Les Mathématiques pour l'Agrégation

C. Antonini
J.-F. Quint
P. Borgnat
J. Bérard
E. Lebeau
E. Souche
A. Chateau
O. Teytaud

29 mai 2002

Table des matières

1 Intégration **3**

1.1 σ-algèbre, mesure . . . 3

1.1.1 Définitions, généralités . . . 3

1.1.2 σ-algèbre engendrée . . . 5

1.1.3 Mesures . . . 7

1.2 Π-systèmes, d-systèmes, et théorème de Carathéodory . . . 10

1.3 Parties non mesurables . . . 11

1.4 Exercices sur les σ-algèbre et les mesures . . . 12

1.5 Fonctions mesurables . . . 12

1.6 Suites de fonctions mesurables . . . 13

1.7 Intégration - théorème de convergence dominée de Lebesgue . . . 15

1.7.1 Fonctions étagées et fonctions simples . . . 15

1.7.2 Fonctions positives . . . 16

1.7.3 Le cas général . . . 18

1.7.4 Fonctions vectorielles . . . 21

1.7.5 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Corollaires 21

1.8 Intégration dans les espaces produits. Changement de variable . . . 24

1.9 Mesurabilité et mesurabilité au sens de Lebesgue . . . 28

1.10 Fonctions définies par des intégrales . . . 28

1.10.1 Continuité, dérivabilité sous le signe $\int$ . . . 30

1.10.2 Fonctions holomorphes sous le signe $\int$ . . . 31

1.10.3 Primitives . . . 32

1.11 Zoologie de la mesure . . . 32

1.11.1 Approfondissements sur les mesures complexes . . . 32

1.11.2 Presque recouvrement d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ par des petites boules 33

2 Produit de convolution **35**

2.1 Définitions et généralités . . . 35

2.2 Zoologie de la convolution . . . 37

2.2.1 Convoluée d'un polynôme . . . 37

2.2.2 Une fonction FONDAMENTALE pour la convolution . . . 38

3 Espaces $\mathcal{L}^p$ et espaces L^p **39**

3.1 Quelques résultats utiles . . . 39

3.2 Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p . . . 41

3.3 Théorèmes sur les L^p . . . 42

3.4 Zoologie des espaces L^p . . . 45

3.4.1 Espace l^p . . . 45

3.4.2 Espace L^2 45

4 Approximation de fonctions **47**
4.1 Topologie et approximation de fonctions caractéristiques 47
4.1.1 Intercalation d'ouverts relativement compacts entre un ouvert et un compact 47
4.1.2 Séparation d'un compact et d'un fermé 48
4.1.3 Approximation d'un ensemble mesurable par une fonction C^∞ 50
4.1.4 Lemme d'Urysohn 50
4.1.5 Partition C^∞ de l'unité 51
4.2 Approximation de fonctions continues 52
4.3 Approximation de fonctions mesurables 55
4.4 Approximation de fonctions mesurables bornées 56
4.5 Dans les espaces C^k ou L^p 56
4.5.1 Densité des fonctions C^k à support compact dans $C^k(\mathbb{R}^n)$ . . 57
4.5.2 Densité de l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ 57
4.5.3 Densité de l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans $C^k(\mathbb{R}^n)$ 57
4.5.4 Densité de l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ 58
4.6 Autre approche, dans les espaces L^p 59
4.6.1 Approximation dans L^1 par des fonctions semi-continues . . . 59
4.6.2 Approximation dans L^p pour $p < \infty$ par des fonctions en escalier à support compact 60
4.6.3 Approximation dans L^p pour $p < \infty$ par des fonctions C^∞ à support compact 61
4.6.4 Approximation de fonctions tendant vers 0 en $\pm\infty$ dans L^∞ par des fonctions C^∞ à support compact 61

5 Fourier **62**
5.1 Séries trigonométriques 62
5.2 Séries de Fourier d'une fonction périodique 63
5.3 Transformation de Fourier 66
5.4 Applications des séries de Fourier 68
5.4.1 Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 68
5.4.2 Exemple de développement en série de Fourier : fonction créneau, fonction identité par morceaux 69

Chapitre 1

Intégration

1.1 σ-algèbre, mesure

1.1.1 Définitions, généralités

Soit X un ensemble, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(x)$.

Définition 1 (Algèbre) *$\mathcal{A}$ est une* **algèbre** *(on dit aussi parfois* **clan***) si elle vérifie :*
• $X \in \mathcal{A}$
• *Stabilité par union finie*
• *Stabilité par passage au complémentaire*

Propriétés :
• $\emptyset \in \mathcal{A}$
• Stabilité par intersection finie
• Stabilité par différence
• Une intersection quelconque d'algèbres est une algèbre.

En fait une algèbre est stable par n'importe quelle suite finie d'opérations sur les ensembles.

Exemples :
a) $\{\emptyset, X\}$
b) $\mathcal{P}(X)$
c) $\{A \subset X | A$ fini ou cofini $\}$
d) $\{A \subset X | A$ ou A^c au plus dénombrable$\}$
e) $X, E \subset X$; $\{A/A \subset E \vee X - E \subset A\}$
f) $X, E \subset X$; $\{E \subset A \vee A \cap E = \emptyset\}$

Définition 2 (σ-algèbre) *$\mathcal{A}$ est une σ-***algèbre (ou tribu)** *si elle vérifie :*
• $X \in \mathcal{A}$
• *stabilité par union dénombrable*
• *stabilité par passage au complémentaire*

Propriété :
• $\emptyset \in \mathcal{A}$
• stabilité par intersection dénombrable.
• Une σ-algèbre est une algèbre.
• stabilité par différence.
• L'image réciproque d'une tribu par une application est une tribu.
• Etant donnée une tribu $\mathcal{A}$ sur X, et une application f de X dans Y, alors l'ensemble des $U \subset Y$ tels que $f^{-1}(U)$ appartient à $\mathcal{A}$ est une tribu sur Y.
• Une intersection quelconque de tribus est une tribu.

En fait une σ-algèbre est stable par n'importe quelle suite dénombrable d'opérations sur les ensembles.

Notez que l'ensemble des parties mesurables au sens de Riemann d'un segment $[a, b]$ au sens de Riemann est un clan, mais pas une tribu ; puisque certaines parties dénombrables ne sont pas mesurables.

Définition 3 (Espace mesurable) *$(X, \mathcal{A})$ est un* **espace mesurable** *si $\mathcal{A}$ est une tribu sur X*
*Une partie de X est dite $\mathcal{A}$-***mesurable** *si elle appartient à $\mathcal{A}$.*

Dans les exemples plus haut, tous sont des σ-algèbres, sauf c), à moins que X soit fini.

1.1.2 σ-algèbre engendrée

Afin de pouvoir définir la notion de σ-algèbre engendrée, nous avons besoin d'un petit lemme (évident !) :

Lemme 4 *X ensemble, (A_α) famille d'algèbres (resp. de σ algèbres), alors $\cap A_\alpha$ est une algèbre (resp. une σ-algèbre.*

Définition 5 *X un ensemble, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ famille de parties de X, l'***algèbre engendrée par** *$\mathcal{M}$ (resp. la σ-***algèbre engendrée par** *$\mathcal{M}$) est l'intersection de toute les algèbres (resp. σ-algèbre) contenant $\mathcal{M}$.*
*X un ensemble, la σ-***algèbre engendrée par une famille de fonctions** *de X vers des espaces mesurables est la σ-algèbre engendrée par les images réciproques d'ensembles mesurables par ces fonctions.*

C'est bien une algèbre (resp. σ-algèbre) et c'est la plus petite qui contienne $\mathcal{M}$.

la σ-algèbre engendré par l'image réciproque d'une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de F par une application $f : E \to F$ est l'image réciproque de la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{F}$.

