **base** de \mathcal{C} .
- de deux surjections s et b de \mathcal{C} sur \mathcal{C}^0 appelées respectivement source et but :
- d'une application à valeurs dans \mathcal{C} définie sur le sous-ensemble $\mathcal{A}\mathcal{C}$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ lui-même défini par : $\mathcal{A}\mathcal{C} := \{(u, v) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mid b(u) = s(v)\}$ qui associe à tout élément (u, v) de $\mathcal{A}\mathcal{C}$ le composé $v \circ u$.

Ces applications doivent vérifier les relations suivantes :

$$s \circ s = b \circ s = s \quad ; \quad b \circ b = s \circ b = b$$

$$s(vu) = s(u) \quad ; \quad b(vu) = b(v) \quad ; \quad (uv)w = u(vw)$$

$$u \circ s(u) = u = b(u) \circ u$$

Comme on va le voir dans les exemples, la notion de catégorie ne présente un intérêt que si on se place dans une généralisation de la théorie des ensembles. Dans cette théorie généralisée, un objet donné peut à la fois posséder des éléments et appartenir à un autre objet. Le caractère récursif de cette théorie la rend plus puissante mais aussi plus déroutante que la théorie classique.

Exemples

Soit E un ensemble. Soit la structure suivante sur $\mathcal{E} = E$:

$$(\mathcal{E} \times \mathcal{E})^0 = \{(x, x) \mid x \in E\} \quad ; \quad s : (x, y) \longmapsto (y, y) \quad ; \quad b : (z, y) \longmapsto (z, z)$$

Il est facile de vérifier que cette structure définit bien une catégorie.

Soit $\mathcal{E}ns$ l'ensemble de toutes les applications :

$\rightarrow \mathcal{E}ns^0$ est l'ensemble des identités, que l'on peut identifier avec l'ensemble de tous les ensembles. (aïe ! voilà la récursivité !)

\rightarrow Si $f : A \longrightarrow B$ est un élément de $\mathcal{E}ns$, la source et le but de f sont respectivement 1_A et 1_B .

\rightarrow Le composé de deux éléments composables de $\mathcal{E}ns$ est le composé classique de deux applications.

Cette structure définit bien une catégorie.

Orbite d'un objet

Soient \mathcal{C} une catégorie et A et B deux de ses objets.

On dit que A et B **appartiennent à la même orbite** lorsqu'il existe une flèche de \mathcal{C} , de source A , de but B et qui soit inversible.

La relation « appartient à la même orbite » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des objets \mathcal{C}^0 de \mathcal{C} .

Foncteurs

Soient deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D}

Un **foncteur covariant** ϕ de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est une application de \mathcal{C} vers \mathcal{D} telle que :

- $\rightarrow \phi : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{D}^0$
- $\rightarrow b_{\mathcal{D}} \phi = \phi b_{\mathcal{C}} \quad ; \quad s_{\mathcal{D}} \phi = \phi s_{\mathcal{C}}$
- $\rightarrow \forall (u, v) \in \mathcal{A}\mathcal{C}, \phi(u) \circ \phi(v) = \phi(uv)$

Un **foncteur contravariant** ϕ de \mathcal{C} vers \mathcal{D} est une application de \mathcal{C} vers \mathcal{D} telle que :

- $\rightarrow \phi : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{D}^0$
- $\rightarrow s_{\mathcal{D}} \phi = \phi b_{\mathcal{C}} \quad ; \quad b_{\mathcal{D}} \phi = \phi s_{\mathcal{C}}$
- $\rightarrow \forall (u, v) \in \mathcal{A}\mathcal{C}, \phi(v) \circ \phi(u) = \phi(vu)$

Objets particuliers d'une catégorie

Objets initiaux et terminaux

On dit qu'un objet X d'une catégorie \mathcal{C} est **initial** si, pour tout objet B de \mathcal{C} , il existe une unique flèche u de \mathcal{C} , $u : X \longrightarrow B$.

On dit qu'un objet X d'une catégorie \mathcal{C} est **terminal** si, pour tout objet A de \mathcal{C} , il existe une unique flèche v de \mathcal{C} , $v : A \longrightarrow X$.

