Nombres complexes

Emmanuel Vieillard-Baron

5 avril 2005

Programme officiel

1- Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes déjà abordées en classe de Terminale. Le programme combine l'étude du corps des nombres complexes et de l'exponentielle complexe avec les applications des nombres complexes aux équations algébriques, à la trigonométrie et à la géométrie.

Il est souvent commode d'identifier $\mathbb{C}$ au plan euclidien notamment pour les problèmes d'origine géométrique, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres complexes et, inversement, d'utiliser les nombres complexes pour traiter certaines questions de géométrie plane. En particulier, les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : calcul vectoriel, barycentre, alignement, orthogonalité distance, mesure d'angle.

a) Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, conjugaison dans $\mathbb{C}$.	La construction du corps $\mathbb{C}$ n'est pas exigible des étudiants. Notations $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, affixe d'un point, d'un vecteur ; image d'un nombre complexe.	Interprétation géométrique des transformations $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto z + b$.
Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire ; interprétation en termes de distances.	Notation $\lvert z\rvert$; relation $\lvert z\rvert^2 = \bar{z}z$. Interprétation géométrique de $\lvert z\rvert$, de $\lvert z-a\rvert$; disque ouvert (fermé) de centre a.

b) Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition du groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 Définition de $e^{i\theta}$, relations d'Euler. Propriétés de l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Formule de Moivre.	Par définition, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$. La dérivabilité et les variations des fonctions cosinus, sinus et tangente sont supposées connues, ainsi que leurs formules d'addition.
Linéarisation et factorisation d'expressions trigonométriques.	Les étudiants doivent connaître les formules donnant $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\tan(a+b)$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\tan 2x$. Ils doivent savoir exprimer $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ et $e^{i\theta}$ à l'aide de $\tan\frac{\theta}{2}$ et relier ces formules à la représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1.
Arguments d'un nombre complexe. Écriture d'un nombre complexe $z \neq 0$ sous la forme $\rho\, e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme trigonométrique).	
Racines n-ièmes de l'unité. Résolution de l'équation $z^n = a$.	

c) Équations du second degré

Résolution des équations du second degré à coefficients complexes ; discriminant.

d) Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $$e^z = e^x e^{iy} \quad \text{où} \quad z = x + iy.$$ Propriétés.	La dérivabilité et les variations de la fonction exponentielle réelle sont supposées connues, ainsi que son équation fonctionnelle.

e) Nombres complexes et géométrie plane

Interprétation des transformations : $$z \mapsto az,\ z \mapsto az + b,\ z \mapsto \frac{1}{z},\ z \mapsto \overline{z}.$$ Interprétation du module et de l'argument de $\frac{z-a}{z-b}$.	Les étudiants doivent savoir interpréter à l'aide des nombres complexes les notions suivantes de la géométrie euclidienne plane : distance, mesure d'angle, barycentre, alignement, orthogonalité.

1 Motivations à l'introduction d'un nouvel ensemble de nombres

2 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Proposition - Définition 1 (Corps des nombres complexes) *Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, dont les éléments, appelés* **nombres complexes***, s'écrivent de manière unique sous la forme $a + i\,b$ où a et b sont des réels et i tel que $i^2 = -1$. Cet ensemble est muni de deux lois $+$ et $\times$ définies ainsi :*

$$\forall a + i\,b,\ a' + i\,b' \in \mathbb{C}, \left\{ \begin{array}{c} (a + i\,b) + (a' + i\,b') = (a + a') + i(b + b') \\ (a + i\,b)(a' + i\,b') = (aa' - bb') + i(ab' + ba') \end{array} \right.$$

qui lui confèrent une structure de **corps***. L'inverse d'un élément $z = a + i\,b \neq 0$ est donné par*

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

<u>Démonstration :</u>
Prouvons l'existence de $\mathbb{C}$. Si on munit $\mathbb{R}^2$ d'une addition et d'une multiplication définies par :

$$\forall (a,b),\ (a',b') \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{c} (a,b) + (a',b') = (a + a', b + b') \\ (a,b)(a',b') = (aa' - bb', ab' + ba') \end{array} \right.$$

on montre facilement que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois possède une structure de corps.
En effet :
- par des calculs immédiats, on prouve que ces deux lois sont commutatives et associatives. On prouve de même que la multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- Le neutre pour l'addition est donné par $(0, 0)$. Celui pour la multiplication est donné par $(1, 0)$.
- Tout élément (a, b) possède un opposé : $(-a, -b)$. En effet : $(a, b) + (-a, -b) = (-a, -b) + (a, b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$.
- Tout élément (a, b) non nul de la forme possède un inverse :$(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$. En effet : $(a, b)\times(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = ((\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) \times (a, b) = (1, 0)$.
- On peut identifier l'ensemble des réels au sous ensemble de R^2 donné par $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}$. Cette identication respecte les lois additive et multiplicative de $\mathbb{R}$:$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0)$ et $(a, 0) \times (a', 0) = (a \times a', 0)$. On identifie alors les écritures : a et $(a, 0)$.
- Posons $i = (0, 1)$. On a $i^2 = (-1, 0)$ et $(0, b) = (b, 0)(0, 1)$, ce qui s'écrit, compte tenu de l'identification précédente et de la définition de i s'écrit : $(b, 0)(0, 1) = i\,b$. Par conséquent, pour si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + i\,b.$$

