Espaces métriques complets

1 Introduction

Les espaces complets jouent en analyse un rôle fondamental. La notion de complétude est, en effet, à l'origine de théorèmes aussi importants que le théorème du point fixe en topologie (duquel découlent les théorème d'inversion locale en calcul différentiel et de Cauchy-Lipschitz dans la théorie des équations différentielles), le théorème de Baire (toujours en Topologie) (et duquel découlent le théorème de Banach-Steinhaus,le théorème de l'application ouverte...), et le théorème de projection de Riesz dans la théorie des espaces hilbertiens... La pluspart de ces théorèmes sont des théorèmes d'existence (existence d'un point fixe pour le théorème du point fixe, existence de l'inverse d'une fonction pour le théorème d'inversion locale, existence des solutions à une équation différentielle pour le théorème de Cauchy-Lipschitz...). C'est la notion de complétude qui, en garantissant l'existence d'une limite pour une certaine catégorie de suite, permet de construire chacun de ces objets.

2 Notions de base

Dans tous ce chapitre (X,d) désignera un espace métrique .

Définition On dira que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de **Cauchy** dans X si elle vérifie:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n,m > N \, d(x_n,x_m) < \varepsilon$$

Proposition Remarquons qu'une suite de Cauchy n'est pas nécessairement convergente mais qu'une suite convergente est toujours de Cauchy. D'ailleurs:

Définition Un espace métrique sur lequel les suites de Cauchy sont convergentes sera appelé **espace complet**.

Exemple ($\mathbb{R}$,| |) est un espace complet.

Exemple Sur ($\mathbb{Q}$,| |), on définit la suite suivante:

$$Soit\, a \in \mathbb{R}^{+*} \, u_0 = 1 \, et \, \forall n > 0 \, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$$

Cette suite est de Cauchy sur $\mathbb{Q}$ et converge vers $\sqrt{a}$, donc diverge dans $\mathbb{Q}$.

Remarque Ajoutons que cette notion de complétude dépend complètement de la métrique choisie pour l'espace et pas du tout de sa topologie. Ainsi, il est possible d'exhiber des espaces munis de deux métriques différentes et qui induiront des topologies équivalentes . Par contre, pour une des deux métriques les suites de Cauchy convergeront, ce qui ne sera pas le cas pour l'autre. En l'occurence, on a la propriété suivante.

Proposition Soient X un espace et d_1,d_2 deux métriques équivalentes sur X. Alors si (X, d_1) est complet, il en est de même de (X,d_2).De plus, toute suite de Cauchy convergente pour l'un est suite de Cauchy convergente pour l'autre.

Définition On dira d'une partie U de X qu'elle est **un sous espace complet de X** si elle est complète pour la métrique induite de celle de X.

3 Propriétés

Proposition Tout sous ensemble fermé d'un espace complet est complet.

Démonstration Soit F un fermé de X et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F. Cette suite est donc convergente dans X. Notons x sa limite. Comme F est un fermé dans un espace métrique, toute suite convergente de points de F a sa limite dans F . Donc x est élément de F.

Proposition Tout sous espace complet d'un espace métrique est fermé.

Démonstration Notons (X,d) l'espace métrique et U la partie de X qui est complète pour la métrique induite . Pour vérifier, dans un espace métrique, qu'un sous ensemble est fermé, il suffit de vérifier que toute suite convergente de ce sous ensemble a sa limite dans le sous ensemble . Prenons donc une suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de U. Comme cette suite est convergente, elle est de Cauchy . Mais notre sous ensemble U étant complet, sa limite est nécessairement dans U. On montre ainsi que U est fermé.

Définition On appelle **diamètre** d'un élément A de $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ le nombre δ(A)=$sup_{x,y\in A}$ d(x,y).

Remarque Le diamètre d'une partie de X peut être infinie.

La prop. suivante est parfois utile dans les démonstrations faisant intervenir la complétude.

Proposition On suppose que (X,d) est complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante de fermés de X pour laquelle $\lim_{n\to\infty}\delta(F_n) = 0$. Il existe alors un unique élément x de X tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Démonstration Soit donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille décroissante de fermés dont le diamêtre tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Prélevons dans chaque F_n un élément x_n et montrons que la suite ainsi construite est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to\infty}\delta(F_n) = 0$, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que si n>N alors $\delta(F_n) < \varepsilon$. Mais donc, par définition du diamêtre,

si n et m sont plus grands que N, d(x_n,x_m)<ε, ce qui prouve bien que la suite est de Cauchy. Mais (X,d) étant complet, elle converge vers un élément x de X.
Il reste à montrer que x est dans l'intersection des U_i. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existerait alors i dans $\mathbb{N}$ tel que x ne soit pas élément de U_i. Mais U_i étant fermé dans un espace complet, il est complet pour la distance induite. Donc la suite $(x_n)_{n\geq i}$ qui est incluse dans U_i et qui est de Cauchy pour la distance induite sur U_i converge dans U_i. Donc sa limite x est élément de U_i ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ. Donc x est dans l'intersection des U_i.