Exemples

- Dans la catégorie des ensembles, comme dans celle des espaces topologiques, tout singleton (i.e.: ensemble réduit à un point), est un objet terminal. En effet, pour tout objet A et tout singleton $\{x\}$, il existe une unique flèche, à savoir l'application constante, de A vers $\{x\}$. Par contre un singleton n'est pas un objet initial dans la catégorie des ensembles.
- Dans la catégorie des groupes, le groupe $\{0\}$ est un objet initial et terminal.

Proposition AA.1.1

Tous les objets initiaux (respectivement : terminaux) d'une catégorie appartiennent à la même orbite.

Flèches particulières d'une catégorie

Monomorphismes, épimorphismes et isomorphismes.

Soit $f : A \longrightarrow B$ une flèche d'une catégorie \mathcal{C} .

On dit que f est un **monomorphisme** si elle est inversible à gauche, c'est à dire s'il existe une flèche $u : B \longrightarrow A$ telle que : $u \circ f = I_A$.

On dit que f est un **épimorphisme** si elle est inversible à droite, c'est à dire s'il existe une flèche $v : B \longrightarrow A$ telle que : $f \circ v = I_B$.

On dit que f est un **isomorphisme** si elle est inversible.

Groupoïdes

Définition

Un groupoïde est une catégorie dont toutes les flèches sont inversibles.

Exemples

Groupes	Un groupe est un groupoïde à une seule unité.
Groupoïdes banaux	Soit E un ensemble. On appelle groupoïde banal de base E la structure de catégorie définie sur $E \times E$ dans le premier des exemples de catégories.
Groupoïdes triviaux	Un groupoïde trivial est le produit cartésien d'un groupe et d'un groupoïde banal.
Graphes d'une relation d'équivalence.	Le groupoïde banal $E \times E$ induit sur la partie de $E \times E$ qu'est le graphe d'une relation d'équivalence définie sur E une structure de groupoïde dont l'ensemble des unités est E tout entier. Réciproquement, tout sous-groupoïde du groupoïde banal $E \times E$ dont l'ensemble des unités est E tout entier est le graphe d'une relation d'équivalence définie sur E .

Définition

Soit un groupoïde G . La correspondance qui, à toute flèche g de G , associe le couple $(\mathfrak{t}(g), \mathfrak{s}(g))$ d'unités de G définit un foncteur covariant de G vers le groupoïde banal de base G^0 . On note usuellement ce foncteur \prod_G .

Proposition AA.2

L'image du foncteur \prod_G est le graphe de la relation d'équivalence définie sur G^0 par les orbites de G .

Produit libre de groupoïdes.

Donnons-nous une famille $\{G_a\}_{a \in A}$ de groupoïdes dont les bases sont toutes des parties d'un même ensemble et sont donc susceptibles d'avoir des éléments en commun.

Intuitivement, le produit libre d'une telle famille est le plus petit groupoïde qui contienne tous ses membres en tant que sous-groupoïdes.

Proposition A1.1

Soient un ensemble X , une famille $\{U_a\}_{a \in A}$ de parties de X telle que : $\bigcup_{a \in A} U_a = X$ et une famille $\{G_a\}_{a \in A}$ de groupoïdes dont chaque membre G_a admet U_a pour base.

Il existe un groupoïde $\ast_{a \in A} G_a$ de base X tel que :

- Pour chaque indice a , il existe un homomorphisme de groupoïdes injectif $j_a : G_a \hookrightarrow \ast_{a \in A} G_a$ dont la restriction à U_a soit l'inclusion $U_a \hookrightarrow X$.
- Pour toute famille $\{f_a : G_a \longrightarrow H\}_{a \in A}$ de morphismes de groupoïdes, dont les membres coïncident sur les intersections $U_a \cap U_b$, il existe un unique morphisme de groupoïdes $f : \ast_{a \in A} G_a \longrightarrow H$ tel que : $\forall a \in A, f \circ j_a = f_a$.