Exemple fondamental :

Définition 6 *X muni d'une topologie $\mathcal{T}$; la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{T}$ s'appelle la σ-***algèbre borélienne***. Ses éléments sont appelés les* **boréliens***.*

Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, c'est la plus petite σ-algèbre contenant les boules ouvertes. C'est aussi la plus petite σ-algèbre contenant les boules fermées.

Proposition 7 *La σ-algèbre engendrée par une base d'ouverts est la σ-algèbre engendrée par la topologie ; donc lorsqu'un ensemble engendre une topologie, il engendre aussi les boréliens.*
Les ensembles suivants engendrent les boréliens de $\mathbb{R}$:
• *les ouverts*
• *les fermés*
• *les intervalles ouverts*
• *les intervalles fermés*
• *les intervalles fermés bornés*
• *Les intervalles ouverts bornés*
• *Les $[a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*
• *Les $]a, +\infty[$*
• *Les $[a, +\infty[$*

Les ensembles suivants engendrent les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$:
• *Les $[a, +\infty]$*
• *Les $]a, +\infty]$*
• *Les $[-\infty, a[$*
• *Les $[-\infty, a]$*

Les ensembles suivants engendrent les boréliens de $\mathbb{R}^n$:
• *Les ouverts*
• *Les pavés ouverts*
• *Les boules ouvertes*
• *Les bandes ouvertes :*
$\{\mathbb{R}^{i-1} \times]a, b[\times \mathbb{R}^{n-i}\}$
• *Les pavés compacts*
• *Les bandes fermées :*
$\{\mathbb{R}^{i-1} \times [a, b] \times \mathbb{R}^{n-i}\}$
• *Les bandes comme suit :*
$\{\mathbb{R}^{i-1} \times]a, b] \times \mathbb{R}^{n-i}\}$
• *Ou les ensembles de la forme suivante :*
$\{\mathbb{R}^{i-1} \times]a, +\infty[\times \mathbb{R}^{n-i}\}$

Disposer de parties génératrices petites est pratique pour certaines propriétés des boréliens.

Exemple : on munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une distance comme suit :
$d(x, y) = |arctan x - arctan y|$ avec $arctan(\infty) = \Pi/2$ et $arctan(-\infty) = -\Pi/2$.
Les boréliens pour cette distance sont engendrés par les $\{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}]$. Toute suite monotone dans $\overline{\mathbb{R}}$ admet une limite, et toute suite dans $\overline{\mathbb{R}}$ admet une valeur d'adhérence.

1.1.3 Mesures

Définition 8 (Mesure) *Etant donné $(X,\mathcal{A})$ mesurable, on appelle* **mesure** *une application $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ telle que :*
• $\mu(\emptyset) = 0$
• *Si les A_i sont disjoints, au plus dénombrables, alors $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$ (σ* **additivité***)*

$(X,\mathcal{A},\mu)$ est appelé **espace mesuré***.*
Etant donné $(X,\mathcal{A})$ mesurable, on appelle **mesure complexe** *une application $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que :*
• $\mu(\emptyset) = 0$
• *Si les A_i sont disjoints, au plus dénombrables, alors $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$ (σ* **additivité***) quel que soit l'ordre de la sommation - c'est à dire que la somme est absolument convergente.*

On notera bien qu'une mesure peut prendre $+\infty$ pour valeur, et pas une mesure complexe. Une mesure complexe n'est pas un cas particulier de mesure, et une mesure n'est pas un cas particulier de mesure complexe.

On note aussi que dans le cas des mesures complexes, le deuxième • de la définition suffit à imposer le premier (pas dans le cas réel, à cause de la possibilité $+\infty$).

Définition 9 (Propriété vraie presque partout) *Une propriété P est dite vraie* **presque partout** *si l'ensemble des éléments pour lesquels elle est fausse est inclus dans un ensemble de mesure nulle. Une partie est dite* **négligeable** *si elle est incluse dans une partie de mesure nulle, c'est à dire si sa fonction caractéristique est nulle presque partout.*
Un espace mesuré est dit **complet** *si tout ensemble négligeable est mesurable (et donc de mesure 0).*

Un ensemble négligeable n'est pas nécéssairement mesurable !

Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

Proposition 10 • *μ est finiment additive (outre qu'elle est σ-additive)*
• *μ est croissante ($\overline{\mathbb{R}}$ muni de l'ordre usuel, les ensembles mesurables munis de l'inclusion)*
• *La mesure d'une union dénombrable est inférieure ou égale à la somme des mesures.*
• *Avec A et B $\mathcal{A}$-mesurables, $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$*
• *$\mu(U_{i\leq n} F_i) \leq \sum_{1\leq i\leq n} \mu(F_i)$, avec F_i $\mathcal{A}$-mesurable.*
• *Si $\mu(X)$ est finie, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$*
• **Formule d'inclusion exclusion** *; avec $F_i \in \mathcal{A}$, on a $\mu(\cup_{i\leq n} F_i) = \sum_{i\leq n} \mu(F_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mu(F_i \cap F_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mu(F_i \cap F_j \cap F_k) ... + (-1)^{n-1} \mu(\cap_{1\leq i\leq n} F_i)$*

Exemples :

Définition 11 • *Considérons l'espace mesurable* $(X, \mathcal{P}(X))$.
On considère sur X la **mesure de dénombrement** *définie pourtout* $A \subset X$ *par*
$\mu(\mathcal{A}) = card(A)$ *si A fini*
$\mu(\mathcal{A}) = +\infty$ *sinon*
• $(X, \mathcal{P}(X))$, *soit* $a \in X$, *on appelle* **mesure de dirac en** a *la fonction* δ_a *telle que pour toute partie* A *inclue dans* X, $\delta_a(A) = 1$ *si* $a \in A$ *et* 0 *sinon.*

Théorème 12 *Toute espace mesuré* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *peut être remplacé par un espace mesuré* $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ *complet, avec* $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ *et* $\overline{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$. *On peut même garantir que tout ensemble* C *contenant* A *et inclus dans* B *avec* $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ *et* $B - A$ *négligeable appartient à* $\overline{\mathcal{A}}$.

Démonstration : On considère l'ensemble des parties C décrites dans le théorème ; on vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une σ-algèbre . Ensuite on montre que l'on peut définir la mesure de C comme égale à la mesure de A, et que la définition est bien correcte. □

Définition 13 (Lebesguiens) *La tribu obtenue à partir de la tribu des boréliens en appliquant le théorème 12 s'appelle* **tribu des lebesguiens**. *Les éléments de cette tribu sont appelés les* **lebesguiens**.

Donc lorsque l'on travaille avec des boréliens, certains ensembles négligeables ne sont pas mesurables, alors qu'avec les lebesguiens, tous les ensembles négligeables sont mesurables.

Théorème 14 (Théorème fondamental) *Il existe une unique mesure sur* $\mathbb{R}$ *muni des boréliens classique telle que* $\mu([a, b]) = b - a$ *pour* $b > a$. μ *s'appelle* **mesure de Lebesgue sur** $\mathbb{R}$.
Il existe une unique mesure sur $\mathbb{R}^n$ *muni des boréliens classiques telle que* $\mu(\Pi_i[a_i, b_i]) = \Pi_i(b_i - a_i)$ *pour* $b_i > a_i$. μ *s'appelle* **mesure de Lebesgue sur** $\mathbb{R}^n$.
La mesure de Lebesgue vérifie en outre les propriétés suivantes :
• *à une constante de proportionnalité près, c'est la seule mesure sur les boréliens invariante par translations et finie sur les intervalles bornés.*
• *Tout ensemble au plus dénombrable est de mesure nulle.*
• *Etant donnée* E *une partie mesurable, la mesure de* E *est égale à l'*inf *des mesures des parties ouvertes contenant* E.
• *Etant donnée* E *une partie mesurable, la mesure de* E *est égale au* sup *des mesures des parties compacts inclues dans* E.

