Espaces métriques compacts

1 Introduction

La compacité est une notion qui, tout comme la complétude, nous permettra de nous assurer de l'existence de certains objets mathématiques. Elle permettra ainsi de prédir l'existence de la limite pour certaines suites ou l'existence des extremums pour une fonction numérique. Elle servira d'autre part a se ramener, partant d'une situation présentant "un caractère infini" à une situation "finie" et exploitable. Les espaces compacts sont une généralisation, dans le cadre des espaces topologiques, de la notion d'intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$.

2 Notions de base

Dans tout le chapitre, on se place sur un espace métrique (X,d) $.\mathcal{O}$ désignera les éléments de la topologie sur X induite par d .

Notation I désignera un ensemble quelconque (fini, dénombrable ou indénombrable).

Définition Soit $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}$(X). On dira que $(U_i)_{i\in I}$ est **un recouvrement ouvert de X** si $\forall i \in I, U_i \in \mathcal{O}$ et que

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Remarque On parlera de recouvrement fini (resp. dénombrable, quelconque...) si I est fini (resp. dénombrable, quelconque...).

Définition On remarquera qu'un espace métrique est toujours **séparé**, c'est à dire que si x et y $\in$ X, il existe toujours des ouverts O_x et O_y tel que $x \in O_x, y \in O_y\, et\, O_x \cap O_y = \emptyset$. (Il suffit de prendre des boules ouvertes d'un rayon suffisemment petit autour de x et de y).

Définition On dira que (X,d) est **un espace métrique compact** si il vérifie: De tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini.(C.a.d si

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i$$

alors il existe $I_0 \subset$I de cardinal fini et tel que

$$X = \bigcup_{i\in I_0} U_i).$$

On a la definition équivalente suivante:

Définition On dira que (X,d) est un espace topologique compact si il vérifie: De tout famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermé vérifiant

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$$

, on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide. (C.a.d que l'on peut trouver $\mathrm{I}_0 \subset I$ de cardinal fini et tel que

$$\bigcap_{i\in I_0} F_i = \emptyset).$$

Démonstration Soit $(F_i)_{i\in I}$ une suite de fermé d'intersection vide. Alors, on a

$$(\bigcap_{i\in I} F_i)^c = \bigcup_{i\in I} F_i^c = \emptyset^c = X.$$

$(F_i^c)_{i\in I}$ est donc un recouvrement ouvert de X . On peut alors en extraire un recouvrement fini. Soit donc $\mathrm{I}_0 \subset \mathrm{I}$ de cardinal fini tel que

$$\bigcup_{i\in I_0} F_i^c = X.$$

En repassant au complémentaire, on trouve l'égalité voulue:

$$\bigcap_{i\in I_0} F_i = \emptyset.$$

Corollaire Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de X compact alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Démonstration Il suffit de prendre la contraposée de la proposition précédente et de l'adapter à notre cas de figure (I=$\mathbb{N}$): Si pour une famille $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermé, on a pour toute partie fini I_0 de $\mathbb{N}$:

$$\bigcap_{i\in I_0} F_i \neq \emptyset$$

(ce qui est vrai ici car $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$$\bigcap_{i\in I_0} F_i = F_{i_0}$$

ou i_0=sup$\{i \in I_0\}$) alors on a

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$$

Exemple Les intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$ sont des espaces compacts pour la topologie définie par la valeur absolue.

3 Suites dans un espace métrique compact

Proposition Si (X,d) est un espace métrique compact, alors toute suite de X possède un point d'accumulation .

Démonstration En effet, on a vu dans le cours sur les espaces métriques que l'ensemble des points d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par $\bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{\{x_n; n > i\}}$. Posons

$$F_i = (\overline{\{x_n; n > i\}})_{i\in\mathbb{N}}.$$

La famille F_i est bien une suite décroissante de fermés non vides. Et donc, par application de la proposition précédente, l'intersection de tous les éléments de cette famille est non vide. L'ensemble des points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est par conséquent non vide. Cqfd.

En utilisant la proposition , on peut encore exprimer la proposition précédente sous la forme:

Proposition (X,d) est un espace métrique compact alors toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X possède une sous-suite convergente .

On peut donc affirmer que toute suite dans un espace métrique compact possède une sous suite convergente.

Remarque On pourrait se poser le problème de la réciproque. Donnons nous (X,d) un espace métrique ayant la propriété : De toutes suites de X, on peut extraire une suite convergente. Peut on alors affirmer que (X,d) est compact? La réponse est positive et est donnée pas le Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème (de Bolzano-Weierstrass) On a équivalence entre:

– (X,d) est compact.

