Les Mathématiques pour l'Agrégation

C. Antonini
J.-F. Quint
P. Borgnat
J. Bérard
E. Lebeau
E. Souche
A. Chateau
O. Teytaud

21 mai 2002

Table des matières

Chapitre 1

Formulaires

1.1 Espaces topologiques

Catégorie	Exemples
Ouvert	$Isom(E,F)$ avec E et F Banach, dans $\mathcal{L}(E,F)$
Fermé	compact d'un séparé
Borné	compact d'un métrique
Espaces compacts	Espaces projectifs Complété d'Alexandrov d'un espace séparé non compact, localement compact Produit de compacts boule fermée d'un espace vectoriel normé de dim finie Cantor Tapis de Sierpinski
Espaces connexes par arc	Espaces projectifs Cube de Hilbert Ouvert connexe d'un espace vectoriel normé Boule Image d'un connexe par arcs par une application C^0 Tapis de Sierpinski, eponge de Menger Ensembles de Julia $SO(n)$, $SU(n)$
Espaces connexes	Produit de connexes Image d'un connexe par une application C^0
Espaces de Montel. (métrisables, compact équivaut à fermé borné[a]) [a]Borné au sens des espace vectoriel topologiques.	$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ $H(\Omega)$ avec Ω ouvert de $\mathbb{C}$
Espace complet	$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $L^p(\Omega)$
Espace métrisable	Boule unité fermée du dual d'un espace séparable pour la topologie faible Cube de Hilbert
Localement connexe par arcs	
Localement compact	

1.2 Equivalents en l'infini

1.2.1 Séries

u_n et v_n suites réelles, $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Si $U_n \to U$, $R_n = U - U_n$, si $V_n \to V$, $R'_n = V - V_n$.

Hypothèse	Conclusion
$u_n > 0$ $u_n \simeq v_n$ U_n converge	V_n converge $R_n \simeq R'_n$
$v_n > 0, u_n > 0$ $v_n = o(u_n)$ V_n diverge	U_n diverge $U_n \simeq V_n$

1.2.2 Intégrales

f et g définies sur $]a, +\infty[$ intégrables sur $]a, x[$ pour tout $x > a$.

ON SUPPOSE QUE f EST POSITIVE

On définit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Si F a une limite en $+\infty$ on définit $R_f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$, et si G a une limite en $+\infty$ on définit $R_g(x) = \int_x^\infty f(t)dt$.

Alors on a les résultats suivant au voisinage de $+\infty$:

$$\left\{\begin{array}{ll} \int_a^x f(t)dt = +\infty & \left\{\begin{array}{c} g = o(f) \Rightarrow G = o(F) \\ g = O(f) \Rightarrow G = O(F) \\ g \simeq f \Rightarrow F \simeq G \end{array}\right. \\ \int_a^x f(t)dt < +\infty & \left\{\begin{array}{ll} g = o(f) \Rightarrow & \left\{\begin{array}{c} \int_a^\infty g(t)dt \text{ existe} \\ R_g = o(R_f) \end{array}\right. \\ g = O(f) \Rightarrow & \left\{\begin{array}{c} \int_a^\infty g(t)dt \text{ existe} \\ R_g = O(R_f) \end{array}\right. \\ g \simeq f \Rightarrow & \left\{\begin{array}{c} \int_a^\infty g(t)dt \text{ existe} \\ R_g \simeq R_f) \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

1.3 Dérivation de limites

E et F des espaces vectoriels normés , U ouvert de E, (f_n) suite d'applications de U dans F différentiables.

Hypothèses	Conclusions
f_n convergeant simplement vers f, les Df_n convergeant <u>uniformément</u> vers une certaine application g de U dans $\mathcal{L}(E,F)$,	• f différentiable et $Df = g$ • Pour tout C convexe borné $\subset U$ la convergence de $f_{n\|C}$ vers $f_{\|C}$ est uniforme • Si les f_n sont C^1 alors f est C^1.
U connexe, F Banach. $\exists x_0$ / $f_n(x_0)$ converge, $\forall x\ \exists V_x$ voisinage de x tel que la suite des $Df_{n\|V_x}$ soit de Cauchy pour la métrique d définie par $$d(f,g) = sup_{z\in V_x}\|f(z)-g(z)\|$$ (ie la suite des Df_n converge normalement sur un certain voisinage de tout point)	Alors il existe f de U dans F tel que : • f est dérivable en tout point • la suite des f_n converge vers f (simplement) • tout x possède un voisinage V_x tel que les convergences de f_n et Df_n restreints à V_x soient uniformes. • Si les f_n sont C^1, f l'est aussi.

1.4 L'indispensable sous le signe intégral

X muni d'une mesure μ, (E,d) un espace métrique. $f : E\times X \to \mathbb{C}$, $F(t) = \int_X f(t,x)d\mu(x)$