<u>Démonstration :</u> Admise.□

Proposition 15 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *espace mesuré,* $\forall i \in \mathbb{N}$ $A_i \in \mathcal{A}$.
i) Si $A_i \subset A_{i+1}$*, alors* $\mu(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = lim_{i\to+\infty}\mu(A_i)$
ii) Si $A_{i+1} \subset A_i$ *et si* $\mu(A_0) < +\infty$ *alors* $\mu(\cap A_i) = lim_{i\to+\infty}\mu(A_i)$

NB : ne pas oublier la seconde condition pour la deuxième assertion ; contre-exemple avec $A_i = [i, +\infty[$.

<u>Démonstration :</u>
i) $B_0 = A_0$, $B_i = A_i - A_{i-1}$, suite facile.
ii) $\mu(D - C) = \mu(D) - \mu(C)$ si $C \subset D$ et $\mu(D) < +\infty$
$B_i = A_{i-1} - A_i$
$\cap A_i = A_0 - \cup B_k$
$\mu(\cap A_i) = \mu(A_0) - \mu(\cup B_k) = \mu(A_0) - \sum[\mu(A_{k-1}) - \mu(A_k)]$
□

Définition 16 (mesure finie ou σ -finie) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mesuré,* μ *est* **finie** *si* $\mu(X) < +\infty$.
$(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mesuré,* μ *est* σ**-finie** *si*
$\exists (X_k \in \mathcal{A}) / \cup_k X_k = X \wedge \mu(X_k) < \infty$
Si $\mu(X) = 1$ *alors* μ *est appelée une* **mesure de probabilité**.

Donc $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ avec μ la mesure de Lebesgue est σ-finie car $\mathbb{R} = \cup_{k\in\mathbb{N}}] - k, k[$

1.2 Π-systèmes, d-systèmes, et théorème de Carathéodory

Définition 17 (Π-systèmes) *Un* Π-**système** *sur* X *est un sous-ensemble de* $P(X)$ *stable par intersections finies.*

Définition 18 (d-système, alias classe monotone) D *est un* **d-système** *(on dit aussi une* **classe monotone** *si*
• $S \in D$
• D *est stable par soustraction (*$A \in D$, $B \in D$*, alors* $A \cap B^c \in D$*).*
• *Pour toute suite* A_n *croissante,* $A_n \in D$*, alors* $\cup A_n \in D$

Proposition 19 *Une intersection de d-systèmes est un d-système.*

Définition 20 (d-système engendré) *On appelle* **d-système engendré** *par un ensemble de parties de* X *l'intersection de tous les d-systèmes contenant* X*.*

Proposition 21 *Un ensemble inclus dans* $P(X)$ *est une* σ*-algèbre si et seulement si c'est un* Π*-système et un d-système.*

Lemme 22 (Lemme de Dynkin) *Soit* I *un* Π*-système, alors la* σ*-algèbre engendrée par* I*, notée* $\sigma(I)$*, est égale au d-système engendré par* I*.*

Démonstration : Pour le prouver il suffit de montrer que $d(I)$ est un Π système, vu la proposition 21. Pour cela on montre tout d'abord que le sous-ensemble D_1 de $d(I)$ constitué des éléments de $d(I)$ dont l'intersection avec tout élément de I appartient à $d(I)$, est égal à $d(I)$. Le raisonnement est le suivant :
• $d(I) \subset D_1$ car :
- $I \subset D_1$
- D_1 est un Π-système
• $D_1 \subset d(I)$ trivialement

On montre ensuite que le sous-ensemble D_2 de $d(I)$ constitué des éléments de $d(I)$ dont l'intersection avec tout élément de $d(I)$ appartient à $d(I)$, est égal à $d(I)$; en effet : • $d(I) \subset D_2$ car
- $I \subset D_2$ car $D_1 = d(I)$
- D_2 est un d-système
• $D_2 \subset d(I)$ trivialement

Or $d(I) = D_2$ est exactement l'énoncé du fait que $d(I)$ est un Π-système.□

Lemme 23 • *Soit μ_1 et μ_2 deux mesures sur $(X, \mathcal{A})$ coïncidant sur un Π-système engendrant $\mathcal{A}$ et telles que $\mu_1(X) < +\infty$ et $\mu_2(X) < +\infty$. Alors μ_1 et μ_2 sont égales.*
• *La même propriété est vraie si X est de mesure σ-finie pour μ_1 et μ_2.*

Démonstration : On considère le d-système des F tels que $\mu_1(F) = \mu_2(F)$. Il contient un Π-système, donc il ne reste qu'à conclure via le lemme 22.$\square$

Théorème 24 (Théorème de Carathéodory) *Soit $\mathcal{A}$ la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{B}$ une algèbre, et μ σ-additive de $\mathcal{B}$ dans $[0, +\infty]$. alors il existe une mesure μ' sur $\mathcal{A}$ dont la restriction à $\mathcal{B}$ est μ. Si $\mu(X) < +\infty$, alors cette extension est unique.*

Démonstration : L'existence est ici admise.
L'unicité résulte simplement de 23.$\square$

Proposition 25 *Soit μ une mesure sur un espace mesurable X, et f une fonction mesurable de X dans Y un autre espace mesurable ; alors l'application qui à une partie mesurable E de Y associe $\mu(f^{-1}(E))$ est une mesure sur Y. On note μ^f cette mesure.*

Démonstration : Facile.$\square$
• Si $Y = \mathbb{R}^n$ muni des boréliens, alors si μ est positive on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu^f = \int_X \phi \circ f \, d\mu$$

• Si $Y = \mathbb{R}^n$ et si f est à valeurs quelconques, alors ϕ est L_1 pour μ^f si et seulement si $\phi \circ f$ est L_1 pour μ, et on a alors l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu^f = \int_X \phi \circ f \, d\mu$$

1.3 Parties non mesurables

Théorème 26 (Banach et Tarski) • *Il existe un ensemble F inclus dans la sphère unité S_2 de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $k \geq 3$ (éventuellement $k = \infty$), S_2 est la réunion disjointe de k images de F par des rotations. Façon amusante de constater qu'on ne peut pas mesurer n'importe quoi... Cette preuve nécessite l'axiome du choix.*
• *On peut même aller plus loin et étant donnés A et B d'intérieurs non vides de $\mathbb{R}^3$, on peut décomposer A en une réunion de A_i finie, et B en une réunion de B_i de même cardinal, avec A_i et B_i égaux via une rotation et une translation.*

• Si l'on n'utilise pas l'axiome du choix, alors on peut utiliser à sa place un autre axiome, qui affirme que toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable.

1.4 Exercices sur les σ-algèbre et les mesures

• Soit $\mathcal{A} \subset P(E)$.
- Supposons $E \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ stable par soustraction. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre.

Démonstration : Il suffit de vérifier que E et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{A}$, que l'on a bien stabilité par passage au complémentaire, et stabilité par union de deux éléments car $E - (E - A - B) = A \cup B$.□
- Supposons $E \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ stable par passage au complémentaire, et stable par union disjointe. Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas nécessairement une σ-algèbre .

□Considérer l'ensemble des parties de cardinal pair de $\{a, b, c, d\}$.□

• Montrer que la réunion d'une suite croissante d'algèbres est une algèbre.

• Montrer que la réunion d'une suite croissante de σ-algèbres n'est pas nécessairement une σ-algèbre .

Démonstration : Considérer les σ-algèbre sur $\mathbb{N}$ engendrées respectivement par $\{\{1\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; la réunion n'est pas une σ-algèbre car par exemple l'ensemble des entiers pairs n'en fait pas partie.□

1.5 Fonctions mesurables

Définition 27 (Fonction mesurable) *Etant donnés $(X, \mathcal{A})$ et $(X, \mathcal{B})$ des espaces mesurables, $f : X \to Y$ est dite* **mesurable** *si $\forall B \in \mathcal{B}\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$*
On définit parfois aussi la notion de fonction mesurable d'un espace mesurable vers un espace topologique ; la condition est alors le fait que l'image réciproque d'un ouvert soit une partie mesurable.

Une fonction caractéristique d'un ensemble est mesurable si et seulement si l'ensemble est mesurable.