□

Définition 2 (Partie réelle, partie imaginaire) *Soit z un nombre complexe. Il existe une unique couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $z = a + i\,b$. Les nombres réels a et b sont appelés respectivement la partie réelle de z et la partie imaginaire de z et sont notés :*

$$a = \mathrm{Re}\,(z)\ , b = \mathrm{Im}\,(z).$$

3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 (Conjugué d'un nombre complexe) *Soit $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, un nombre complexe. Le* **complexe conjugué** *$\bar{z}$ de z est défini par : $\bar{z} = x - iy$.*

Proposition 4 *Pour tout z, $z' \in \mathbb{C}$, on a :*

1. $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.
2. $\bar{\bar{z}} = z$.
3. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
4. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
5. *Si* $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
6. $\begin{cases} \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \\ \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \end{cases}$

Démonstration : Calculs immédiats. Pour le quotient (5), on peut raccoucir les calculs en remarquant que si $u = \frac{z}{z'}$ alors $z = u\,z'$ et appliquer (4). □

4 Représentation géométrique

Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan. A tout point M de coordonnées $(x; y)$ dans ce repère on peut faire correspondre le nombre complexe $z = x + i\,y$. On réalise ainsi une bijection de $\mathbb{C}$ vers le plan : à tous nombre complexe on peut faire correspondre un point du plan et réciproquement à tout point du plan on peut faire correspondre un complexe. Cette représentation est due à **Jean Robert Argand**, mathématicien français du 18° siècle, et va s'avérer d'un grand intérêt en géométrie. Certains problèmes de géométrie se traduisent très bien en des calculs faisant intervenir des nombres complexes. Réciproquement, certains calculs avec les nombres complexes ont une interprétation géométrique "naturelle".

Définition 5 (Image d'un nombre complexe, Affixe d'un point, d'un vecteur) *Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan.*

- *On appelle* ***image du nombre complexe*** *$z = x + i\,y$ le point de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$.*
- *On appelle* ***affixe du point*** *M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $\mathcal{R}$ le complexe $z = x + i\,y$.*
- *On appelle* ***affixe du vecteur*** *$\overrightarrow{v} = \alpha\,\overrightarrow{i} + \beta\,\overrightarrow{j}$ le complexe $\alpha + i\,\beta$.*

5 Module d'un nombre complexe, Inégalités triangulaires

Définition 6 (Module d'un nombre complexe) *Soit $z = x + i\,y$ un nombre complexe. On appelle* ***module*** *de z le réel $|z|$ défini par :*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Démonstration : Si $z = x + i\,y$, $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$.$\square$

Proposition 7 *Pour tout nombre complexe z :*

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z| = |\bar{z}|$.
3. $\mathrm{Re}\,(z) \leq |\mathrm{Re}\,(z)| \leq |z|$.
4. $\mathrm{Im}\,(z) \leq |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.

Démonstration :

1. Soit $z = x + i\,y$ tel que $|z| = 0$ alors $a^2 + b^2 = 0$ ce qui n'est possible que si $a = b = 0$. Réciproquement, si $z = a + i\,b$ est tel que $a = b = 0$ alors nécessairement $|z| = 0$.
2. Évident.
3. Il est clair que si $z = a + i\,b$ alors $\mathrm{Re}\,(z) = a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.
4. Idem.

$\square$

Proposition 8 *Pour tout nombre complexe $z \neq 0$:*

1. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
2. $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$.