Hypothèses	Conclusion
Pour tout t l'application $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable Pour presque tout x la fonction $t\mapsto f(t,x)$ est continue en T Il existe g L^1 telle que pour tout t et presque tout x $\|f(t,x)\| \leq g(x)$	F est continue en T.
Pour tout t l'application $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable Pour presque tout x la fonction $t\mapsto f(t,x)$ est continue sur E Pour tout compact K de E il existe g L^1 telle que pour tout t dans K et presque tout x $\|f(t,x)\| \leq g(x)$.	F est continue sur E.
E est un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ [a] Pour presque tout t $x\mapsto f(t,x)$ est L^1 Il existe N négligeable tel que pour tout $x\notin N$ la fonction $t\mapsto f(t,x)$ est dérivable (resp. C^1) [b]. Pour tout compact K de E il existe une fonction g L^1 telle que pour tout t dans K et tout $x \notin N$ $\|\frac{\delta f}{\delta t}(t,x)\| \leq g(x)$. [a]Hypothèse facile à retenir ; il s'agit de pouvoir définir une dérivée au sens le plus commun, ie dérivée d'une fonction d'une variable réelle ou complexe ! [b]Attention ! Dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{C}$ on parle de dérivabilité au sens complexe, et pas de différentiabilité en voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel !	Pour tout t la fonction $x\mapsto \frac{\delta f}{\delta x}(t,x)$ est L^1 F est dérivable (resp. C^1), de dérivée $\int_X \frac{\delta f}{\delta t}(t,x)dx$.
E est un ouvert de $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour presque tout t $x\mapsto f(t,x)$ est L^1 Il existe N négligeable tel que pour tout $x\notin N$ la fonction $t\mapsto f(t,x)$ est C^k. Pour tout compact K de E et tout $j\in[1,k]$ il existe une fonction g L^1 telle que pour tout t dans K et tout $x\notin N$ $\|\frac{\delta^j f}{\delta t^j}(t,x)\| \leq g(x)$.	Pour tout t la fonction $x\mapsto \frac{\delta^j f}{\delta t^j}(t,x)$ est L^1 F est C^k, et pour $j\in[0,k]$ $\frac{\delta^j F}{\delta t^j} = \int_X \frac{\delta^j f}{\delta t^j}(t,x)dx$.

1.5 Convergence d'une série à termes positifs

Hypothèse	Conclusion
Critère de D'Alembert	
$u_{n+1}/u_n \to L < 1$	Série converge
$u_{n+1}/u_n \to L > 1$	Série diverge
Critère de Cauchy	
$limsup\sqrt{u_n} = L < 1$	Série converge
$limsup\sqrt{u_n} = L > 1$	Série diverge
Critère de Raabe-Duhamel	
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - a/n + O(1/n^2)$, $a > 1$	Série converge
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - a/n + O(1/n^2)$, $a < 1$	Série diverge

1.6 Convergence d'une série semi-alternée

$U_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$, $U = \lim U_n$, $R_n = U - U_n$

Hypothèse	Conclusion
Critère de Leibnitz	
(ϵ_n) suite décroissante, $\epsilon_n \to 0$, $u_n = (-1)^n \epsilon_n$	$\sum u_n$ converge $R_n \leq \lvert a_{n+1}\rvert$
Méthode d'Abel, dans un Banach	
(ϵ_n) suite décroissante, (a_n) / $\sum_{n=0}^{N} a_n$ borné $\epsilon_n \to 0$, $u_n = \epsilon_n a_n$	$\sum u_n$ converge $R_n \leq \lvert a_{n+1}\rvert$

1.7 Les séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon, A sa fonction somme.

Hypothèse	Conclusion
Formule d'Hadamard	
	$R = \frac{1}{limsup\lvert a_n\rvert^{1/n}}$ (avec $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$)
Critère de D'Alembert	
a_n non nul à partir d'un certain rang a_{n+1}/a_n tend vers L	$R = 1/L$
Théorème de Césaro	
(b_n) suite réelle > 0, (a_n) suite réelle, $\sum b_n$ divergente, $a_n = o(b_n)$ ou $a_n \simeq b_n$, R rayon de convergence de $\sum b_n z^n$	$A(x) = \sum a_n x^n$ sur $]-1,1[$ bien défini, $B(x) = \sum b_n x^n$ sur $]-1,1[$ bien défini, $a = o(b) \Rightarrow A = o(B)$ en R, $a \simeq b \Rightarrow A \simeq B$ en R

1.8 Densité, approximation

Théorème de Stone

K compact, A sous-algèbre unitaire de l'algèbre $C^0(K,\mathbb{R})$. Si A sépare les points, alors A est dense dans $C^0(K,\mathbb{R})$ pour la norme infinie.

Théorème de Stone, version complexe

K compact, A sous-algèbre unitaire de l'algèbre $C^0(K,\mathbb{C})$ stable par passage au conjugué. Si A sépare les points, alors A est dense dans $C^0(K,\mathbb{C})$ pour la norme infinie.

Théorème de Weierstrass

K compact de $\mathbb{R}$, l'ensemble des polynômes de K dans $\mathbb{R}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ pour la convergence uniforme.

pas valable pour les polynômes d'un compact de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$!

Théorème de Lusin

f mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, dont le support est inclus dans un ensemble de mesure finie. Alors pour tout ϵ il existe g continue sur $\mathbb{R}^n$ égale à f sauf sur un ensemble de mesure $< \epsilon$, bornée en module par $\sup |f|$.

f mesurable bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, dont le support est inclus dans un ensemble de mesure finie. Alors f est limite simple presque partout d'une suite de fonctions continues et bornées (par la même borne).

$C_c^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ [a] est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

[a] Ensemble des fonctions C^k à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Si $p \neq \infty$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Si $p \neq \infty$, les classes des fonctions en escalier à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Les classes des fonctions C^∞ à support compact sont denses dans l'ensemble des fonctions de L^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