- a) Les différentes structures de graphes sous-jacentes aux structures de groupoïdes des G_a induisent une structure de graphe de base X sur la réunion disjointe $\coprod_{a \in A} G_a$. Dans la suite, les mots « source » et « but » renvoient à cette structure de graphe et non aux diverses structures des groupoïdes G_a .
- b) Notons $\overset{\wedge}{\prod}_{a \in A} G_a$ l'ensemble des suites finies d'éléments consécutifs de $\coprod_{a \in A} G_a$, c'est-à-dire des suites dont chaque terme a pour source le but

du terme précédent. On peut voir $\overset{\wedge}{\prod}_{a \in A} G_a$ comme l'ensemble des composés formels d'éléments de $\coprod_{a \in A} G_a$.

Remarquons que si (u_1, \dots, u_p) est un élément de $\overset{\wedge}{\prod}_{a \in A} G_a$ et si, pour tout indice i , $G_{a(i)}$ désigne le groupoïde auquel appartient u_i , alors pour $2 \leq i \leq p$ la source de u_i , qui est aussi le but de u_{i-1} , appartient à $U_{a(i)} \cap U_{a(i-1)}$.

On définit respectivement la source et le but d'un élément u de $\overset{\wedge}{\prod}_{a \in A} G_a$ comme la source de son premier terme et le but de son dernier terme.

Si deux éléments de $\overset{\wedge}{\prod}_{a \in A} G_a$ sont tels que la source du second soit égale au but du premier, on définit leur composé comme la suite obtenue en les mettant bout à bout.

- c) On identifie les éléments suivants de $\overset{\wedge}{\prod}_{a \in A} G_a$
- Si un élément x de X appartient à $U_a \cap U_b$, on identifie les unités $\omega_a(x)$ et $\omega_b(x)$ associées respectivement à x dans les groupoïdes G_a et G_b .
 - Si un élément $u = (u_1, \dots, u_p)$ de $\overset{\wedge}{\prod}_{a \in A} G_a$ comporte deux termes consécutifs u_i et u_{i+1} qui appartiennent au même groupoïde G_a , on identifie u à $(u_1, \dots, u_{i-1}, (u_i \cdot u_{i+1}), u_{i+2}, \dots, u_p)$ que l'on obtient à partir de u en effectuant le produit formel (u_i, u_{i+1}) .

On montre de façon analogue à ce qui se fait dans le cas des groupes que la composition définie au b) sur $\overset{\wedge}{\prod}_{a \in A} G_a$ induit sur l'ensemble obtenu après ces identifications une structure de groupoïde de base X que l'on note $\ast_{a \in A} G_a$.

On montre facilement que, pour tout indice a , l'injection de G_a dans $\coprod_{a \in A} G_a$ induit un morphisme de groupoïdes j_a de G_a dans $\ast_{a \in A} G_a$. Soit une famille $\{f_a : G_a \longrightarrow H\}_{a \in A}$ de morphismes de groupoïdes, dont les membres coïncident sur les intersections $U_a \cap U_b$,

Cette famille induit une application f de $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ vers H de la façon suivante : si (u_1, \dots, u_p) est un élément de $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ et si, pour tout indice i , $G_{\alpha(i)}$ désigne le groupoïde auquel appartient u_i , on définit l'image de (u_1, \dots, u_p) par f comme le produit dans H $f_{\alpha(1)}(u_1) \dots f_{\alpha(p)}(u_p)$. Il est facile de vérifier que si deux éléments de $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ peuvent être identifiés, ils auront la même image par f . Cette dernière induit donc une application f de $\ast_{\alpha \in A} G_\alpha$ vers H . On montre facilement que f est un morphisme de groupoïdes.

Définition

On appelle le groupoïde $\ast_{\alpha \in A} G_\alpha$ le **produit libre de la famille** G_α $\alpha \in A$

Exemple 1

Soient G et H deux groupoïdes dont les bases respectives, A et B , sont deux parties disjointes d'un ensemble X .
Alors $G \ast H \approx G \sqcup H$.

La démonstration est immédiate.

Exemple 2 le produit libre de deux groupoïdes banals

Soient A et B deux parties d'un ensemble X telles que : $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cup B = X$.

Il est facile de vérifier que $(A \setminus A) \smile (B \setminus B)$ est l'ensemble des suites finies $u = (x_1, y_1, \dots, x_p, y_p)$ d'éléments de $(A \setminus A) \sqcup (B \setminus B)$ tels que, pour tout indice i , $1 \leq i \leq p-1$,

-si (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) appartiennent tous deux à $A \setminus A$ ou à $B \setminus B$, alors $y_i = x_{i+1}$.