Si Y est topologique et qu'on n'a rien précisé, la tribu $\mathcal{B}$ est celle des boréliens.

Proposition 28 *Avec les conditions de la définitions, si $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{M}$, alors f est mesurable si et seulement $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{M}\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$*

Démonstration : Le sens $\to$ est trivial.
Pour le sens $\leftarrow$, considérons l'ensemble des $B \in \mathcal{B}$ tels que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, c'est une σ-algèbre de Y ; d'où le résultat.□

Corollaire 29 • *Si $f : (X, \mathcal{A}) \to Y$ avec Y topologique, f mesurable si et seulement si $\forall U$ ouvert , $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$*
• *$f_k : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $[0, +\infty]$ mesurable*
alors la fonction f qui à x associe $sup_k f_k(x)$ est mesurable.

Démonstration : Le premier point est clair.
Pour le second on considère $f^{-1}(]a, +\infty]) = \{x/sup\{f_k(x)\} > a\}$
$= \{x/\exists k \in \mathbb{N} f_k(x) > a\} = \cup_{k \in \mathbb{N}}\{x/f_k(x) > a\}$
$= \cup f_k^{-1}(]a, +\infty[)$ qui appartient à $\mathcal{A}$ car f_k mesurable et $\mathcal{A}$ σ-algèbre .□

Proposition 30 *La composition de deux fonctions mesurables est mesurable.*
f mesurable et g continue alors $g \circ f$ est mesurable.

Corollaire 31 *Si f est mesurable de X dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, alors $Re(f)$, $Im(f)$, $|f|$ sont mesurables.*

Proposition 32 *f mesurable de X dans Y avec Y topologique, g mesurable de X dans Z avec Z topologique, Y et Z à bases dénombrables d'ouverts. alors $(f, g) : X \to Y \times Z$ est mesurable pour la topologie produit.*

Corollaire 33 • *f et g mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $f + g$, $f - g$, fg, f/g (g ne s'annulant pas), sont mesurables.*
• *f de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont mesurables.*
• *f de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si la fonction $|f|$ et la fonction $x \mapsto arg(f(x))$ sont mesurables*
• *f de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si f^+ et f^- sont mesurables.*

1.6 Suites de fonctions mesurables

Théorème 34 *$(X, \mathcal{A})$ mesurable, f_k de X quelconque dans Y métrique, telle que pour tout x $f_k(x) \to f(x)$. Alors f est mesurable.*

Démonstration : Soit U un ouvert de Y, et U_n l'ensemble des u tels que $d(x, Y \setminus U) > 1/n$, et soit F_n l'ensemble des u tels que $d(x, Y \setminus U) \geq 1/n$.
On montre facilement que U_n est ouvert et que F_n est fermé.
L'union des U_n est U car U est ouvert.

L'union des F_n est donc U aussi. (voir figure 1.1)

$$f^{-1}(U)$$
$$= \cup_n f^{-1}(U_n)$$
$$= \cup_n \{u / lim_{k\to+\infty} f_k(u) \in U_n\}$$
$$\subset \cup_n \{u / \exists K / k \geq K \to f_k(u) \in U_n\}$$

car U_n est un ouvert.

$$\subset \cup_n \cup_K \cap_{k\geq K} f_k^{-1}(U_n) \in \mathcal{A}$$

Considérons maintenant

$$\cup_n \cup_K \cap_{k\geq K} f_k^{-1}(U_n)$$
$$\subset \cup_n \cup_K \cap_{k\geq K} f_k^{-1}(F_n)$$

or $u \in \cup_K \cap_{k\geq K} f_k^{-1}(F_n)$ si et seulement si

$$\exists K / \forall k \geq K, f_k(u) \in F_n$$

donc

$$\subset \cup_n f^{-1}(F_n) = f^{-1}(\cup F_n) = f^{-1}(F_n) = f^{-1}(U)$$

donc $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$, donc f est mesurable.□

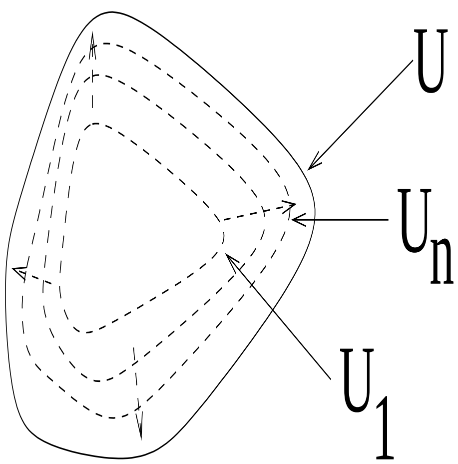

FIG. 1.1 – Illustration de la preuve de la mesurabilité de la limite simple d'une suite de fonctions mesurables.

Corollaire 35 *f_k suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $[0, +\infty]$ ou $\overline{\mathbb{R}}$, alors $lim_{n\to+\infty} sup_{k\geq n} f_k$ et $lim_{n\to+\infty} inf_{k\geq n} f_k$ existent et sont mesurables.*

Démonstration : Rappelons simplement qu'une fonction monotone a nécéssairement une limite dans $\mathbb{R}$.□

Proposition 36 *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable.*

Démonstration : Il suffit de considérer les images réciproques d'ensembles de la forme $]a, +\infty]$ par les f_n. Plus précisément, fixons a, et considérons $E_n = f_n^{-1}(]a, +\infty[)$. Avec $f = sup\ f_n$, $E = f^{-1}(]a, \infty[)$ est égal à $\cup E_n$, et donc est mesurable. Les boréliens sont engendrés par les intervalles $]a, +\infty[$; donc f est bien mesurable.$\square$

1.7 Intégration - théorème de convergence dominée de Lebesgue

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1.7.1 Fonctions étagées et fonctions simples

⊡ Définitions et généralités

Définition 37 *Une fonction est dite* **étagée** *si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*
Une **fonction simple** *est une application s de X dans $[0, \infty[$ mesurable et étagée.*

Si s est simple, α_1,...,α_n ses valeurs, $A_i = \{x/s(x) = \alpha_i\} = s^{-1}(\{\alpha_i\})$, alors $s = \sum_i \alpha_i 1_{|A_i}$.

Notons que les A_i sont des boréliens, en tant qu'image inverse de borélien, pour peu que la fonction s soit mesurable.

L'écriture de s est unique si on a :
• $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$
• $A_i \neq \emptyset$
• $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$
• $\cup_i A_i = X$

Proposition 38 *Si f est une fonction mesurable de X dans $[0, +\infty[$, alors il existe une suite croissante s_n de fonctions simples qui converge simplement vers f.*

Démonstration :
Etant donné $n \in \mathbb{N}$, on considére les segments $S_i = [\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}[$, pour i variant de 0 à $n2^n$. Il suffit alors de considérer la somme f_n des $\frac{i}{2^n}\chi_{f^{-1}(S_i)}$ pour i dans $[0, n2^n]$.$\square$

Pour la suite de notre propos, on devra utiliser une multiplication dans $[0, +\infty[$, prolongeant la multiplication usuelle, et vérifiant $0.\infty = 0$. Attention, ce produit n'est pas continu.

$\boxdot$ **Intégration des fonctions simples**

Définition 39 *$s = \sum \alpha_i 1_{|A_i}$ avec la condition d'unicité donnée ci-dessus, alors on appelle* **intégrale** *sur $E \in \mathcal{A}$ de s pour la mesure μ*

$$\int_E s.d\mu = \sum \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

Lemme 40 *Supposons s et t deux fonctions simples vérifiant les conditions d'unicité. Alors :*
- *Si $s \leq t$, alors $\int_E sd\mu \leq \int_E td\mu$*
- *additivité : $\int_E (s+t)d\mu = \int_E sd\mu + \int_E td\mu$*
- *$\int_E sd\mu = \int_E sd\mu$*
- *$c < +\infty \rightarrow \int c.sd\mu = c \int sd\mu$*
- *La fonction de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$ qui à E associe l'intégrale de s sur E pour la mesure μ est une mesure.*

1.7.2 Fonctions positives

Définition 41 *$f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable*
On appelle **intégrale** *de f sur E de f pour μ*

$$\int_E fd\mu = sup_{s \leq f} \int_E s.d\mu$$

où $s \leq f$ désigne l'ensemble des fonctions simples plus petites (ou égale) que f.