1.9 Trigonométrie

Formule	Preuve
$cos(x) = Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $sin(x) = Im(e^{ix}) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$	Définition.
$cos' = -sin$ $sin' = cos$	$(x \mapsto e^{ix})' = (x \mapsto ie^{ix})$
$cos^2 + sin^2 = 1$	$e^{ix}e^{-ix} = 1$
$\exists \pi > 0$minimal/ $cos(\pi/2) = 0$	$cos(0) = 1,$ donc si $cos(\mathbb{R}^+) > 0$ $sin \uparrow, sin(x) > sin(a),$ donc $cos(x) + xsin(a)$ décroit, or $cos(x) + xsin(a) \to \infty$ Par déf,$\pi = 2infcos^{-1}(0) \cap \mathbb{R}^{+*}$
$\pi > 0$	continuité de cos
$e^{i\pi/2} = i, e^{i\Pi} = -1,$	corollaire de ci-dessus.
$e^{i\pi} = 1,$	
e $2i\pi -$ pério	
cos et sin 2π pério	
$Arccos(x) + Arcsin(x) = \Pi/2$	Dérivée nulle + valeur en 0
$FormuledeMoivre$	
$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$	$e^{inx} = e^{ix^n}$
$Formulesdelinarisation$	
$cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}(cos(a+b) + cos(a-b))$	$cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$(développer)
$sin(a)sin(b) = \frac{1}{2}(cos(a-b) - cos(a+b))$ $sin(a)cos(b) = \frac{1}{2}(sin(a+b) + sin(a-b))$	$sin(x) = cos(x+\pi/2)$ (apprendre la méthode, non le résultat)
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a)$	combinaison linéaire des formules de linéarisation
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$ $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$	$sin(x) = cos(x+\pi/2)$ b devient $-b$
$\cos(c) + \cos(d) = 2\cos(\frac{c+d}{2})\cos(\frac{c-d}{2})$ $\cos(c) - \cos(d) = -2\sin(\frac{c+d}{2})\sin(\frac{c-d}{2})$ $\sin(c) + \sin(d) = 2\sin(\frac{c+d}{2})\cos(\frac{c-d}{2})$ $\sin(c) - \sin(d) = 2\sin(\frac{c-d}{2})\cos(\frac{c-d}{2})$	Formules ci-dessus, plus $c = a+b, d = a-b$ puis $\sin(x) = \cos(x+\pi/2)$

Retenir $\cos(a)\cos(b)$, $\cos(a+b)$, $\cos(a)+\cos(b)$ devrait suffire, modulo l'entrainement pour retrouver le reste.

1.10 Trigonométrie hyperbolique

$cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$
$sinh(x) = \frac{e^{-x}-e^{-x}}{2}$
$tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$
$cotanh(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)} = \frac{1}{tanh(x)}$
$cosh(x+y) = cosh(x)cosh(y) + sh(x)sh(y)$
$sinh(x+y) = sinh(x)sinh(y) + cosh(x)sinh(y)$
$cosh(x)^2 - sinh(x)^2 = 1$
$cosh(2x) = cosh(x)^2 + sinh(x)^2$
$cosh(2x) = 2cosh(x)^2 - 1$
$sinh(2x) = 2sinh(x)cosh(x)$
$cosh(x) = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ avec $u = tanh(x/2)$
$sinh(x) = \frac{2u}{1-u^2}$

1.11 Les changements de variable magiques dans le calcul de primitive

$f(x) = cos(x)^n sin(x)^m$	$2\|n+1 \Rightarrow u = sin(x)$ $2\|m+1 \Rightarrow u = cos(x)$ Linéarisation.
$f(x) = F(cos(x), sin(x))$ $F \in \mathbb{R}(X)$	f paire $\Rightarrow u = sin(x)$ f impaire $\Rightarrow u = cos(x)$ f $T-$ périodique $\Rightarrow u = tan(\Pi x/T)$ sinon $u = tan(x/2),\ cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ $sin(x) = \frac{2u}{1+u^2},\ dx = \frac{du}{1-u^2}$
$F(x, \sqrt{ax+b})$	$u = \sqrt{ax+b}$
$F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ $F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	$a > 0 \Rightarrow u = \sqrt{ax^2+bx+c} - ax$ $a < 0 \Rightarrow (x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ parcourt un bon d'ellipse on paramètre pour que x soit un cos de u et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ un sin de u
$F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$	$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

1.12 Primitives usuelles

Sauf mention contraire, les primitives sont valables sur l'ensemble de définition.

$f(x)$	$\int^x f(u)du$	Précisions
x^a $1/x$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$ $ln\|x\|$	$a \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$	$a \in \mathbb{C}^*$
cos sin tan $cotan$($Remarque$:cotan(x)=1/tan(x).)	sin $-cos$ $-ln\|cos(x)\|$ $ln\|sin(x)\|$	
$1/cos$ $1/sin$	$ln\|tan(x/2+\pi/4)\|$ $ln\|tan(x/2)\|$	
$1/cos^2$ $1/sin^2$ $1/(sin(x)cos(x))$ tan^2	tan $-1/tan$ $ln\|tan(x)\|$ $tanx - x$	
ch sh $th(x)$ $coth(x)$ $1/sh(x)$ $1/ch(x)$ $th(x)^2$ $1/(sh(x)ch(x))$ $1/ch^2$ $1/sh^2$	sh ch $ln\ ch(x)$ $ln\|sh(x)\|$ $ln\|th(x/2)\|$ $2Arctan(e^x)$ $x - th(x)$ $ln\|th(x)\|$ th $-coth$	
$1/(x^2+a^2)$ $1/(x^2-a^2)$ $1/(a^2-x^2)$	$\frac{1}{a}arctan(x/a)$ $\frac{1}{2a}ln\|\frac{x+a}{x-a}\|$ $\frac{1}{a}argth(x/a)$	$a \neq 0$ $a \neq 0$ $a \neq 0, x < a$
$1/\sqrt{x^2+a}$ $1/\sqrt{a^2-x^2}$	$ln\|x+\sqrt{x^2+a}\|$ ou $argsh(x/\sqrt{a})$ ou $argch(-x/\sqrt{-a})$ si $x > \sqrt{-a}$ ou $-argch(x/\sqrt{-a})$ si $x < \sqrt{-a}$ $arcsin(x/\|a\|)$	 $a > 0$ $a < 0$ $a < 0$ $a \neq 0$
$\frac{1}{(x^2+a)^{3/2}}$ $\frac{1}{(a-x^2)^{3/2}}$	$\frac{x}{a\sqrt{x^2+a}}$ $\frac{x}{a\sqrt{a-x^2}}$	$a \neq 0$ $a \neq 0$
$I_n = 1/(1+x^2)^n$ $I_n = 1/(1-x^2)^n$	$2nI_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1)I_n$ $2nI_{n+1} = \frac{x}{(1-x^2)^n} + (2n-1)I_n$	