Proposition Tout produit fini d'espaces métriques (X_i,d_i) où $i \in I$ (*et où I est un ensemble fini*) complets est complet pour la métrique produit (si x=$(x_i)_{i\in I}$ et y=$(y_i)_{i\in I}$, d(x,y)=$\sup_{i\in I}$$d_i$($x_i$,$y_i$)).

Démonstration Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\prod_{i\in I} X_i$. Notons $(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ la j*ime* suite coordonnée. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour d, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que quelque soient n,m >N, on a d$(x_n,x_m) < \varepsilon$. Par definition de la métrique produit , cela implique, pour chacune des suites coordonnées: si n,m >N, on a $d_j(x_n^j,x_m^j) < \varepsilon$. Donc la j*ime* suite coordonnée est de Cauchy dans (X_j,d_j) et ce pour tout j dans I. Comme chaque (X_j,d_j) est complet, chaque suite coordonnees $(x_n^j)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément x^j de X_j. Montrons maintenant que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x=$(x^i)_{i\in I}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout i dans I, on peut trouver N_i tel que si n>N_i alors $d_i(x_n^i,x^i) < \varepsilon$. Posons N=$sup_{i\in I}\{N_i\}$. Pour ce N là et par definition de la métrique produit , on a: si n>N $d(x_n,x) < \varepsilon$.

Proposition $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique produit est complet.

Proposition Tout espace métrique compact (X,d) est complet.

Démonstration Soit (X,d) un espace métrique compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X.
Remarquons que si une suite de Cauchy possède une sous suite convergente , alors elle est convergente: Soient $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et x sa limite. Soit aussi $\varepsilon > 0$ et $n,m \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant l'inégalité triangulaire , $d(x,x_n) \leq d(x,x_{\phi(m)}) + d(x_{\phi(m)},x_n)$. Mais, comme$(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x , il existe $N(\frac{\varepsilon}{2})$ tel que si $m > N(\frac{\varepsilon}{2})$ alors $d(x,x_{\phi(m)}) < \frac{\varepsilon}{2})$. De plus, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N'(\frac{\varepsilon}{2})$ tel que si n et m sont plus grands que $N'(\frac{\varepsilon}{2})$ alors $d(x_{\phi(m)},x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors, $d(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, et ce dés que $n > sup(N,N')$.
Nous sommes maintenant en mesure de traiter la démonstration de notre prop.: Comme (X,d) est un espace métrique compact, la propriété de Bolzano-Weierstrass nous autorise à affirmer que la suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous suite convergente et donc, d'après la remarque précédente, qu'elle est convergente.

4 Théorème du point fixe

Soient (X,d) un espace métrique. On s'intéresse dans cette partie à une application $f : X \longrightarrow X$.

Définition On dit que x∈X est **un point fixe de** f si $f(x) = x$.

Définition Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Soit k un réél strictement positif. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est **lipschitzienne de rapport k** si $\forall x,y \in X\ \delta(f(x), f(y)) \leq kd(x,y)$. Si de plus k<1, on dit que f est **contractante**.

Remarque Si f est lipschitzienne, elle est continue .

Théorème (*du point fixe*) Si (X,d) est complet et que f est contractante alors f possède un point fixe dans X. De plus, ce point fixe est unique.

Démonstration Soit x_0 un élément de X. Posons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $x_n = f^n(x_0)$. On a donc, pour tout n $\in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = f(x_n)$. Supposons que cette suite converge vers un élément x de X. On a alors
$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$=f(x)
et donc x est un point fixe de f.(la troisième égalité provient de la continuité de f). Il s'agit donc de montrer que cette suite est convergente, ou encore, comme X est complet, qu'elle est de Cauchy.
Mais pour tout m,n dans $\mathbb{N}$, on a, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$d(x_n,x_{n+m}) = d(f^n(x_0), f^{n+m}(x_0)) \leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + ... + d(f^{n+m-1}(x_0), f^{n+m}(x_0))$$