Rmq : Si f est simple, alors cette définition coïncide avec la précédente.

La notation $\int_E fd\mu$ désigne $\int f.\chi_E.d\mu$.

Propriétés, avec f et g positives mesurables :
- $\int f + g = \int f + \int g$
- $f \leq g \rightarrow \int f \leq \int g$
- $\int |a|.f = |a| \int f$

Théorème 42 (Théorème de convergence monotone, **dit aussi théorème de Beppo-Levi)**
Soit f_n une suite croissante de fonctions mesurables positives.
Alors $f = sup f_n$ est mesurable et $\int f = lim \ \int f_n$.

Démonstration : On procède par étapes comme suit :
• On montre tout d'abord que f est mesurable (considérer $f^{-1}(]a, +\infty))$.
• On montre que $\int f_n$ est croissante ; notons F sa limite (éventuellement infinie).
• $F \leq \int f$ par passage à la limite.
L'autre inégalité est un peu plus difficile et est illustrée par la figure 1.2.
• On considère une fonction simple $\leq f$, notée s, et un réel $a < 1$.
• On considère E_n l'ensemble des x tels que $a.s(x) \leq f_n(x)$.
• $\int_{E_n} a.u \leq \int_{E_n} f_n \leq \int_X f_n \leq F$.
• La réunion des E_n est X, et la réunion est dénombrable ; donc $\int_{E_n} u \to \int_X u$.
• Par passage au sup on a $\int f \leq F$.□

On trouvera de multiples applications à ce théorèmes, citons le lemme de Fatou 44, le théorème justifiant la définition des mesures images 45, le théorème importantissime de la convergence dominée de Lebesgue 53, pour le théorème de Fubini 65. Cela servira aussi en probabilité, avec la proposition **??**, la proposition **??**, les resultats sur les variables aléatoires indépendantes **??** ; on trouvera aussi une application au théorème **??** sur l'extinction d'un processus de branchement. Par ailleurs, on utilisera ce résultat aussi pour montrer que les espaces L^p sont des Banach, voir corollaire 91.

On prendra garde à ne pas utiliser des arguments plus lourds (notamment la convergence dominée de Lebesgue) quand un résultat plus simple comme celui-ci suffit.

Corollaire 43 *(***Permutation des signes somme - intégrales***) Avec f_n pour $n \in \mathbb{N}$ mesurable positive, $\int \sum f_n = \sum \int f_n$*

Lemme 44 (Lemme de Fatou) *Avec f_n de X vers $[0, +\infty]$ mesurable, on a $\int liminf \ f_n \leq liminf \int f_n$*

Démonstration : Il suffit de définir $g_k = inf_{n \geq k} f_n$; g_k est croissante ; donc par le théorème de convergence monotone $\int liminf \ f_n = lim \int g_n = liminf \int g_n \leq liminf \ \int f_n$.□

Théorème 45 *Pour toute fonction f mesurable de X dans $[0, +\infty]$, la fonction ν qui à un borélien E associe $\int_E f(x).d\mu$ est une mesure sur X.*
En outre pour toute fonction g mesurable de X dans $[0, +\infty]$, $\int g.d\nu = \int f.g.d\mu$.

Démonstration : Il est facile de voir que ν est une mesure avec les outils que l'on

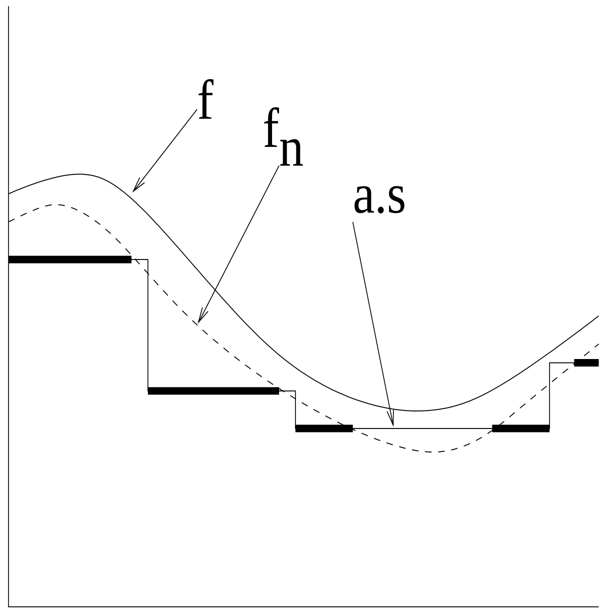

FIG. 1.2 – Les ensembles sur lesquels f_n dépasse la fonction simple multipliée par $a < 1$ ont pour réunion X et sont en nombre dénombrable.

s'est donnés plus haut. La suite est un peu plus laborieuse, mais se résoud en utilisant le théorème de convergence monotone. □

1.7.3 Le cas général

Définition 46 (Fonction intégrable) *Une fonction f de X dans $\mathbb{C}$ est dite* **intégrable** *si elle est mesurable et si $\int |f|$ est finie. On note $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions intégrables de X dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables de X dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{L}^1(X)$ tout court désigne généralement $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ (voir selon le contexte).*

$\mathcal{L}^1(X)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (on le munit de l'addition et de la multiplication par un scalaire). L'application qui à une fonction associe son intégrale est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.
$\mathcal{L}^1(X)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (on le munit de l'addition et de la multiplication par un scalaire). L'application qui à une fonction associe son intégrale est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Notez que l'intégrabilité dépend de la mesure, alors que la mesurabilité ne dépend que de l'espace mesurable.

Définition 47 (Intégrale (au sens de Lebesgue) d'une fonction intégrable) *Etant donnée f une fonction intégrable de X dans $\mathbb{R}$, on appelle* **intégrale** *de f et on note $\int f$ le réel $\int f^+ - \int f^-$.*
Etant donnée $f = g + i.h$ une fonction intégrable de X dans $\mathbb{C}$, on appelle **intégrale** *de f et on note $\int f$ le complexe $\int g + i. \int h$.*

On notera bien que cette définition ne permet de définir d'intégrale que lorsque $\int |f|$ est finie. Ainsi l'intégrale d'une fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$ est toujours définie mais la fonction n'est pas nécéssairement intégrable (lorsque l'intégrale est infinie). Et dans le cas d'une fonction Riemann-intégrable on doit résister à la tentation d'utiliser une intégrale d'une fonction pas intégrable, puisque l'intégrale de Lebesgue n'est définie que dans le cadre de fonctions intégrables.

Propriétés :
• Si f est intégrable alors $|f|$ est intégrable et $|\int f| \leq \int |f|$.
• Une fonction inférieure en module à une fonction g intégrable, est intégrable.
• Si deux fonctions f et g sont intégrables et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si $f \leq g$ alors $\int f \leq \int g$.

Définition 48 (Intégrale sur une partie mesurable) *Soit E une partie mesurable de X, et f de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors f est dite* **intégrable sur** *E si $f.\chi_E$ est intégrable, avec χ_E la fonction caractéristique de E. On définit alors $\int_E f = \int f.\chi_E$.*

On peut vérifier que $\int_E f = \int f_{|E}$.

Exemple important : les sommes de séries.
L'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est une σ-algèbre sur $\mathbb{N}$. On peut munir l'espace mesurable ainsi défini d'une mesure μ telle que $\mu(A) = card(A)$ si A est fini et $\mu(A) = +\infty$ sinon.

On se donne alors une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $[0, +\infty[$, c'est à dire une suite de réels positifs.
Cette fonction est évidemment mesurable.