Démonstration :

1. Il suffit de partir de $z\bar{z} = |z|^2$.
2. C'est un corollaire immédiat du cas précédent.

$\square$

Proposition 9 *Pour tous nombres complexes z et z' :*

1. $|zz'| = |z||z'|$.
2. $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *si* $s' \neq 0$.
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
4. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

*Les deux dernières inégalités sont appelées **inégalités triangulaires**.*

Démonstration : Les deux premières égalités se prouvent facilement par un calcul direct. Soient z, $z' \in \mathbb{C}$. Démontrons la première inégalité triangulaire : ,

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \ \ (*)$$

$$\Leftrightarrow |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2.$$

Comme $|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')}$, $(*)$ est vraie si :

$$(z + z')\overline{(z + z')} \leq (|z| + |z'|)^2$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + z\bar{z'} + z'\bar{z} + z'\bar{z'} \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + z\bar{z'} + z'\bar{z} + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2$$

$$\Leftrightarrow |z\bar{z'} + z'\bar{z} \leq 2|z||z'|.$$

Remarquons que $2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{z'}) = z\bar{z'} + z'\bar{z}$ donc $(*)$ est vraie si :

$$\mathrm{Re}\,(z\bar{z'}) \leq |z||z'| = |z||\bar{z'}| = |z\bar{z'}|$$

qui est vraie en vertu de la proposition 7.

La seconde inégalité se démontre à l'aide de la première :

$$|z| = |z + z' - z'| \leq |z + z'| + |z'| \Rightarrow |z| - |z'| \leq |z + z'|.$$

En intervertissant les rôles de z et de z', on prouve :

$$|z'| - |z| \leq |z + z'|.$$

Ce qui termine notre démonstration :

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'|.$$

□

6 Argument, fonction exponentielle complexe

6.1 Argument d'un nombre complexe

On suppose ici connues les formules trigonométriques suivantes :

Soient θ, φ deux nombres réels :

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\, \cos(\varphi) - \sin(\theta) \sin(\varphi)$$
$$\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta)\, \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi)$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\, \sin(\varphi) + \sin(\theta) \cos(\varphi)$$
$$\cos(\theta - \varphi) = \cos(\theta)\, \sin(\varphi) - \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

Définition 10 (Argument d'un nombre complexe, Argument principal d'un nombre complexe) *Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé du plan. Soient z un nombre complexe* ***non nul*** *et $\overrightarrow{v}$ le vecteur d'affixe z. L'**argument** de z est une mesure θ, notée $\arg(z)$, de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}})$. Cette mesure est définie à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On écrira :*

$$\arg(z) = \theta \ \ [2\pi].$$

La valeur particulière de la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelée ***argument principal*** *de z.*

Remarque L'ensemble des argument d'un nombre complexe z est donné par l'ensemble

$$\{\theta_0 + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

où θ_0 est un argument de z.

Proposition 11 (Écriture sous forme trigonométrique des nombres complexes) *Si z est un nombre complexe non nul d'argument θ alors*

$$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta).$$

Démonstration : à écrire... □

Proposition 12 *Soient z et z' deux nombres complexes non nuls :*

1. $\arg(\bar{z}) = arg(\frac{1}{z} = arg(z)$ $([2\pi])$
2. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ $([2\pi])$
3. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')$ $([2\pi])$

Remarque L'argument d'un nombre complexe étant défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$), il est facultatif d'indiquer que les égalités précédentes ne sont valables qu'à $2k\pi$ près.

Démonstration : Soients z, $z' \in \mathbb{C}^*$. On peut supposer que z et z' sont de module égal à 1 sans que ça ne change la démonstration qui va suivre (FAUX....), si ce n'est en allégeant les écritures. Soit $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\,\theta + i\,\sin\,\theta} = \frac{cos\,\theta - i\,\sin\,\theta}{(\cos\,\theta + i\,\sin\,\theta)(cos\,\theta - i\,\sin\,\theta)} = \frac{cos\,\theta - i\,\sin\,\theta}{\cos^2\,\theta + \sin^2\,\theta} = cos\,\theta - i\,\sin\,\theta = \bar{z}.$$

Ce qui permet de démontrer le point 1.
Par ailleurs si $z = cos\,\theta + i\,\sin\,\theta$ et $z' = cos\,\theta' + i\,\sin\,\theta'$ alors

$$zz' = (\cos\,\theta \cos\,\theta' - \sin\,\theta \sin\,\theta') + i(\cos\,\theta \sin\,\theta' + \cos\,\theta \sin\,\theta) = \cos(\theta + \theta') + i\,\sin(\theta + \theta').$$

La dernière égalité découlant des formules trigonométriques rappelées en début de ce paragraphe. Voilà qui démontre le second point.
Enfin, $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z.\frac{1}{z}) = \arg(z) + \arg(\frac{1}{z'})$ en raison de la seconde formule de la proposition. Appliquant maintenant le 1. de cette même proposition, on obtient $\arg(z) + \arg(\frac{1}{z'}) = \arg(z) - arg(z')$, ce qui prouve 3. □