-sinon, y_i et x_{i+1} , bien que différents en tant qu'éléments de $A \sqcup B$, correspondent au même élément de $A \cap B$.

Il est facile de vérifier que l'on peut identifier $(A \setminus A) \ast (B \setminus B)$ avec l'ensemble des éléments $(x_1, y_1, \dots, x_p, y_p)$ de $(A \setminus A) \smile (B \setminus B)$

dont les termes appartiennent alternativement à $(A \setminus A)$ et à $(B \setminus B)$ et qui ne comportent aucune unité (élément de la forme (x, x)) sauf s'ils sont réduits à l'une d'entre elles.

A2 Rappels de topologie générale.

On retrouvera ici des passages de la section 6.0, enrichis de quelques autres résultats. Le lecteur insatisfait pourra consulter [9].

A2.1 L'espace topologique Y^X .

Rappelons que, dans le cadre ensembliste, Y^X désigne l'ensemble de toutes les applications de X vers Y et que l'on a la correspondance exponentielle bien connue : $Y^X \cong Y^{X \times Z}$. Plus précisément, l'application $\Psi : (z \mapsto f|_z) \mapsto (x, z) \mapsto f(x, z)$ est une bijection.

On va voir qu'il en est de même pour certains espaces topologiques.

L'ensemble sous-jacent à Y^X

Soient X et Y deux espaces topologiques. On notera $\text{Top}(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications continues de X vers Y .

La topologie compacte ouverte

Soient X et Y deux espaces topologiques.

Si A et B sont respectivement des parties de X et de Y , soit $\langle A, B \rangle$ la partie de $\text{Top}(X, Y)$ définie par :

$$\langle A, B \rangle = \{ f \in \text{Top}(X, Y) : f(A) \subset B \}.$$

On appelle **topologie compacte ouverte** la topologie de $\text{Top}(X, Y)$ la moins fine qui contienne toutes les parties de $\text{Top}(X, Y)$ de la forme

$\langle K, U \rangle$ où K est un compact de X et U , un ouvert de Y .

On notera Y^X l'espace topologique constitué de $\text{Top}(X, Y)$ muni de la topologie compacte ouverte.

Théorème A2.1.1 (correspondance exponentielle)

Soient X, Y et Z trois espaces topologiques tels que X soit séparé localement compact et que Z soit séparé.

Alors la bijection $\Psi : Y^X \times Z \longrightarrow Y^{X \times Z}$ induit une bijection $\Phi : Y^{X \times Z} \longrightarrow Y^Z \times Y^X$.

1) Soit $f : X \times Z \longrightarrow Y$ une application continue.

$$\text{Posons } \phi : \begin{cases} Z & \longrightarrow & Y^X \\ z & \longmapsto & x \longmapsto f(x, z) \end{cases}$$

Alors ϕ est continue.

Il est facile de vérifier que par définition de l'espace topologique Y^X , ϕ sera continue si et seulement si pour tout compact K de X et pour tout ouvert U de Y , $\phi^{-1}(\langle K, U \rangle)$ est un ouvert de Z .

Soient donc K et U comme ci-dessus et z_0 un point de $\phi^{-1}(\langle K, U \rangle)$

$$\text{donc : } f(K \times z_0) \subset U.$$

f étant continue et K étant compact, il existe un voisinage V de z_0

$$\text{tel que : } f(K \times V) \subset U$$

f étant continue, pour tout point x de K , il existe un voisinage V_x de

$$z_0 \text{ et un voisinage } W_x \text{ de } x \text{ tels que : } f(W_x \times V_x) \subset U.$$

K étant compact, il peut être recouvert par un nombre fini W_1, \dots, W_n de membres du recouvrement $W_x, x \in K$. Soit, pour chaque indice i ,

$$V_i \text{ le membre de la famille } V_x, x \in K \text{ tel que : } f(W_i \times V_i) \subset U.$$

En posant $V := V_1 \cap \dots \cap V_n$, on a bien $f(K \times V) \subset U$.