On peut alors considérer les fonctions $f.\chi_[0, n]$; la suite de ces fonctions converge vers f, donc par le théorème de convergence monotone, l'intégrale de f sur $\mathbb{N}$ est la limite pour $\mathbb{N}$ tendant vers $+\infty$ de l'intégrale de $f.\chi_[0, n]$. $f.\chi_[0, n]$ étant une fonction étagée, son intégrale est facile à calculer ; il s'agit de la somme des f_i pour $i \in [0, n]$.

On peut retrouver ainsi divers résultats classiques du calcul de séries, par exemple le changement d'ordre des termes dans une série absolument convergente. On peut aussi considérer le cas des séries complexes.

Par contre, on ne peut rien faire au niveau des séries non-absolument convergentes.

Proposition 49 • *Une fonction mesurable de X dans $[0, +\infty]$ est d'intégrale nulle si et seulement si elle est nulle presque partout.*
• *Si une fonction mesurable de X dans $[0, +\infty]$ est d'intégrale finie alors elle est finie presque partout.*
• *f mesurable de X dans $\mathbb{C}$; alors $|\int f| \leq \int |f|$, et si $|\int f| = \int |f|$, alors il existe a tel que $f = a.|f|$ presque partout.*

Démonstration :
• le premier point est facile, il suffit de considérer les ensembles sur lesquels f est supérieure à $1/n$, et leur réunion dénombrable.
• Considérer l'ensemble des x tels que $f(x) = +\infty$ et sa mesure.
• Considérer l'argument de l'intégrale de f, et la fonction $a.f$ avec a un complexe de module 1 tel que $\int a.f \in \mathbb{R}^+$. La suite est facile...□

On peut considérer différentes structures à l'intérieur de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions de X dans $\mathbb{R}$:
• Le sous-espace vectoriel des fonctions mesurables
• Le sous-espace vectoriel des fonctions intégrables
• Le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout

La dernière propriété permet notamment de définir un espace quotient de l'espace des fonctions, par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $f\mathcal{R}g \iff f(x) = g(x)$ presque partout . On considère alors l'espace constitué par les classes contenant au moins une fonction intégrable. La forme linéaire qui à f associe son intégrale induit une forme linéaire sur cet espace quotient (notez que deux fonctions intégrables appartenant à la même classe ont même intégrale). On peut normer cet espace par la norme suivante :

$$\| f \|_1 = \int |f|$$

La forme linéaire qui à f associe son intégrale est continue pour cette norme, et de norme ≤ 1, c'est à dire que $|\int f| \leq \| f \|_1 = \int |f|$. Dans la plupart des cas, c'est à dire dès qu'il existe une partie de mesure finie non nulle, cette norme est 1 (on pourra s'en convaincre en considérant la fonction caractéristique d'une telle partie).

Définition 50 *On note L^1 le sous-espace des classes contenant au moins une fonction intégrable ainsi normé (ne pas confondre avec $\mathcal{L}^1$). Cette notation est dépendante du contexte ; formellement il faudrait préciser l'espace de départ et l'espace d'arrivée (ce dernier étant généralement $\mathbb{C}$, quelquefois $\mathbb{R}$).*

Théoriquement il n'est pas possible d'écrire $\| f \|_1$ pour une fonction de X dans $[0, +\infty]$, $+\infty$ inclus ; néanmoins on verra souvent cette notation pour $\int |f|$. On se permettra ainsi de parler de la classe d'une fonction dont l'intégrale est finie, même s'il s'agit par exemple d'une fonction à valeurs dans $[0, +\infty]$.
On assimilera souvent une fonction et sa classe, l'intégrale d'une fonction et l'intégrale

d'une fonction intégrable de sa classe, etc.

1.7.4 Fonctions vectorielles

Une **fonction vectorielle** est une fonction de X dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 51 *Une fonction vectorielle est dite* **intégrable** *si toutes ses composantes sont intégrables. Son intégrale est alors le vecteur dont chaque coordonnée est l'intégrale de la coordonnée correspondante de f.*

Proposition 52 *Une fonction vectorielle est intégrable si et seulement si elle est intégrable et si sa norme est intégrable (indépendamment du choix de cette norme).*

Démonstration : On majore chaque composante par la norme multipliée par une certaine constante, et réciproquement ; le résultat est ensuite facile.□

1.7.5 Théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Corollaires

Théorème 53 (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue) *Soit f_n de X dans $\mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
Hypothèses :
• *f_n mesurable*
• *Pour presque tout x, $f_n(x)$ converge*
• *Il existe une fonction g intégrable de X dans $[0, +\infty]$ majorant toutes les fonctions f_n.*

Alors :
• *une certaine fonction f est limite simple des f_n ; cette fonction est intégrable.*
• *$\int |f - f_n| \rightarrow 0$ (convergence L_1).*
• *$\int f_n \rightarrow \int f$ pour $n \rightarrow +\infty$*

Démonstration : On passe par les étapes suivantes :
• Tout d'abord le cas d'une suite de fonctions tendant monotonement vers la fonction nulle (démonstration en utilisant le théorème de convergence monotone).
• Ensuite suite de fonctions tendant vers la fonction nulle (on se ramène au cas précédent en considérant $g_n(x) = sup_{k \geq n} f_k(x)$.
• Ensuite le cas général se traite en considérant $f - f_n$, majorée par $2.g$.
• L'assertion $\int f_n \rightarrow \int f$ pour $n \rightarrow +\infty$ découle simplement du fait que $|\int a - \int b| \leq \int |a - b|$.□

On utilisera ce résultat très souvent, citons par exemple le corollaire ci-dessous, le théorème 56 de continuité sous le signe intégral, le théorème 57 de dérivation sous le signe intégral, le lemme de Scheffé 58, le résultat de densité 111, le contre-exemple du paragraphe **??**, le théorème de Doob **??**.

Corollaire 54 *Soit une suite de fonctions f_n intégrables de X dans $\mathbb{C}$, telle que $\sum \| f \|_1$ converge.*
• Alors pour presque tout x on a $\sum_n f_n(x)$ convergente vers un certain $f(x)$.
• En outre f est intégrable et $\int f = \sum_n \int f_n$.
• La suite $\sum_{i=0}^n f_n$ converge vers f pour L_1.

Démonstration : On considère $g(x) = \sum_n |f_n(x)|$. Par le théorème de convergence monotone, $\int g = \sum \int |f_n|$. On peut donc définir $h(x)$ comme limite des fonctions $h_n(x) = sum_{i=0}^n f_n(x)$. On a $|h(x)| \leq g(x)$; par le théorème de convergence dominée, l'intégrale de f est égale à la limite de l'intégrale des h_n, donc à la limite de la somme des $\int f_i$ pour $i \in [0, n]$ et la dernière assertion découle de la convergence pour L_1 dans le théorème de convergence dominée.$\square$

Corollaire 55 *Les espaces vectoriels normés L^1 et $L^1(\mathbb{C})$ sont complets.*

Démonstration : Un espace vectoriel normé est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente ; donc d'après le corollaire précédent, L^1 et $L^1(\mathbb{C})$ sont complets.$\square$

Corollaire 56 *Soit Y un espace métrique et $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ une application telle que :*
• pour tout y l'application qui à x associe $f(x, y)$ est intégrable
• pour tout x appartenant à $X - N$ avec N négligeable l'application qui à y associe $f(x, y)$ est continue
• il existe g intégrale de X dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tous x et y $|f(x, y)| \leq g(x)$.
Alors l'application qui à y associe $\int f(x, y).dx$ est continue.