6.2 Fonction exponentielle complexe

Les relations

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\ \cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\ \sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi)$$

permettent d'établir l'égalité

$$\cos(\theta + \varphi) + i\,\sin(\theta + \varphi) = (\cos\,\theta + i\,\sin\,\theta)\,(\cos\,\varphi + i\,\sin\,\varphi)\,.$$

L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \mapsto \cos\,\theta + i\,\sin\,\theta$ vérifie donc

$$f(\theta + \varphi) = f(\theta) \times f(\varphi).$$

Cette relation fonctionnelle (A COMPLETER) est comparable à celle de l'exponentielle aussi, il est convenu de noter $f(\theta) = e^{i\theta}$ en sorte que l'écriture trigonométrique des nombres complexes vue dans la proposition 11 peut se condenser en

$$z = |z|(\cos\,\theta + i\,\sin\,\theta) = |z|e^{i\theta}$$

avec

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

Proposition - Définition 13 *Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\,\theta$. La fonction ainsi définie vérifie*

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

Remarque Si $z = \cos\theta + i\sin\theta$ alors $|z| = 1$.

Proposition 14 (Formule de Moivre, Formule d'Euler) *Soient θ, $\theta' \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.*

1. $e^{i\,n\,\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$
2. ***Formule de Moivre :*** $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.
3. ***Formule d'Euler :*** $e^{i\pi} = -1$

<u>Démonstration :</u> La première formule se démontre par récurrence : si $n = 0$, l'égalité est trivialement vérifiée. On suppose que l'égalité est vérifiée à l'ordre n et on va prouver qu'elle est encore vraie à l'ordre $n + 1$.

$$e^{i(n+1)\theta} = e^{i(n\theta+\theta)} = e^{in\theta}e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{n+1}.$$

La formule de Moivre est une ré-écriture de cette dernière formule en utilisant la définition de la fonction exponentielle.
La dernière formule s'obtient en remplaçant θ par 0 dans la définition de la fonction exponentielle. □

Définition 15 (Fonction exponentielle complexe) *Plus généralement, si $z = a + i\,b$, on pose*

$$e^z = e^{a+i\,b} = e^a e^{ib} = e^a.[\cos b + i\sin b].$$

*La fonction ainsi définie sur $\mathbb{C}$ s'appelle **fonction exponentielle complexe**.*

Remarque
- La fonction exponentielle complexe prolonge la fonction exponentielle réelle (ce qui signifie que sa restriction aux nombres réels coincide avec la fonction exponentielle réelle).
- La fonction exponentielle complexe ne s'annule jamais : $e^z = 0 \Leftrightarrow e^a e^{ib} = 0 \Leftrightarrow |e^z| = |e^a| \neq 0$.
- La fonction exponentielle complexe n'est pas bijective. Il sera par conséquent imossible de définir une fonction logarithme complexe. On a :

Proposition 16 *Tout nombre complexe z non nul est l'image, par l'exponentielle complexe, d'au moins un nombre complexe z_0. Les antécédents de z sont alors donnés par les nombres $z_0 + 2ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.*

<u>Démonstration :</u> □

Proposition 17 $\forall z,\, z' \in \mathbb{C}$ *:*

1. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
2. $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

7 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Proposition - Définition 18 (Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1) *Nous noterons $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1 :*

$$\mathbb{U} = \{z \,:\, |z| = 1\} = \{z \,:\, \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = e^{i\theta}\}$$

Cet ensemble vérifie les propriétés suivantes :
– *$\mathbb{U}$ est **stable** pour le produit (c.a.d $\forall z, z' \in \mathbb{U}\ z.z' \in \mathbb{U}$).*
– *Le produit est **associatif** (c.a.d $z, z', z'' \in \mathbb{U} \Rightarrow (z.z').z'' = z.(z'.z'')$).*
– *Le complexe 1 est élément de $\mathbb{U}$ et est le **neutre** du produit (c.a.d $\forall z \in \mathbb{U},\ z.1 = 1.z = z$).*
– *Si z est élément de $\mathbb{U}$, alors son **inverse** $\frac{1}{z}$ aussi.*
*On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ est muni d'une **structure de groupe**.*

Démonstration : $\square$

8 Racines nième de l'unité

9 Equations du second degré

10 Exponentielle complexe

11 Nombres complexes et géométrie plane

Index

Écriture sous forme trigonométrique des nombres complexes, 5

Argument d'un nombre complexe, Argument principal d'un nombre complexe, 5

Conjugué d'un nombre complexe, 3
Corps des nombres complexes, 2

Fonction exponentielle complexe, 7
Formule de Moivre, Formule d'Euler, 7

Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1, 8

Image d'un nombre complexe, Affixe d'un point, d'un vecteur, 3
inégalités triangulaires, 4

Module d'un nombre complexe, 3

Partie réelle, Partie imaginaire, 2