– De toute suite de (X,d), on peut extraire une sous-suite convergente dans X.

Démonstration Le sens direct vient d'être prouvé. Pour la réciproque, la dém. se décompose en deux lem mes.: On considère donc un espace métrique (X,d) tel que de toute suite de X, on peut extraire une sous-suite convergente.

Lemme 1 Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon > 0$.

Démonstration Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que ce ne soit pas possible. Choisissons alors x_1 dans X. $B(x_1,\varepsilon)$ ne recouvre pas X . On peut donc trouver x_2 dans X n'appartenant pas à $B(x_1,\varepsilon)$. Supposons construit une famille $(x_i)_{i\in=1..n}$ de point de X tel que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\varepsilon)$$

ne recouvre pas X . On peut alors trouver x_{n+1} dans X n'appartenant pas à cette réunion et tel que la famille $(B(x_i,\varepsilon))_{i=1..n+1}$ ne recouvre toujours pas X. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tel que, pour tout i, j $\in \mathbb{N}$ d(x_i,x_j)>ε. Cette suite ne peut, par conséquent, avoir une sous-suite convergente . Ceci prouve le lem me par l'absurde.

Lemme 2 Donnons nous un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X. Il existe r>0 tel que $\forall x \in X, \exists i_x \in I / B(x,r) \subset U_{i_x}$.

Démonstration Raisonnons à nouveau par l'absurde et suppososons que pour tout r>0, il existe $x_r \in$ X tel que $B(x_r,r)$ n'est incluse dans aucun des U_i où $i \in I$. En particulier, pout tout n dans $\mathbb{N}$, on peut trouver x_n tel que $B(x_n,\frac{1}{n})$ n'est incluse dans aucun des U_i où $i \in I$. Cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit posséder, par hypothèse, une sous suite convergente $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Notons x $\in$ X sa limite .(x est donc aussi valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Mais comme $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. L'ouvert U_{i_0} est donc un voisinage de x. Par définition de la limite d'une suite : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N(ε) $\in \mathbb{N}$ tel que $\{x_{\phi(n)}; n > N(\varepsilon)\}$ est inclus dans $B(x,\varepsilon)$. Comme U_{i_0} est ouvert, on peut choisir ε assez petit en sorte que $B(x,\varepsilon)$ soit contenue dans U_{i_0}. Soit ε ainsi choisis. Si $n > N(\varepsilon)$,$x_n \in B(x,\varepsilon)$. De plus, si n est assez grand, on a même: $B(x_n,\frac{1}{n}) \subset B(x,\varepsilon) \subset U_{i_0}$, ce qui contredit notre hypothèse de départ. Cqfd.

Démontrons enfin le théorème de Bolzano-Weierstrass. Choisissons un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X. On sait, d'après le second lem me , qu'il existe un réél r>0 tel que pour tout x, $B(x,r)$ soit incluse dans l'un des U_i. Le lem me 1 appliqué dans le cas où $\varepsilon = r$ nous permet d'affirmer l'existence d'une famille $(x_i)_{i=1..n}$ de points de X tels que $(B(x_i,r))_{i=1..n}$ recouvre X. Mais pour tout k=1..n, il existe $i_k \in I$ tel que $B(x_k,r) \subset U_{i_k}$. La famille $(U_{i_k})_{k=1..n}$ recouvre alors X et du recouvrement initial, on a bien extrait un recouvrement fini .

Définition Le nombre r s'appelle **le nombre de Lebesgue** du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$.

4 Sous espaces métrique compacts

Définition On dit d'un **sous ensemble** de (X,$\mathcal{O}$) qu'il est **compact** s'il est compact pour la métrique induite de celle de X.

Remarque Afin de simplifier l'utilisation des sous espaces compacts, on donne la caractérisation suivante:

Proposition On a équivalence entre:
- K est un sous espace compact de X.
- Pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X tel que

$$K \subset \bigcup_{i_i n I} U_i,$$

il existe $I_0 \subset I$ de cardinal fini tel que

$$K \subset \bigcup_{i_i n I_0} U_i.$$

Démonstration Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de X, alors $(U_i \cap K)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de K pour la métrique induite de X sur K. Si K est compact , et que $(U_i \cap K)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de K, on peut en extraire un recouvrement fini et on aura nécessairement

$$K \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i$$

où I_0 désigne une sous partie finie de I. Réciproquement, si pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ vérifiant

$$K \subset \bigcup_{i_i n I} U_i,$$

on peut extaire une sous famille finie recouvrant K alors cela prouve que pour toute famille d'ouvert de K (pour la métrique induite de X sur K) et recouvrant K, on peut extraire une sous famille finie recouvrant K. K est donc compact pour la métrique induite.