Pour une primitive de fraction rationnelle réelle décomposée en éléments simples, on a besoin d'intégrer des termes en (i) $a/(cx+d)^n$ (facile), des éléments en (ii) $\frac{b}{(x^2+dx+e)^n}$ et des éléments en (iii) $\frac{x+b}{(x^2+dx+e)^n}$. Pour (i), c'est facile. Pour (ii), il suffit de penser à reformuler x^2+dx+e en $(x+d/2)^2+f$, et d'appliquer le formulaire ci-dessus avec un changement de variable $u = \frac{x+d/2}{\sqrt{f}}$[1] et par l'une des formules du tableau ci-dessus. Pour (iii), il suffit de réécrire $x+b$ en $\frac{1}{2}(x+b+(p-b)\ -\ (p-b))$, chacun des deux quotients obtenus s'intégrant sans peine par (ii) ou parce que de la forme u'/u^n (cf $\log$ ou u^{-n+1}).

[1] f étant positif du fait que le discréminant du polynôme est négatif.

1.13 Dérivées

La plupart des dérivées s'obtiennent en utilisant le fait que la dérivée de $f \circ f^{-1}$ est 1.

$f(x)$	$f'(x)$
$ln(ax)$	$frac1t$
e^{ax}	$a\ e^{ax}$
x^a	$a\ x^{a-1}$
$cos(ax)$	$-a\ sin(ax)$
$sin(ax)$	$a\ cos(ax)$
$tan(ax)$	$\frac{a}{cos(ax)^2}$
$Arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$Arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$Arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$cosh(x)$	$sinh(x)$
$sinh(x)$	$cosh(x)$
$tanh(x)$	$\frac{1}{tanh(x)^2}$
$cotanh(x)$	$\frac{-1}{sinh(x)^2}$
$argsinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$argcosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$argtanh(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

FLEMMARD

1.14 Différentielles

Application	Différentielle
E, F Banach $Isom(E,F) \to Isom(F,E)$ $\phi : f \mapsto f^{-1}$	$\phi C^\infty\ \phi'(u)(h) = -u^{-1}hu^{-1}$ $\phi^{(n)}(u)(h_1, \dots, h_n)$ $= (-1)^n \sum_{\sigma \in \sigma_n} u^{-1} \circ h_{\sigma(1)} \circ u^{-1} \circ h_{\sigma(2)} \circ \dots h_{\sigma(n)} \circ u^{(-1)}$

1.15 développements limités

Le développement limité de e, de sin et de cos découlent directement de leur définition. Pareil pour $cosh$, $sinh$.

La plupart des autres développements limités suivant s'obtiennent grâce à la formule de Taylor-Young **??**. Toutefois, le développement limité de $Arctan$ s'obtient par intégration, ainsi que ceux de $Arcsin$, $Arctanh$, $Argsinh$. Le développement limité de $Arccos$ s'obtient à partir de celui de $Arcsin$ par $Arccos(x) + Arcsin(x) = \Pi/2$.

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$
$cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$
$sinh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$
$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$
$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + O(x^{2n+2})$
$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1} x^n/n + O(x^{n+1})$
$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ... - \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1})$
$Arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + ... + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + O(x^{2n+3})$
$Arcsin(x) = x + \quad \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} + ... + \frac{1.3.5.....(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6.....2n.(2n+1)} + O(x^{2n+3})$
$Arccos(x) = \Pi/2 - Arcsin(x)$
$Argth(x) = x + x^3/3 + x^5/5 + x^7/7 + ... + x^{2n+1}/(2n+1) + O(x^{2n+3})$
$Argsh(x) = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + ... + (-1)^n \frac{1.3.5.7.....(2n-1).x^{2n+1}}{2.4.6.....2n.(2n+1)} + O(x^{2n+3})$

Attention, le développement limité d'$Arcsin(x)$ est "irrégulier", au sens où le terme en x ne suit pas la même formule que les termes en x^{2i+1} !

1.16 Espaces $\mathcal{L}^p(X)$ et $L^p(X)$, ou $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)$ et $L^p_{\mathbb{C}}(X)$

L^p est égal à $\mathcal{L}^p$ quotienté par la relation "être égales presque partout". Les L^p sont des espaces de Banach, $L^2(X)$ est un espace hilbertien réel pour $(f|g) = \int fg$, $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ est un espace hilbertien complexe pour $(f|g) = \int \overline{f}g$.

Hypothèse	Conclusion
$f_i \in L^{p_i}$ $p_i \in [1, \infty]$ $\sum_{i \in [1,n]} 1/p_i = 1$	$\|\Pi_{i=1}^n f_i\|_1 \leq \Pi_i \|f_i\|_{p_i}$ (inégalité de Hölder)
$\forall n \lvert f_n(x)\rvert < \lvert g(x)\rvert$ presque partout $g \in L^p$ $f_n(x) \to f(x)$ presque partout	$f \in L^p$ $f_n \to f$ dans L^p (convergence dominée de Lebesgue)
$p < p'$ et X de mesure finie	$L^{p'} \subset L^p$

1.17 Transformée de Fourier

hypothèse	conclusion
$g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$	$\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$
$g(x) = f(x-\alpha)$	$\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$
$g(x) = -ixf(x)$ $g\ L^1$	$\hat{f}$ différentiable $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$
$f\ L^1$	$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}d\mu(x)$ $\hat{f}\ C^0$ $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$
$f\ L^1$ et $\hat{f}\ L^1$	$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{ixt}d\mu(t)$ est continue et égale à f presque partout
$f\ L^2$ Théorème de Plancherel	$\hat{f}\ L^2$: $\phi_A(f) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(t)e^{ixt}d\mu(t)$ $\lim_{A\to+\infty} \phi_A(f) = f$ (dans L^2) ($f \mapsto \hat{f}$ isomorphisme de L^2 dans L^2, défini sur $L^1 \cap L^2$ par la formule ci-dessus et prolongé sur L^2 par densité FLEMMARD)