Autrement dit, V vérifie : $\phi(V) \subset \langle K, U \rangle$ ou encore :

$$z_0 \in V \subset \phi^{-1}(\langle K, U \rangle).$$

Le point z_0 étant arbitraire, $\phi^{-1}(\langle K, U \rangle)$ est un ouvert de Z .

Le couple (K, U) étant arbitraire, ϕ est continue.

2) Soit $\phi : Z \longrightarrow Y^X$ une application continue.

$$\text{Posons } f : \begin{cases} Z \times X & \longrightarrow & Y \\ z, x & \longmapsto & \phi(z)(x) \end{cases}$$

Alors f est continue.

Soient (x_0, z_0) un point de $Z \times X$ et W_0 un voisinage ouvert de $f(x_0, z_0)$ dans Y .
 L'application $x \mapsto \phi(z_0)(x)$ étant continue et X étant séparé localement compact, il existe un voisinage compact K de x_0 tel que :
 $\phi(z_0)(K) \subset W_0$.
 Autrement dit il existe un voisinage compact K de x_0 tel que :
 $\phi(z_0) \in \langle K, W_0 \rangle$.
 L'application ϕ étant continue, il existe un voisinage V de z_0 tel que :
 $\phi(V) \subset \langle K, W_0 \rangle$.
 Au total, il existe un voisinage compact K de x_0 et un voisinage V de z_0 tels que : $f(K \times V) \subset W_0$. L'application f est donc continue au point (x_0, z_0) . Ce dernier étant arbitraire, f est continue.

Théorème A2.1.2

La bijection $\Phi : Y^X \times Z^X \longrightarrow Y^{Z \times X}$ est un homéomorphisme.

Le lecteur trouvera ce théorème et sa démonstration dans [9], p. 263.

A2.2 Topologie engendrée par les compacts

Proposition A2.2.1 ; topologie finale

Soient E un espace topologique, X un ensemble et f une application de E vers X . Notons τ_E la topologie de E .

- La famille $\mathcal{U}_{f,E} := \{ U \subset f(E) \mid f^{-1}(U) \in \tau_E \}$ est une topologie sur $f(E)$. De plus $f : E \longrightarrow (f(E), \mathcal{U}_{f,E})$ est continue.
- $\mathcal{U}_{f,E}$ est la plus fine des topologies de $f(E)$ qui rendent f continue.
- Pour tout espace topologique F et toute application u de $f(E)$ vers F , $u : (f(E), \mathcal{U}_{f,E}) \longrightarrow F$ est continue si et seulement si $u \circ f$ est continue.

La démonstration ne présente aucune difficulté. On la laisse au lecteur.

Définition

La topologie $\mathcal{U}_{f,E}$ est appelée **topologie finale de f** .
 L'espace topologique $(f(E), \mathcal{U}_{f,E})$ sera noté $Im f$.

Définition

Soient X un ensemble, $E = \{E_a \mid a \in A\}$ une famille d'espaces topologiques et $F = \{f_a : E_a \longrightarrow X\}$ une famille d'applications.
 On définit la topologie finale de la famille F comme la topologie finale de l'application $f : \prod_{a \in A} E_a \longrightarrow X$ dont la restriction à chaque E_a est f_a . Autrement dit, la topologie finale de la famille $F = \{f_a \mid a \in A\}$ est la famille des parties U de X contenues dans la réunion des images des f_a et dont l'image réciproque par chacune des f_a est un ouvert de E_a .

Définition : topologie faible associée à une famille de sous-espaces

(E, τ) un espace topologique et A une famille de parties de E dont les membres recouvrent E . On définit la topologie faible associée à A comme la topologie finale de la famille des inclusions des membres de A . Autrement dit : une partie U de E est un ouvert de la topologie faible associée à A si et seulement si pour tout membre A de A , $U \cap A$ est ouvert dans A .

On notera cette topologie τ_A .

Il est facile de vérifier que τ_A est plus fine que τ .

Définition : Topologie engendrée par les compacts

Soient (E, τ) un espace topologique et K la famille des parties compactes de E . Lorsque K recouvre E , comme par exemple lorsque E est séparé, on appelle τ_K la **topologie engendrée par les compacts**.