Théorème Tout compact est fermé.

Démonstration Soit K un compact de X.(On peut avoir K=X).Montrons que K^c est ouvert . Si $K^c = \emptyset$ alors la dém. est terminée. Sinon soit $x \in K^c$. Comme X est un espace séparé , pour tout y dans K, on peut trouver un ouvert $O_{x,y}$ contenant x et un ouvert O_y contenant y tel que $O_{x,y} \cap O_y = \emptyset$. Mais on a l'inclusion

$$K \subset \bigcup_{y\in K} O_y.$$

La famille $(O_y)_{y\in K}$ definit donc un recouvrement ouvert de K. De ce recouvrement, on peut extraire un recouvrement fini $(O_{y_i})_{i\in 1..n}$. Posant

$$O = \bigcap_{i=1}^{n} O_{x,y_i}$$

(qui est ouvert comme intersection finie d'ouverts), on construit un ouvert de O contenant x et disjoint de K. On montre ainsi bien que K^c est ouvert et donc que K est fermé .

Théorème Tout fermé dans un compact est compact.

Démonstration Soient F un fermé et K un compact de X contenant F. Soit aussi $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts (ouverts pour la topologie de K) dont la réunion contient K. La famille $\{F^c\} \cup \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement ouvert de K. On peut donc en extraire un recouvrement fini de K $(U_i)_{i\in I_0}$ ou I_0 est une partie finie de I . Mais alors

$$F \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i,$$

et F est compact Cqfd.

Théorème Tout compact est borné .

Démonstration Supposons que K, compact de (X,d) ne soit pas borné . Soit x_0 un élément de K. Pour tout n $\in \mathbb{N}^*$, il existe un élément x_n de K appartenant à l'ensemble $B(x_0,n+1)\backslash B(x_0,n)$. La suite ainsi construite vérifie $\forall m,n \in \mathbb{N}\ d(x_n,x_m) > 1$ et ne peut avoir de suite extraite convergente atomamm15. Ceci rentre en contradiction avec le théorème de Bolzano-Weierstrass et prouve notre théorème

Proposition

– Une réunion finie de sous espaces compacts est compacte.
– Une intersection quelconque de sous espaces compacts est compacte.

Démonstration

– Soit $(K_i)_{i\in=1...n}$ une famille finie de sous espaces compacts. Soit K la réunion des éléments de cette famille et $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de K. Pour tout i=1...n, $(U_j \cap K_i)_{j\in J}$ est donc un recouvrement ouvert de K$_i$. Mais comme chaque K$_{i_0}$ est compact , pour tout i_0=1...n, on peut trouver un sous-ensemble fini J$_{i_0}$ de J tel que K$_{i_0}$ soit recouvert par la famille finie d'ouverts $(U_j \cap K_i)_{j\in J_{i_0}}$. Mais la famille $\{U_j\,;\, j \in J_{i_0}\,;\, i_0 = 1...n\}$ est finie, extraite de la famille $(U_j)_{j\in J}$ et recouvre K. D'un recouvrement quelconque de K, on a extrait un recouvrement fini et on a ainsi bien montré que K est compact .
– Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous espaces compacts. Cette fois ci K désignera l'intersection des éléments de cette famille. Remarquons tout d'abord que K est fermé comme intersection quelconque de fermés . De plus, pour tout i dans I, K est inclus dans K$_i$. Donc K est un sous ensemble fermé d'un espace compact . C'est donc un espace compact.

5 Continuité et compacité

Théorème fondamental L'image d'un compact par une application continue est compacte.

Démonstration Soient K un compact de (X,d), (Y,δ) un espace métrique et $f : X \longrightarrow Y$ une application continue de X dans Y. Soit $(U_i')_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(K)$ (pour la métrique induite sur $f(K)$ ...). On a donc

$$f(K) = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Rappelons que si A et B désignent deux ensembles quelconques de Y alors

$$f^{-1}(A\cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Alors

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i) \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i).$$

Mais f étant continue, chaque $f^{-1}(U_i)\cap K$ est un ouvert de K (pour la métrique induite de X sur K).Comme K est compact , on peut extraire de la famille $(f^{-1}(U_i)\cap K)_{i\in I}$ un recouvrement fini de K $(f^{-1}(U_i)\cap K)_{i\in I_0}$ (où I_0 est une sous partie finie de I). On a alors, comme

$$f(A)\cup f(B) = f(A\cup B),$$

$$f(K) \subset f(\bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(U_i)\cap K) \subset \bigcup_{i\in I_0} f(f^{-1}(U_i)\cap K)) \subset \bigcup_{i\in I_0} f(f^{-1}(U_i)) \subset \bigcup_{i\in I_0} U_i.$$

Et donc, du recouvrement initial de $f(K)$, on a extrait un recouvrement fini, ce qui prouve que $f(K)$ est compact .