1.18 Série de Fourier - cas f 2π-périodique

hypothèse	conclusion
$n \in \mathbb{Z}$	$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}$ $\hat{f}(n) =< f\|u_n >$ ($u_n(t) = e^{int}$)
$n \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$	$D_n = \sum_{i=-n}^{n} u_i$ (noyau de Dirichlet) $K_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} D_i$ (noyau de Féjer)
$n \in \mathbb{N}$	$s_n(f) = \sum_{i=-n}^{n} \hat{f}(i)u_i$ (somme de Fourier) $s_n(f) = f * D_n$ $\sigma_n(f) = \sum_{i=0}^{n} s_i(f)$ (somme de Fejer) $\sigma_n(f) = f * K_n$
$f\ L^1$ f admet une dérivée à droite et à gauche en x	Théorème de Dirichlet $\sigma_n(f)(x)$ $\to \frac{1}{2}(lim_{t\to x, t<x} f(t) + lim_{t\to x, t>x} f(t))$
$f \in L^2(T)$	$\hat{f} \in l^2 = L^2(\mathbb{Z})$ ($f \mapsto \hat{f}$ isomorphisme de $L^2(T)$ dans l^2) $s_n(f) \to f$ dans $L^2(T)$
$f\ C^0$ (Th. de Fejer)	$\forall n\ \|\sigma_n(f)\|_\infty < \|f\|_\infty$ $\sigma_n(f) \to f$ uniformément
$f\ L^p$ $p < \infty$	$\forall n\ \|\sigma_n(f)\|_p < \|f\|_p$ $\sigma_n(f) \to f$ dans L^p (Th. de Fejer)

1.19 Les 1001 formules dont vous rêvez

Formule	Preuve
$\sum_{k=1}^{+} \infty \frac{1}{k^2} = \frac{\Pi^2}{6}$	Formule de Parseval (théorème **??**) sur la série de Fourier de l'identité sur $[-\Pi, \Pi[$
$\sum_{k=1}^{+} \infty 1/p_k = \infty$ p_k k-ième nombre premier	voir partie **??**
$(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$ pour x réel.	$(1 + \frac{x}{n})^n = e^{n\ ln(x/n)} = e^{n(x/n + o(1/n))} \rightarrow e^x$
Formule de Stirling $n! \simeq (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\Pi n}$	$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt$ (preuve par récurrence sur n, par une intégration par parties (théorème **??**) sur $[0, x]$ et en faisant tendre x vers $+\infty$) changement de variable $u = t/n$ $n! = n^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{n(ln(u)-u)} du$ Il suffit alors d'appliquer le théorème **??**.
$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = ln(2)$	$U_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ puis écrire $1/n = \int_0^1 t^{n-1}$ puis $\sum_{n=1}^{N} (-t)^{n-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$ puis passer à la limite, par exemple par convergence uniforme sur un ensemble de mesure finie.

1.20 Espaces préhilbertiens

Espace préhilbertien réel	Espace préhilbertien complexe
$\Vert x+y \Vert^2 = \Vert x \Vert^2 + \Vert y \Vert^2$	$\Vert x+y \Vert^2 = \Vert x \Vert^2 + \Vert y \Vert^2 + 2Re(< x\vert y >)$
Inégalité de Schwartz	
$\vert < x\vert y > \vert \leq \Vert x \Vert \ \Vert y \Vert$	$\vert < x\vert y > \vert \leq \Vert x \Vert \ \Vert y \Vert$
Inégalité de Minkowski	
$\Vert x+y \Vert \leq \Vert x \Vert + \Vert y \Vert$ Cas d'égalité : x et y positivement liés	$\Vert x+y \Vert \leq \Vert x \Vert + \Vert y \Vert$ Cas d'égalité : x et y positivement liés
Formule de polarisation	
$< x\vert y >= \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ $< x\vert y >= \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$	$< x\vert y >= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{4} \overline{i^j} q(x + i^j y)$ $< x\vert y >$ $= \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy))$
En dimension finie, il existe une base orthonormale	

1.21 Espaces de Hilbert

On suppose que $(x_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne.

<table>
<tr><td>Relation de Parseval</td></tr>
<tr><td>$\|x\|^2 = \sum_i (x|x_i)^2$</td></tr>
<tr><td>$< x|y >= \sum_i < x|x_i >< y|x_i >$</td></tr>
<tr><td>$x = \sum_{i \in I} < x|x_i > x_i$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Relation de Parseval</td></tr>
<tr><td>$\|x\|^2 = \sum_i |(x|x_i)|^2$</td></tr>
<tr><td>$< x|y >= \sum_i < x|x_i > \overline{< y|x_i >}$</td></tr>
<tr><td>$x = \sum_{i \in I} < x|x_i > x_i$</td></tr>
</table>

1.22 Espaces euclidiens

<table>
<tr><td>Espace euclidien</td><td>Espace hermitien</td></tr>
<tr><td>f^* adjoint de f
$< f(x)|y >=< x|f^*(y) >$
$Mat_B(f^*) =^t Mat_B(f)$
$det\ f^* = det\ f$</td><td>f^* adjoint de f
$< f(x)|y >=< x|f^*(y) >$
$Mat_B(f^*) = \overline{{}^t Mat_B(f)}$
$det\ f^* = \overline{det\ f}$</td></tr>
<tr><td>f symétrique si $f^* = f$</td><td>f hermitien si $f^* = f$</td></tr>
<tr><td>f orthogonal (ie $\in O(E)$)
si $f^* f = f f^* = Id$
$\iff < f(x)|f(y) >=< x|y >$
$\iff \|f(x)\| = \|x\|$</td><td>f unitaire (ie $\in U(E)$)
si $f^* f = f f^* = Id$
$\iff < f(x)|f(y) >=< x|y >$
$\iff \|f(x)\| = \|x\|$</td></tr>
<tr><td>f orthogonal est direct
(ie $\in O(E)$) si
$det\ f > 0$
$\iff$ conserve l'orientation d'une base</td><td></td></tr>
</table>