Comme f est contractante, $\forall i \in \mathbb{N}\ d(f^{n+i}(x_0), f^{n+i+1}(x_0)) \neq k^{n+i} d(x_0, f(x_0))$.
On a alors

$$d(x_n,x_{n+m}) \leq k^n d(x_0, f(x_0)) + ... k^{n+m-1} d(x_0, f(x_0)) = k^n(1 + k + ... + k^{n+m-1}) d(x_0, f(x_0))$$

On a alors montré que: $d(x_n,x_{n+m}) \leq k^n(\frac{1-k^m}{1-k}) d(x_0, f(x_0))$
Mais comme f est contractante, k<1 et donc $k^n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour ε>0 donné, on peut alors trouver N assez grand tel que si n>N et m>0 $k^n(\frac{1-k^m}{1-k}) d(x_0, f(x_0)) < \varepsilon$.
Ceci prouve que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy .

Montrons par l'absurde l'unicité du point fixe. Supposons donc que f ait deux points fixes x et y. Comme f est contractante, on a $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Mais comme x et y sont des points fixes $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$. En comparant ces deux expressions, on aboutit immédiatemment à une contradiction.

Corollaire Si (X,d) est complet et que f^n est contractante alors f possède un point fixe dans X. De plus, ce point fixe est unique.

Démonstration Comme f^n est contractante, il existe un élément x de X qui est point fixe de f^n. Mais alors $f(f^n(x) = f^n(f(x)) = f(x)$. Donc $f(x)$ est aussi un point fixe de f^n. Mais d'après le théorème précédent, le point fixe de f^n est unique. Donc f(x)=x.

5 Le théorème de Baire

Définition On dit qu'un **espace topologique (Y,$\mathcal{O}$) (ou un espace métrique (Y,d))est de Baire** si pour toute famille d'ouvert $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}$,$\overline{U}_n = Y$, alors $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n} = Y$.

Remarque Cela revient à dire que (Y,$\mathcal{O}$) est de baire si pour toute famille de fermé d'intérieur vide alors la réunion de ces fermés est encore d'intérieur vide.

Théorème (*de Baire*) Si (X,d) est un espace métrique complet alors il est de Baire.

Démonstration Soit $(U_i)_{i\in I}$ vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N}$,$\overline{U}_n = X$. Montrons que l'intersection de tout les éléments de cette famille est dense dans X. Soit x un élément de X. Comme U_1 est dense dans X, pour tous $\varepsilon > 0$,$B(x,\varepsilon)\cap U_1 \neq \emptyset$. Fixons donc $\varepsilon > 0$.Comme cette intersection est ouverte (intersection de deux ouverts), Il existe $r'_1 > 0$ et x_1 dans X tel que $B_f(x_1,r'_1)\subset B(x,\varepsilon)\cap U_1 \neq \emptyset$. Posons r_1=inf($r'_1,\frac{\varepsilon}{2}$). On a donc $B_f(x_1,r_1)\subset B(x,\varepsilon)\cap U_1 \neq \emptyset$. Supposons cette construction faite à l'ordre n, c'est à dire que l'on suppose trouvés n points $x_1,...,x_n$ de X et n rééls strictement positifs $r_1,...,r_n$ tels que pour tout i dans $\{1,..,n\}$,$B_f(x_i,r_i)\subset B(x_{i-1},r_{i-1})\cap U_i \neq \emptyset$ et $r_i \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$(On pose $r_0 = \varepsilon$). Montrons que l'on peut la continuer à l'ordre n+1. Comme U_{n+1} est dense dans X, $B(x_n,r_n)\cap U_{n+1} \neq \emptyset$. Mais, comme précedemment, cette intersection est un sous ensemble ouvert de X. On peut donc trouver $r'_{n+1} > 0$ tel que $B_f(x_{n+1},r_{n+1})\subset B(x_n,r_n)\cap U_{n+1} \neq \emptyset$. Posons enfin r_{n+1}=inf($r'_{n+1},\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$) et on a bien effectué la construction voulue.

Remarquons maintenant que la famille $(B(x_n,r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermé dont le diamètre tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Comme X est complet, ceci implique que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,r_n)$ est un singleton $\{x_\infty\}$ où x_∞ est élément de X . Mais x_∞ est, par constuction élément de $B(x,\varepsilon)$ et de $U_n \forall n \in \mathbb{N}$. Donc

$$x_\infty \in B(x,\varepsilon) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

ce qui implique que

$$B(x,\varepsilon) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \emptyset$$

et comme x et ε sont arbitraires, que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X.