Théorème fondamental On considère $(\mathbb{R},|\,|)$. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue de X dans $\mathbb{R}$. Et soit K un compact de X. Alors $f(K)$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et f atteind ses bornes sur K.

Démonstration Comme f est continue et que K est compact, $f(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$. Mais comme tout compact d'un espace métrique est un sous ensemble borné de cet espace métrique , on en déduit que $f(K)$ est borné dans $\mathbb{R}$. Mais tout ensemble borné de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieur (et une borne inférieur). Notons α sa borne sup. On peut alors écrire: $\forall\varepsilon > 0\, \exists x \in K / \alpha-\varepsilon < f(x) \leq \alpha$. En remplaçant ε par $\frac{1}{n}$ et ce pout tout n dans $\mathbb{N}^*$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K telle que: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$. Mais la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, étant incluse dans un compact, possède une suite extraite convergente $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et si nous notons x sa limite, x est élément de K. Par continuité de f, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_{\psi(n)}) = \alpha = f(\lim_{n\to\infty} x_{\psi(n)}) = f(x)$ et donc f atteind bien son maximum en un point de K. On pourrait procéder de même avec la borne inférieure.

Théorème (de Heine) On considère encore deux espaces métriques (X,d) et (Y,δ). On suppose aussi que X est compact. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application continue de X dans Y. Alors f est uniformément continue .

Démonstration Soit f comme dans l'énoncé du théorème Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur X (mais seulement continue). Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\eta > 0\, \exists x,y \in X tq\, d(x,y) < \eta\, et\, \delta(f(x), f(y)) > \varepsilon$. En particulier, en remplaçant η par $\frac{1}{n}$, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}\, d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$. Comme X est compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent des sous suites convergentes $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dans X . Soient x et y les limites respectives de ces deux sous suites. Par construction des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut affirmer que x=y. De plus , comme f est continue et que l'application $\delta : Y\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'application $g : Y\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \delta(f(x), f(y))$ est continue sur $Y\times Y$ muni de la topologie produit et on peut écrire :

$$\lim_{n\to\infty} \delta(f(x_{\phi(n)}), f(y_{\psi(n)})) = \delta(f(x), f(y)) = \delta(f(x), f(x)) = 0 > \varepsilon$$

ce qui est en contradiction avec notre choix de ε. Donc, f est bien uniformément continue.

6 Compacité et topologie métrique produit

Théorème (de Tychonov) Un produit fini d'espace métrique compact est compact pour la métrique produit .

Démonstration On considère la famille d'espace métrique $((X_i,d_i))_{i=1..k}$ et

$$(X = \prod_{i=1}^{k} X_i,d)$$

où d désigne la métrique produit. Il s'agit donc de montrer que (X,d) est compact. Pour ce faire, nous allons considérer une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_n^1,\ldots,x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ de X et montrer qu'elle possède une sous suite convergente , ce qui, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass , nous permettra de conclure. Tout d'abord, comme X_1 est compact, de la suite $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite convergente $(x^1_{\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(x_{\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}=(x^1_{\psi 1(n)},\ldots,x^k_{\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la première suite coordonnée de cette suite est convergente. Remarquons aussi que toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite que la suite de départ. La suite $(x^2_{\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de X_2 et possède donc une sous suite convergente. Cette sous suite est de la forme $(x^2_{\psi 2\circ\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. De plus d'après la remarque précédente, la suite $(x^1_{\psi 2\circ\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergeant dans X_1. La suite $(x_{\psi 2\circ\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}=(x^1_{\psi 2\circ\psi 1(n)},\ldots,x^k_{\psi 2\circ\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, les deux première suites coordonnées de cette suite sont convergentes. Un raisonement par récurrence nous permet encore de trouver k-2 applications $\psi_i\ pour\ i=3,..,k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, telles que $(x^1_{\psi k\circ\ldots\circ\psi 1(n)},\ldots,x^k_{\psi k\circ\ldots\circ\psi 1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour laquelle toutes les suites coordonnées sont des suites convergentes. Cette suite extraite est donc convergente , Cqfd.

Remarque Ce théorème est encore vrai dans le cas où le produit est dénombrable.