1.23 Réduction en dimension finie - propriétés de matrices particulières

Matrice M de type (n, n), associée à l'endomorphisme f, $E = \mathbb{K}^n$, polynôme caractéristique P, $multip(\lambda)$ ordre de multiplicité de λ dans P. Dans beaucoup de cas, la réduction dans une base orthonormale est basée sur le fait que l'orthogonal d'un espace stable est stable.

diagonalisable	$\iff \exists$ base de vecteurs propres $\iff E = \otimes_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)} \ker(f - \lambda I)$ $\iff P$ scindé et $\dim \ker(f - \lambda I) = multip(\lambda)$ $\iff \exists Q \in GL_n(\mathbb{K})/QMQ^{-1}$ diagonale
trigonalisable (Jordan)	$\iff P$ scindé $\iff \exists Q \in GL_n(\mathbb{K})\ Q^{-1}MQ$ triang. sup. $\iff \exists Q \in GL_n(\mathbb{K})\ Q^{-1}MQ$ triang. inf. $\iff \exists Q \in GL_n(\mathbb{K})\ Q^{-1}MQ = \otimes M_i$ avec $M_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \exists!(D,N)/ \begin{cases} D\text{diagonalisable} \\ N\text{nilpotente} \end{cases}$ $M = D + H$, $DH = HD$
M symétrique réelle	diagonalisable dans une base orthonormale i.e. $\exists Q \in O_n(\mathbb{R})/QMQ^{-1}$ diagonale
M, N symétriques réelles $Sp_{\mathbb{R}}(M) > 0$	$\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})/ \begin{cases} QMQ^{-1} \text{ diagonale} \\ QNQ^{-1} \text{ diagonale} \end{cases}$
M antisymétrique réeele	$Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0\}$, $Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset i\mathbb{R}$ $rang(M)$ pair, M^2 symétrique $\exists Q \in O_n(\mathbb{R})/Q^{-1}MQ = (0) \otimes M_k$ (0) matrice nulle de la taille du noyau, M_k antisymétrique $(2, 2)$
M réelle commutant avec ${}^tM$	$\exists Q \in O_n(\mathbb{R})\ QMQ^{-1} = \otimes M_i \otimes N_i$ avec $M_i = (\lambda_i)$ (matrice $(1, 1)$) et $N_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$
M orthogonale (réelle)	$det\ M = \pm 1$, $Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset \{-1, 1\}$
M unitaire (complexe)	$\lvert det\ M \rvert = 1$, $\lvert Sp_{\mathbb{C}}(M) \rvert = 1$
M hermitienne	$Sp_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{R}$, $\exists Q \in U_n(\mathbb{C})/Q^{-1}MQ$ diagonale
M, N hermitiennes, $Sp_{\mathbb{C}}(M) > 0$	$\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})/QMQ^{-1}$ diagonale et QNQ^{-1} diagonale
M complexe commute avec ${}^t\overline{M}$	M et ${}^t\overline{M}$ simultanément diagonalisables dans une base orthonormale
M réelle $\forall r \in [1, n]$ $detM_{[1,r]^2} \neq 0$	Décomposition ALU $\exists!(L, U)/\ L$ triang. inf., $Sp(L) = 1$ U triangulaire supérieure, $A = LU$
A symétrique réelle $Sp(A) > 0$	$A = R\,{}^tR$ avec R triangulaire inférieure inversible, décomposition de Cholesky
M_i diagonalisables commutant deux à deux	Les M_i sont simultanément diagonalisables.
$\mathbb{K}$ alg. clos, M_i commutant 2 à 2	Les M_i sont simultanément trigonalisables

1.24 Fonctions holomorphes

courbe=application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$
chemin=application C^1 pm de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$

Hypothèses	Conclusion
μ mesure complexe (donc finie) sur X, Ω ouvert de $\mathbb{C}$, $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable, $\phi(X) \cap \Omega = \emptyset$	$z \mapsto \int_X \frac{d\mu(x)}{\phi(x)-z}$ est holomorphe
Γ courbe, Ω complémentaire de $\Gamma^* = \Gamma([a,b])$	$z \in \Omega \rightarrow Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{dt}{t-z}$, Ind_Γ constant sur les composantes connexes de Ω, nul sur la composante connexe non bornée ($Ind_\Gamma(z)$ nombre de tours de Γ autour de z)
Γ_1 et Γ_2 courbes, $\vert\Gamma_1(t) - \Gamma_2(t)\vert < \vert\Gamma_2(t)\vert$.	$Ind_{\Gamma_1}(0) = Ind_{\Gamma_2}(0)$
Γ chemin fermé dans Ω ouvert, $f \in H(\Omega)$ $z \in \Omega$, $z \notin \Gamma^*$, Ind_Γ nulle hors de Ω	$f(z)Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}dt$
$f \in H(\Omega)$ $D(x,r)$ disque inclus dans Ω	Théorème de Cauchy : f développable en série entière sur $D(x,r)$ $f = \sum a_n(z-x)^n$ Estimateurs de Cauchy : $\vert f^{(n)}(x)\vert \leq \frac{n! \sup \vert f\vert}{r^n}$
f C^0 de Ω ouvert dans $\mathbb{C}$ $\int_P f$ nulle pour tout P triangle (ou sur tout P carré de côtés perpendiculaires aux axes)	f holomorphe sur Ω (théorème de Morera)
f non constante holomorphe sur un ouvert connexe Ω	$Z(f) = f^{-1}(0)$ n'a pas de point d'accumulation, $\forall z \in \Omega$ on peut écrire $\forall t \in \Omega f(t) = (t-z)^m g(t)$ avec g holomorphe non nulle en z
Ω ouvert connexe $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$	Trois cas : - singularité artificielle en a - pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}$ en a, ie $f - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(z-a)^i}$ holomorphe sur Ω ; par définition $Res(f;a) = c_1$. - singularité essentielle en a
f holomorphe sur Ω ouvert privé des z_i en nombre fini où f admet des pôles, f chemin fermé ne passant pas par les z_i, $Ind_\Gamma(z) = 0$ pour tout z dans Ω^c	$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(t)dt = \sum_i Res(f;z_i)Ind_\Gamma(z_i)$
$f \in H(\Omega)$,$\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, Γ cercle orienté positivement centré sur a de rayon r	Le nombre de zéros de $f-w$ dans $D(a,r)$, comptés avec multiplicités, est l'indice de w par rapport à la courbe $f \circ \Gamma$
Ω ouvert connexe $f \in H(\Omega)$ f non constante $x \in \Omega$ m ordre du zéro de $f - f(x)$ en x	f induit sur un certain ouvert V contenant x une application surjective de V sur un ouvert W telle que chaque point de W autre que $f(x)$ ait exactement m antécédents dans V
f et g dans $H(\Omega)$ $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ $\vert f(z) - g(z)\vert < \vert g(z)\vert$ sur $\delta D(a,r)$	f et g ont même nombre de zéros avec multiplicité dans $D(a,r)$.

