Roulettes et colliers

1 Problèmes

1) Une roulette circulaire est partagée en n secteurs égaux et chaque secteur possède l'une des couleurs d'une palette de c couleurs. Dénombrer les roulettes, étant entendu qu'on identifie les roulettes qui se correspondent par une rotation.

2) Un collier est constitué de n perles et chaque perle possède l'une des couleurs d'une palette de c couleurs. Dénombrer les colliers, étant entendu qu'on identifie les colliers qui se correspondent par une rotation ou par un retournement (symétie axiale).

2 Des rappels sur les actions de groupe

1) Définition

Une opération (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble E est une application f : $G\times E \longrightarrow E(\sigma,x) \rightarrow \sigma.x$ vérifiant les deux propriétés :

- $\forall x \in$E, x=x, e désignant l'élément neutre de G
- $\forall(\sigma,\tau)\in G^2, \sigma.(\tau.x) = (\sigma\tau).x$

2) Orbites

L'opération définit sur E une relation d'équivalence par : $x \simeq y \Leftrightarrow \exists\sigma\in G, y=\sigma.x$. Les classes d'équivalence sont appelées les **orbites**.

Le choix du mot orbite est un clin d'oeil à un exemple facile d'opération de groupe, où E est le plan affine euclidien et G le groupe des rotations autour d'un centre O donné, avec (r,M)$\rightarrow$r(M). Les orbites sont alors les cercles concentriques, de centre O.

3) Stabilisateur d'un élément

Pour tout x dans E, on considère S(x)=$\{\sigma\in G/\sigma.x=x\}$; S(x) est un sous-groupe de G, appelé **stabilisateur** de x.

4) Une première formule de dénombrement

Si G est un groupe fini et si $\omega(x)$ désigne l'orbite de x, alors :

$$Card(G) = Card(\omega(x))\times Card(S(x))$$

Démonstration

Pour un élément y de $\omega(x)$, soit $C_y = \{\sigma\in G/\sigma.x=y\}$. Si τ est un élément particulier de C_y, on peut définir la bijection: $C_y \longrightarrow S(x)$, $\sigma\rightarrow\tau^{-1}\sigma$.

Donc Card(C_y)=Card(S(x))

Et :

$$Card(G) = \sum_{y\in\omega(x)} Card(C_y) = \sum_{y\in\omega(x)} Card(S(x)) = Card(\omega(x)) \times Card(S(x))$$

5) Théorème de Burnside-Frobenius
Soit Ω l'ensemble des orbites.
Pout tout élément σ de G, on pose : $A_\sigma = \{x \in E / \sigma.x = x\}$
Alors :

$$Card(\Omega) = \frac{1}{Card(G)} \sum_{\sigma\in G} Card(A_\sigma).$$

Démonstration
Soit U=$\{(\sigma,x) \in G \times E / \sigma.x = x\}$.

$$Card(U) = \sum_{\sigma\in G} Card(A_\sigma)$$

$$= \sum_{x\in E} Card(S(x)) = \sum_{\sigma\in G}\sum_{x\in\omega} Card(S(x)) = \sum_{\sigma\in G}\sum_{x\in\omega} \frac{Card(G))}{Card(\omega)} = \sum_{\omega\in\Omega} Card(G)$$

$$= Card(\Omega) \times Card(G).$$

3 Application au problème des roulettes

Si l'on interdit aux roulettes de tourner, le problème est facile : il y a c^n coloriages possibles.
Soit E l'ensemble de ces coloriages.
On fait opérer sur E le groupe cyclique G engendré par une rotation d'ordre n.
La réponse au problème est le nombre d'orbites, qui sera fourni par le théorème de Burnside-Frobenius.

Il reste à calculer Card(A_σ) pour toute rotation σ du groupe G. L'ordre d'un élément σ du groupe G est un diviseur d de n. Le groupe cyclique engendré par σ opère sur l'ensemble des n secteurs et définit n/d orbites. Pour qu'un coloriage de E appartienne à A_σ , il faut et il suffit que les secteurs d'une même orbite soient d'une même couleur. Il s'agit donc de choisir une couleur pour chaque orbite et: Card(A_σ)=$c^{n/d}$.
Le nombre de rotation d'ordre d est φ(d) , où φ désigne l'indicateur d'Euler.
La formule de Burnside-Frobenius donne finalement :

$$Card(\Omega) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \varphi(d).c^{n/d}.$$

4 Application au problème des colliers

Là encore, le problème est facile si l'on interdit les rotations et retournement du collier : Il y a alors c^n coloriages posibles.
On fait opérer sur l'ensemble E de ces coloriages le groupe diédral D_n des isométries conservant un polygone régulier à n sommets, qui contient les n rotations comme pour les roulettes et n symétries axiales. Pour les symétries, on est amené à discuter suivant la parité de n.

1) Cas où n est impair

C'est le cas le plus facile : pour toute symétrie σ, l'axe passe par une perle et les (n-1) autres perles se répartissent en (n-1)/2 paires contenant deux perles symétriques.

Pour un élément de A_σ, il s'agit de choisir la couleur de la perle de l'axe et les couleurs des (n-1)/2 paires ; donc :

La formule de Burnside-Frobenius donne finalement :

$$Card(\Omega) = \frac{1}{2n}(\sum_{d|n} \varphi(d).c^{n/d} + n.c^{(n+1)/2}).$$

2) Cas où n est pair

Il existe alors deux types de symétries : celles dont l'axe ne passe par aucune perle et celles dont l'axe passe par deux perles.

Si σ est une symétrie du premier type, il s'agit, pour un élément de A_σ , de choisir la couleur des n/2 paires de deux perles symétriques ; donc :$Card(A_\sigma)=c^{n/2}$.

Si σ est une symétrie du second type, il s'agit, pour un élément de A_σ, de choisir la couleur des deux perles de l'axe et des (n-2)/2 paires de deux perles symétriques ; donc : $Card(A_\sigma)=c^{(n+2)/2}$

Le groupe diédral contient n/2 symétries de chaque type.

La formule de Burnside-Frobenius donne finalement :

$$Card(\Omega) = \frac{1}{2n}(\sum_{d|n} \varphi(d).c^{n/d} + \frac{n}{2}.c^{n/2} + \frac{n}{2}.c^{\frac{(n+2)}{2}}).$$