Rappels A2.2.2

(E, τ) et (E, τ_K) ont les mêmes compacts. $\tau_{K \cap K} = \tau_K$.
 τ et τ_K induisent la même topologie sur chacun de ces compacts.

Si (E, \mathbb{T}) est localement compact alors \mathbb{T} et \mathbb{T}_K sont égales.
 Une partie F de E est fermée dans \mathbb{T}_K si et seulement si chacune de ses traces sur les membres de K est un membre de K .

Les démonstrations relèvent de la topologie générale et ne présentent aucune difficulté. On les laisse donc au soin du lecteur.

Proposition A2.2.3

Soient E un espace topologique séparé et engendré par ses compacts et L un espace topologique localement compact. Alors $E \times L$ est engendré par ses compacts.

On va montrer que l'identité induit une application continue 1 de $E \times L$ vers $(E \times L)_K$.

$1 : E \times L \longrightarrow (E \times L)_K$ est continue si et seulement si, pour tout compact K de E , $1|_{K \times L} : K \times L \longrightarrow (E \times L)_K$ est continue.

La nécessité de cette condition est évidente. Montrons sa suffisance. Si, pour tout compact K de E , $1|_{K \times L}$ est continue, alors d'après la correspondance exponentielle (A2.1.1), pour tout compact K de E , $\Phi^{-1}(1)|_K$ est continue ; puisque la topologie de E est engendrée par ses compacts, $\Phi^{-1}(1) : E \longrightarrow (E \times L)_K^L$ est continue ; à nouveau d'après la correspondance exponentielle, $1 : E \times L \longrightarrow (E \times L)_K$ est continue.

Pour un compact fixé K de E , $1|_{K \times L}$ est continue si et seulement si, pour tout compact C de L , $1|_{K \times C} : K \times C \longrightarrow (E \times L)_K$ est continue.

On le démontre de la même façon que le résultat précédent en remarquant que, puisque K et L sont respectivement compact et localement compact, ils sont respectivement localement compact et engendré par ses compacts.

Au total, on a obtenu :

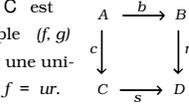
$1 : E \times L \longrightarrow (E \times L)_K$ est continue si et seulement si, pour tout compact K de E et tout compact C de L , $1|_{K \times C}$ est continue.

La dernière condition est remplie car $E \times L$ et $(E \times L)_K$ ont les mêmes compacts et induisent la même topologie sur chacun d'entre eux.

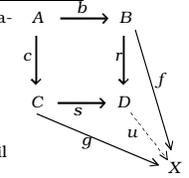
A2.3 Carrés cocartésiens

Définition

Le carré commutatif ci-contre d'une catégorie \mathcal{C} est **cocartésien** si et seulement si pour tout couple (f, g) de flèches de \mathcal{C} telles que $fb = gc$, il existe une unique flèche u de \mathcal{C} telle que $g = us$ et $f = ur$.



Autrement dit, avec nos conventions, on a le diagramme commutatif ci-contre.



Remarques

- En général, étant donné un couple (b, c) de flèches de même source d'une catégorie \mathcal{C} , il n'existe pas de couple (r, s) qui permette de compléter (b, c) en un carré cocartésien.
- Donnons-nous un couple (b, c) de flèches de même source d'une catégorie \mathcal{C} . Alors, si le couple (r, s) complète (b, c) en un carré cocartésien, il en sera de même de tous les couples de la forme (fr, fs) où f est une flèche inversible de \mathcal{C} .
- Réciproquement, si deux couples distincts (r, s) et (r', s') complètent (b, c) en un carré cocartésien, alors il est facile de vérifier qu'il existe une flèche inversible f de \mathcal{C} telle que $(r', s') = (fr, fs)$.

Dans la catégorie Ens des ensembles, comme dans la catégorie Top des espaces topologiques on peut toujours compléter un couple de flèches de même source en un carré cocartésien.

Proposition A2.3.1

Soit un couple (b, c) d'applications de même source.
Il existe alors un couple (r, s) d'applications qui complète (b, c) en un carré cocartésien dans Ens .