1.25 Propriétés de G groupe fini de cardinal n

Hypothèses	Conclusion
G cyclique	tout s-g est cyclique
G cyclique, $d \mid n$	il existe un unique s-g de cardinal d, c'est $\{x \in G / x^d = 1\} = \{x^{n/d} / x \in G\}$
n premier	$G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
H s-g de G	$\|G\| = \|G/H\|\|H\|$
$H \lhd G$, $K \lhd G$, $K \subset H$	$H/K \lhd G/K$, $G/H \simeq (G/K)/(H/K)$
p premier, p divise n	Th. de Cauchy : p divise n, $\exists x \in G/\ o(x) = p$

FLEMMARD

1.26 Reconnaître un groupe G d'ordre n

On notera que les critères ci-dessous couvrent immédiatement les cas $n \leq 15$, sauf $n = 12$.

Hypothèses	Conclusion
n premier	$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
tout élément est d'ordre ≤ 2	$G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^q$
$n = 2p$ avec p premier	$\exists H \subset G$ $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H$ ou $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes H$ (groupe diédral D_p)
Sous-groupe d'indice 2 S_m	A_m groupe alterné
$n = pq$ p et q premiers $p < q$	si $q \not\equiv 1(p)$ alors $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sinon deux cas : - $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ - $G \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_\phi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $o(\phi(1)) = p$ dans $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ (un seul produit semi-direct non trivial possible, à isomorphisme près)
$n = 8$ abélien	$(Z/2\mathbb{Z})^3$ ou $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
$n = 8$ non abélien	diédral D_4 ou quaternions
$n = p^2$, p premier	$G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$

1.27 Etude d'un groupe abélien fini G

$Card(G) = \Pi p_i^{n_i}$ Existence de $H_i \subset G$ de card $p_i^{n_i}$ garantie, unique	Décomposition primaire : G isomorphe au produit des H_i
FLEMMARD	Décomposition cyclique : G isomorphe au produit des $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ avec $1 < n_1 \vert n_2 \vert n_3 \vert \dots \vert n_l$ (n_i) suite des invariants de G (existence et unicité)

1.28 Etude d'un groupe fini G

<table>
<tr><td>G simple</td><td colspan="3">Existence de $N \lhd G$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
avec p
premier ?

Groupe
alterné
A_n avec
$n > 4$?</td><td colspan="3">$\exists H / H \cap N = \{1\} \wedge HN = G$
pour l'un des (N, H) possibles avec
$N \lhd G$</td></tr>
<tr><td>Non</td><td colspan="2">Oui</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Etude
du
quotient</td><td colspan="2">Peut-on imposer $H \lhd G$?
Alias : $\forall (h, n) \in H \times N \; hn = nh$?</td></tr>
<tr><td>Oui</td><td>Non</td></tr>
<tr><td>Produit
direct
$N \times H$</td><td>Produit
semi-direct
$N \rtimes H$
par conjugaison</td></tr>
</table>

1.29 Anneaux

Type d'anneau	Propriétés	Exemples
	Formule de Newton seulement pour des éléments qui commutent	$L(E, F)$
Commutatif	a associé à b implique $(a) = (b)$	$C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$
Noethérien	Commutatif, tout idéal est de type fini, toute suite croissante d'idéaux est ultimement stationnaire, tout quotient est noethérien, $A[X_1, ..., X_n]$ noethérien.	
Intègre	Commutatif, (0) est un idéal premier, a associé à b $\iff$ $(a) = (b)$, le quotient par la relation d'association est isomorphe pour l'ordre à l'ensemble des idéaux, $A[X_1, \ldots, X_n]$ est intègre	$H(\Omega)$ avec Ω ouvert connexe, quotient d'un anneau par un idéal premier
Factoriel	Intègre, irréductible $\iff$ premier, lemme d'Euclide, th. de Gauss	
Principal	Factoriel, noethérien, les idéaux sont (0) et les (p) avec p irréductible	$\mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K}$ corps
Euclidien	Principal	$\mathbb{Z}$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$
Corps $\mathbb{K}$	Seuls idéaux : $\{0\}$ et $\mathbb{K}$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier, $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{K}(X)$ avec K corps, corps des fractions d'un anneau intègre

1.30 Calcul différentiel

Rappelons qu'une dérivée ou une fonction continue (sur un intervalle de $\mathbb{R}$!) satisfont la propriété des valeurs intermédiaires.