Démonstration : On considère une suite y_n tendant vers y, la continuité séquentielle impliquant la continuité dans un espace métrique. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions de la forme $x \mapsto f(x, y_n)$.$\square$

Corollaire 57 *Soit Y un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ une application telle que :*
• pour tout y l'application qui à x associe $f(x, y)$ est intégrable
• pour $x \in X - N$, avec N négligeable, l'application qui à y associe $f(x, y)$ est dérivable de dérivée $f_2'(x, y)$
• Pour une certain fonction g positive L^1, pour tout y, $|f_2'(x, y)| \leq g(x)$
Alors pour tout y $x \mapsto f_2'(x, y)$ est intégrable et l'application qui à y associe $\int f(x, y).dx$ est dérivable, de dérivée $\int f_2'(x, y).dx$.

<u>Démonstration :</u> On considère y_n une suite tendant vers y.
On définit $k_n(x) = \frac{f(x,y_n)-f(x,y)}{y_n-y}$. Pour tout n, k_n est intégrable.
D'après l'inégalité des accroissements finis, $|k_n(x)|$ est majoré par le sup de $|f_2'(x, .)|$ à son tour majoré par $g(x)$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et déduire le résultat.$\square$

Lemme 58 (Lemme de Scheffé) *Supposons que f_n soit une suite de fonctions $\mathcal{L}^1$ de (S, μ) dans $\mathbb{R}$, et supposons que pour presque tout x $f_n(x) \to f(x)$ quand $n \to +\infty$. Alors*

$$\int |f_n|.d\mu \to \int |f|.d\mu$$

si et seulement si

$$\int |f_n - f|.d\mu \to 0$$

<u>Démonstration :</u> La partie "si" est triviale ; voyons maintenant la partie "et seulement si".
On montre d'abord le résultat pour des fonctions positives.
On suppose donc que $\int f_n(x).d\mu(x) \to \int f(x).d\mu(x)$. Notons $g_n = f_n - f$, et g_n^+ et g_n^- les parties positives et négatives de g_n. Alors :
• $g_n^+(x) \to 0$ et $\int g_n^-(x) \to 0$ presque partout
• $g_n^- \leq f$, donc par le théorème de convergence dominée $\int g_n^-(x).d\mu(x) \to 0$.
• Par ailleurs $\int g_n^+(x) = \int f_n(x).d\mu(x) - \int f(x).d\mu(x) - \int g^-(x).d\mu(x)$ qui tend donc vers 0.
• On peut donc déduire par les deux points précédents que $\int g_n.d\mu(x) \to 0$.
• On a donc prouvé le résultat pour des fonctions positives.
• On passe au cas général. $\int |f_n(x)|.d\mu(x) \to \int |f(x)|.d\mu(x)$ signifie que

$$\int f_n^+(x).d\mu(x) + \int f_n^-(x).d\mu(x) \to \int f^+(x).d\mu(x) + \int f^-(x).d\mu(x).$$

• Le lemme de Fatou implique que

$$\int liminf\ f_n^+.d\mu \leq liminf\ \int f_n^+ d\mu$$

et $\int liminf\ f_n^-.d\mu \leq liminf\ \int f_n^- d\mu$
et donc pour n assez grand

$$\int f_n^+(x).d\mu(x) + \int f_n^-(x).d\mu(x) \geq \int f^+(x).d\mu(x) + \int f^-(x).d\mu(x).$$

• Les résultats des deux points précédents permettent de conclure que

$$\int f_n^+(x).d\mu(x) \to \int f^+(x).d\mu(x)$$

et

$$\int f_n^-(x).d\mu(x) \to \int f^-(x).d\mu(x)$$

• Il ne reste plus qu'à appliquer le résultat dans le cas des fonctions positives.□

1.8 Intégration dans les espaces produits. Changement de variable

On rappelle qu'une tribu ou σ-algèbre sur E est un sous-ensemble de $P(E)$, contenant E, stable par passage au complémentaire et par union dénombrable (et du même coup par intersection dénombrable).
On rappelle aussi qu'un clan ou algèbre sur E est un sous-ensemble de $P(E)$ stable par passage au complémentaire et par union finie (et du même coup par intersection finie).

Définition 59 *On se donne X et Y deux espaces mesurables, munis respectivement de la tribu $\mathcal{X}$ et de la tribu $\mathcal{Y}$.*
Un ensemble $A \times B$ est dit **rectangle mesurable** *de $X \times Y$ si $A \in \mathcal{X}$ et $B \in \mathcal{Y}$.*
On appelle **tribu produit** *ou* σ**-algèbre produit** *de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ et on note $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ la tribu engendré par les rectangles mesurables. Ce sera la σ-algèbre par défaut par la suite ; un ensemble mesurable de $X \times Y$ est en particulier un élément de cette σ-algèbre .*
Un sous-ensemble de $X \times Y$ est dit **ensemble élémentaire** *si il est réunion finie de rectangles mesurables.*
Etant donné E inclus dans $X \times Y$ et $x \in X$, on appelle **première coupe suivant** x **de** E *l'ensemble des y dans Y tels que $(x, y) \in E$.*
Etant donné E inclus dans $X \times Y$ et $y \in Y$, on appelle **deuxième coupe suivant** y **de** E *l'ensemble des x dans X tels que $(x, y) \in E$.*
Etant données μ_X et μ_Y des mesures sur $(X, \mathcal{X})$ et $(Y, \mathcal{Y})$ respectivement on appelle mesure produit de μ_X et μ_Y une mesure sur $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ telle que la mesure d'un rectangle mesurable $A \times B$ soit $\mu_X(A).\mu_Y(B)$.

Proposition 60 • *L'ensemble des ensembles élémentaires est un clan.*
• *Un ensemble élémentaire peut sécrire comme réunion disjointe d'un nombre fini de rectangles mesurables.*
• *La première coupe suivant x d'un ensemble mesurable de $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ est mesurable.*
• *La deuxième coupe suivant y d'un ensemble mesurable de $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ est mesurable.*
• *Pour E mesurable de $X \times Y$, si on se donne deux mesures sur X et Y qui soient σ-finies, l'application de X dans $\mathbb{R}$ qui à x associe la mesure de la première coupe suivant x de E est mesurable*

Démonstration : Les deux premiers • sont faciles.
• Le troisième est plus délicat :
- Soit E dans $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ et x dans X.
- Si E est un rectangle mesurable le résultat est clair.
- Il suffit donc de montrer que l'ensembles des F dans $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ tels que la coupe suivant x de F est mesurable est une tribu, ce qui est facile.□
• Ce • est évidemment équivalent au précédent.
• Le cinquième • est admis.□

Théorème 61 *Etant donnés $(X, \mathcal{X}, \mu_X)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \mu_Y)$ deux espaces mesurés de mesures σ-finies, il existe une et une seule mesure produit de μ_X et μ_Y. Cette mesure produit est en outre σ-finie. On la note $\mu_X \otimes \mu_Y$.*

Démonstration : • On définit $\mu(E) = \int_y \mu(E_y)$ avec E_y la deuxième coupe suivant y de E.

• On montre facilement qu'il s'agit bien d'une mesure, en utilisant le cinquième • de la proposition précédente.
• Il est clair qu'elle vérifie l'hypothèse sur la mesure des rectangles élémentaires.