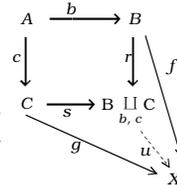
Soient donc $b : A \longrightarrow B$ et $c : A \longrightarrow C$ deux applications de même source. Considérons la relation d'équivalence engendrée sur $B \amalg C$ par la relation $\otimes : x \otimes y \iff \exists a \in A : \begin{cases} x = b(a) \\ y = c(a) \end{cases}$

Soit $B \amalg_{b,c} C$ le quotient de cette équivalence et soient les deux applications $i_B : B \longrightarrow B \amalg_{b,c} C$ et $i_C : C \longrightarrow B \amalg_{b,c} C$ qui sont respectivement obtenues en composant la surjection canonique associée à l'équivalence ci-dessus et les deux injections canoniques associées à $B \amalg C$. Il est facile de vérifier que le carré (b, c, i_B, i_C) est commutatif.

Il reste à montrer qu'il est cocartésien.

Soient donc deux applications f et g telles que $fb = gc$. L'application $f \amalg g : B \amalg C \longrightarrow X$ est alors compatible avec l'équivalence ci-dessus.

Elle se factorise alors par une unique application $u : B \amalg_{b,c} C \longrightarrow X$. Le diagramme ci-contre est donc commutatif.



Définition

L'ensemble $B \amalg_{b,c} C$ est appelé **somme amalgamée** de b et c .

Proposition A2.3.2

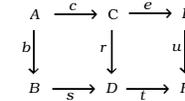
Soient $b : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ et $c : \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ deux applications continues de même source. Si on note respectivement B et C les ensembles sous-jacents à \underline{B} et \underline{C} , il existe sur $B \amalg_{b,c} C$ une topologie, notée $\underline{B \amalg_{b,c} C}$, telle que le carré (b, c, i_B, i_C) de la figure ci-dessus, qui est cocartésien dans Ens , soit cocartésien dans Top .

Il suffit de définir $\underline{B \amalg_{b,c} C}$ comme la topologie quotient de la relation d'équivalence dont $B \amalg_{b,c} C$ est le quotient.

Proposition A2.3.3

Considérons une catégorie \mathcal{C} et le diagramme commutatif de flèches de \mathcal{C} ci-contre.

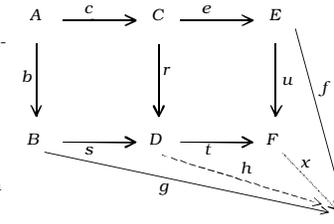
1) Si les deux carrés qui le composent sont tous deux cocartésiens, alors le carré composé sera cocartésien.



2) Si le carré composé est cocartésien, et si la flèche s est un épimorphisme alors le carré de droite sera cocartésien

1) La démonstration s'effectue en construisant la figure ci-contre en trois étapes successives :

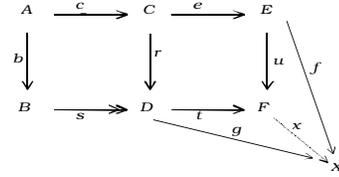
a) On se donne les deux carrés ainsi que les deux flèches f et g . (flèches en trait plein)



b) Le fait que le carré de gauche soit cocartésien entraîne, à partir des flèches f et g , l'existence et l'unicité de la flèche h (en grands pointillés) telle que le diagramme obtenu soit commutatif.

c) Le fait que le carré de droite soit cocartésien entraîne, à partir des flèches f et h , l'existence et l'unicité de la flèche x (en petits pointillés) telle que le diagramme obtenu soit commutatif.

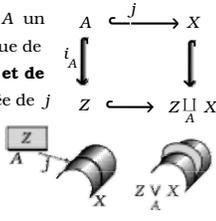
2) Le fait que le carré composé soit cocartésien entraîne, à partir des flèches f et gs , l'existence et l'unicité de la flèche x (en petits pointillés) telle que : $x \circ t \circ s = g \circ s$ et $x \circ y = f$.



s étant un épimorphisme, cela donne : $x \circ t = g$.
On va s'intéresser à des cas très particuliers de carrés cocartésiens que nous rencontrons dans ce cours. En premier lieu, un procédé de construction très souvent utilisé : le recollement de deux espaces topologiques.