Hypothèse	Conclusion
$f : V \to W$ V ouvert d'un Banach E W ouvert d'un Banach F Homéomorphisme C^1	f C^1-difféomorphisme si et seulement si $\forall x \in V$ $f'(x) \in Isom(E,F)$ (isomorphisme de Banach)
Théorème d'inversion locale	
f C^1 de U (ouvert d'un Banach E) dans F (Banach), $f'(a) \in Isom(E,F)$	f induit un C^1 difféomorphisme entre un voisinage ouvert de a et un voisinage ouvert de $f(a)$.
Corollaire	
f C^1 de U (ouvert d'un Banach E) dans F (Banach)	f C^1-difféo de U sur son image (ouverte) si et seulement si f injective et $\forall x$ $f'(x) \in Isom(E,F)$
$[a,b]$ segment de $\mathbb{R}$, $b \neq a$, f de $[a,b]$ dans un espace vectoriel normé . Polynôme de Taylor à l'ordre n de f en a : $P_{f,a,n}(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$	
Formule de Taylor-Lagrange	
f C^n $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$	$\exists c \in]a,b[/ f(b) = P_{f,a,n}(b) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$
Inégalité de Taylor-Lagrange	
f C^n $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, f^{n+1} bornée par M sur $]a,b[$	$\|f(b) - P_{f,a,n}(b)\| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$
Formule de Taylor avec reste intégral	
f C^{n+1} sur $[a,b]$	$f(b) = f(a) + P_{f,a,n}(b) + \frac{1}{n!}\int_a^b f(b-t)^n.f^{n+1}(t)dt$
Formule de Taylor-Young	
f n fois dérivable en a	$f(x) - P_{f,a,n}(x) = o((x-a)^n)$

La première proposition est certes plus faible que le corollaire du théorème d'inversion locale, mais elle fait appel à de moins gros résultats, d'où son intérêt.

1.31 Equations différentielles

$\frac{\delta x}{\delta t} = f(t,x)$, f application de $I \times E$ dans E, avec E un espace de Banach . CI : $f(t_0) = x_0$.

Il faut savoir ramener l'étude d'une équadif d'ordre n à l'étude d'une équadif d'ordre 1.

$f\ C^0$	Existence d'une solution
Th. de Cauchy-Lipschitz	
f localement lipschitzienne en x	$\exists!$ solution maximale x_{t_0,x_0}
Dépendance aux conditions initiales	
f lipschitzienne en x	$(t, x_0) \mapsto x_{t_0,x_0}(t)$ continue
Th. de Cauchy-Lipschitz, ordre n	
$x^{(p)} = f(t, x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$	$f\ C^0 \Rightarrow$ Existence d'une solution maximale f localement lipschitzienne en $(x^{(i)})_{i\in[1,n]} \Rightarrow$ Unicité
Dépendance à un paramètre	
$\frac{\delta x}{\delta t} = f(t, x, \underbrace{\lambda}_{\in L})$ avec L espace topologique et $f\ C^0$ et k-lipschitzienne en x, avec k indépendant de t et λ	$\exists! x_\lambda / x_\lambda(t_0) = x_0$ $(t, \lambda) \mapsto x_\lambda(t)\ C^0$
Equadifs linéaires d'ordre 1	
$x' = a(t)x + b(t)$ $a\ C^0$ de I dans $\mathcal{L}(E, E)$, $b\ C^0$ de I dans E	$x = exp(\int_{t_0}^t a(u)du)x_0 + x_p(t)$ avec x_p solution particulière, cherchée sous la forme $x_p(t) = \lambda(t)exp(\int_{t_0}^t a(u)du)$,
Divers exemples	
Equation à variables séparées $x'(t) = f(t)g(x(t))$	$(dx/g(x))' = f(t)dt$
Equation de Bernouilli $x'(t) + p(t)x(t) + q(t)x^\alpha = 0$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	pour se ramener à du linéaire : diviser par x^α et poser $z(x) = x(x)^{1-\alpha}$
Equation homogène $x'(t) = f(\frac{x(t)}{t})$	poser $y(t) = t\ x(t)$ ou passer en coord. polaires
Equation de Lagrange $x(t) = a(x'(t))t + b(x'(t))$ a et $b\ C^1$	Solutions affines : $y = cx + b(c)$, avec $a(c) = c$. Autres solutions : poser $y = x'$, $t = g(x)$. On obtient alors l'équation linéaire $\frac{dt}{dy} = \frac{a'(y)t+b'(y)}{y-a(y)}$
Equation de Riccati $x'(t) = a(t)x(t)^2 + b(t)x(t) + c(t)$	Trouver une solution particulière x_p puis poser $x = x_p + 1/y$, l'équation obtenue est linéaire en y.

Bibliographie

[1] P. Barbe, M. Ledoux, *Probabilité*, Belin, 1998.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[3] H. Cartan, *Calcul différentiel*, FLEMMARD.

[4] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, Masson, 1997.

[5] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, Masson, 1995.

[6] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, Masson, 1996.

[7] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

[8] F. Combes *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998. <

[9] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[10] W. Giorgi, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, Masson, 1998.

[11] A. Gramain, *Intégration*, Hermann 1988, Paris.

[12] J.-L. Krivine, *Introduction to axiomatic set theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.

[13] S. Lang, *Real analysis*, Addison-Wesley Publishing company, 1969.

[14] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses 1996.

[15] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses 1994.

[16] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson 1992.

[17] R. Smullyan, *Théorie de la récursion pour la métamathématique*, FLEMMARD.

[18] Y.G. Sinai *Probability theory - An introduction course*, Springer Textbook, 1992.

[19] P. Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson, 1997.

[20] J. Vauthier, J.J. Prat, *Cours d'analyse mathématiques de l'intégration*, Masson, 1994.

[21] D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991.

[22] C. Zuily, H. Queffélec, *Eléments d'analyse pour l'intégration*, Masson, 1995.