Définition

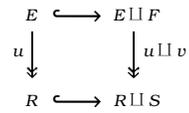
Soient X et Z deux espaces topologiques, A un sous-espace de Z et j une injection continue de A dans X . On définit le **recollement de X et de Z le long de A** comme la somme amalgamée de j et de l'inclusion i_A de A dans Z .



Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on désignera cet espace topologique par $Z \bigvee_A X$

Proposition A2.3.4

Soit le carré ci-contre où les flèches horizontales désignent les inclusions usuelles et les flèches verticales des surjections. Il est cocartésien si et seulement si v est bijective.



Supposons le carré cocartésien. Puisque $u \cup v$ est surjectif, v l'est

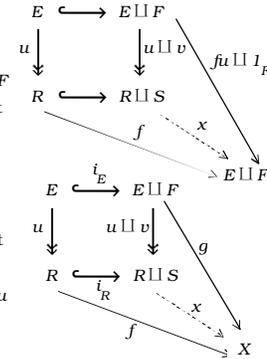
également. Soit $f: R \rightarrow E$.

Le carré étant cocartésien, il existe une application $x: R \cup S \rightarrow E \cup F$ telle que le diagramme ci-contre soit commutatif. On en déduit que $x|_S = i_F$ et donc que v est injective.

Supposons v bijective. Soient f et g deux applications $f: R \rightarrow X$ et $g: R \cup S \rightarrow X$ avec $g|_E = f \circ u$.

Soit $x := f \cup g|_F \circ v^{-1}$

$$x(u \cup v) = (f \cup g|_F \circ v^{-1})(u \cup v) = (f \circ u \cup g|_F \circ v^{-1} \circ v) = g|_E \cup g|_F = g$$



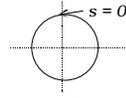
Exemple 2 du chapitre 3

$$s \in [0, 2\pi],$$

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

a) on déplace l'origine d'un quart de tour

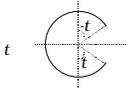
$$\eta_0: s \longmapsto (-\sin s, \cos s)$$



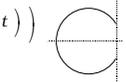
b) $s \in [0, \pi]$

On applique une transformation affine

$$\begin{cases} [0, \pi] \longrightarrow [-t, \pi+t] \\ s \longmapsto \frac{\pi+2t}{\pi} s - t \end{cases}$$



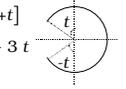
$$\eta_t: s \longmapsto \left(-\sin\left(\frac{\pi+2t}{\pi} s - t\right) - \sin t, \cos\left(\frac{\pi+2t}{\pi} s - t\right) \right)$$



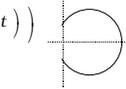
c) $s \in [\pi, 2\pi]$

On applique une autre transformation affine

$$\begin{cases} [\pi, 2\pi] \longrightarrow [\pi-t, 2\pi+t] \\ s \longmapsto \frac{\pi+2t}{\pi} s - 3t \end{cases}$$



$$\eta_t: s \longmapsto \left(-\sin\left(\frac{\pi+2t}{\pi} s - 3t\right) - \sin t, \cos\left(\frac{\pi+2t}{\pi} s - 3t\right) \right)$$



Bibliographie

- 1 **Algebraic topology.**
E. H. SPANIER,
MEGRAW HILL SERIES
- 2 **Simplicial objects in algebraic topology.**
J. PETER MAY
D. Van Nostrand Company, 1967.
- 3 **Categories for the working mathematician**
Saunders Mac Lane
Graduate texts in mathematics, Springer Verlag.
- 4 **Homotopical algebra**
Daniel G. Quillen
Lecture notes in mathematics, Springer Verlag.
- 5 **Complexe cotangent et déformations**
Luc Illusie
Lecture notes in mathematics, Springer Verlag.
- 6 **Calculus of fractions and homotopy theory**
Peter Gabriel - Michel Zisman
Ergebnisse der Mmathematik und hirer Grenzgebiete - Bnnd 35
- 7 Produits tensoriels topologiques d'E. V. T. ...
Séminaire Bourbaki (Polycopié)
- 8 **Simplicial Homotopy Theory**
P. G. GOERSS et J. F. JARDINE
Birkhauser
- 9 **Topology**
James DUGUNDJI
Wm. C. Brown Publishers
1989 - ISBN 0-697-06889-7).