• Si deux mesures vérifient les propriétés demandées, alors elles coïncident sur le Π-système des rectangles mesurables, en outre les rectangles mesurables engendrent la tribu produit, et cette tribu produit est de mesure σ-finie (facile).
• On peut alors appliquer le lemme 23 (en l'étendant, ce qui est aisé, au cas des mesures σ-finies).□

Corollaire 62 *Soit μ la mesure produit ainsi définie ; alors*

$$\mu(E) = \int_y \mu(E_y) = \int_x \mu(E_x)$$

Démonstration : La première égalité est directement issue de la preuve ci-dessus ; la seconde est due à l'unicité de la solution et à la symétrie du problème.□

Corollaire 63 *Pour qu'un ensemble E de $(X \times Y)$ soit négligeable pour $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, il suffit que presque toutes les coupes premières de E soient négligeables (pareil avec les coupes secondes).*

Démonstration : Un tel ensemble est négligeable si et seulement si sa fonction caractéristique est d'intégrale nulle, c'est à dire si sa coupe est d'intégrale nulle presque partout.□

Corollaire 64 • *La tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^{p+q}$ est la tribu produit des deux tribus de boréliens de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^q$ (produit au sens des σ-algèbres et pas produit cartésien).*
• *La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{p+q}$ est le produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$ et de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^q$.*

Démonstration : • On procède par double inclusion.
- tout d'abord soit un pavé ouvert de $\mathbb{R}^{p+q}$; il appartient bien à la tribu produit de $\mathbb{R}^p$ par $\mathbb{R}^q$ car c'est un rectangle mesurable. Or un ouvert de $\mathbb{R}^{p+q}$ est une réunion dénombrable de pavés ouverts (par exemple les pavés ouvert de coordonnées rationnelles inclus dans ce pavé). Donc les ouverts de $\mathbb{R}^{p+q}$ sont bien des mesurables pour la tribu produit, et donc les boréliens étant engendrés par les ouverts, ils sont eux-mêmes inclus dans la tribu produit.
- Soit un rectangle mesurable de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$; il s'écrit $X \times Y$, et donc $(X \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times Y)$, avec X et Y mesurables. X mesurable implique $X \times \mathbb{R}^q$ mesurable, car X appartient à la σ-algèbre engendrée par les ouverts, et donc $X \times \mathbb{R}^q$ appartient à la σ-algèbre engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^{p+q}$.
• Il suffit de considérer l'unicité de la mesure sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant le fait que la mesure d'un pavé soit bien le produit des longueurs.□

Cette propriété est valable pour les boréliens MAIS pas pour les lebesguiens.

Le théorème qui suit est un théorème fondamental en théorie de l'intégration.

Théorème 65 (Fubini) *On suppose $(X, \mathcal{X}, \mu_X)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \mu_Y)$ des espaces mesurés de mesures σ-finies. Soit f mesurable de $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}, \mu_X \otimes \mu_Y)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.*
Alors :
• pour tout $x \in X$ l'application $f_{2,x} : y \mapsto f(x,y)$ est mesurable sur $(X, \mathcal{X})$.
• pour tout $y \in Y$ l'application $f_{1,y} : x \mapsto f(x,y)$ est mesurable sur $(X, \mathcal{X})$.
• si f est positive, alors $y \mapsto \int_X f_{1,y}(x).dx$ est mesurable positive, et

$$\int_Y (\int_X f_{1,y}(x).dx).dy = \int_{X \times Y} f.dz$$

• si f est positive, alors $x \mapsto \int_Y f_{2,x}(y).dy$ est mesurable positive. et

$$\int_X (\int_Y f_{2,x}(y).dy).dx = \int_{X \times Y} f.dz$$

• si f est intégrable, alors pour presque tout x, $f_{2,x}$ est intégrable, et $x \mapsto \int_Y f_{2,x}(y).dy$ est définie presque partout et intégrable, et on a

$$\int_X (\int_Y f_{1,x}(y).dy).dx = \int_{X \times Y} f.dz$$

• si f est intégrable, alors pour presque tout y, $f_{1,y}$ est intégrable, et $y \mapsto \int_X f_{1,y}(x).dx$ est définie presque partout et intégrable, et on a

$$\int_Y (\int_X f_{1,y}(x).dx).dy = \int_{X \times Y} f.dz$$

On remarque bien sûr qu'un • sur deux est équivalent au • précédent.

<u>Démonstration :</u> • (pareil pour le second •) : Soit U un ouvert ; $f_{2,x}^{-1}(U)$ est égal à la seconde section de $f^{-1}(U)$ en y, qui est mesurable d'après l'une des propriétés vues ci-dessus.
• (pareil pour le quatrième •) : on le montre tout d'abord pour une fonction caractéristique d'une partie mesurable de $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$, puis pour une fonction simple, par combinaison linéaire,puis pour une fonction mesurable positive, en utilisant le théorème de convergence monotone et le fait que toute fonction mesurable positive est limite de fonctions simples.
• (pareil pour le sixième •) : Il suffit d'appliquer le cas positif à la partie positive et la partie négative d'une fonction donnée.$\square$

Ce théorème sert dans beaucoup beaucoup de situations. Citons :
- le lemme **??**, utile pour le théorème de Runge.
- de nombreuses choses sur le produit de convolution, voir le théorème 76, dans la partie 2.
- quelques propriétés de la transformée de Fourier, voir par exemple la proposition

127.

- le théorème 111, d'approximation de fonctions L^p par des fonctions C^∞ à support compact.

Corollaire 66 *Si f de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable ou mesurable positive, alors*

$$\int_Y \int_X f(x,y).dx.dy = \int_X \int_Y f(x,y).dy.dx$$

⚠ Bien noter qu'il n'est pas suffisant que l'une de ces deux expressions soit bien définie pour que le résultat soit vrai, ni même que les deux expressions soient bien définies !

Je donne ci-dessous, sans démonstration (voir [3] pour une preuve complète) la formule du changement de variable dans $\mathbb{R}^n$:

Théorème 67 (Changement de variable) *Si K est un compact inclus dans U ouvert de $\mathbb{R}^n$, si ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur U' ouvert de $\mathbb{R}^n$, si f est continue, alors*

$$\int_{\phi(K)} f = \int_K f \circ \phi J\phi$$

avec $J\phi$ le jacobien de ϕ.

Par exemple, cela servira à montrer la commutativité du produit de convolution.

1.9 Mesurabilité et mesurabilité au sens de Lebesgue

On a vu que la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^n$ pouvait être complétée en une autre tribu telle que toute partie comprise (au sens de l'inclusion) entre deux boréliens de même mesure soit mesurable ; cette tribu étant appelée la tribu des lebesguiens. En utilisant cette nouvelle tribu, on a une nouvelle notion de mesurabilité.

Quelques propriétés :

• Une fonction f est mesurable au sens de Lebesgue si et seulement si il existe une fonction g mesurable (au sens des Boréliens) égale à f presque partout

• Alors que la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^{n+p}$ est égale au produit (au sens des tribus) de la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}^n$ par celle des boréliens sur $\mathbb{R}^p$, la même propriété n'est plus vraie pour les lebesguiens.

1.10 Fonctions définies par des intégrales

Les fonctions définies par des intégrales seront capitales pour les applications suivantes :

- Le produit de convolution (voir la partie 2) (avec pour conséquence de nombreux résultats de densité)

- L'analyse de Fourier (voir partie 5)

- Les indices de chemins (voir définition **??**), et donc toute la construction menant au théorème de Cauchy **??**

- Le théorème de Brouwer **??**, lorsqu'on le prouve en utilisant la formule de Stokes (ce qui n'est pas le cas dans cet ouvrage), voir par exemple le livre "Calcul différentiel et géométrie", de D. Leborgne, Presses universitaires de France, 1982.

- La fonction gamma $x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ (permettant d'ailleurs le calcul de l'aire de la sphère unité en dimension n), que l'on trouvera par exemple dans le livre [22].

On peut citer comme autre résultat que ceux qui suivent sur les fonctions de ce type le théorème de Fubini, 65.

1.10.1 Continuité, dérivabilité sous le signe $\int$

Les résultats ci-dessous sont rappelés ici par souci encyclopédique, afin de regrouper les résultats s'appliquant aux fonctions définies par une intégrale.

Théorème 68 *Soit X un espace muni d'une mesure μ sur une tribu $\mathcal{T}$ de X. Soit (E,d) un espace métrique.*
On se donne f une application de $E \times X \to \mathbb{C}$, et on définit $F(t) = \int_X f(t,x)dx$ (intégrale pour la mesure μ, notée souvent aussi $\int_X f(t,x)d\mu(x)$.

Hypothèses	*Conclusion*
Pour tout t l'application $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable *Pour presque tout x la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue en T* *Il existe g L^1 telle que pour tout t et presque tout x $\lvert f(t,x)\rvert \leq g(x)$*	*F est continue en T.*
Pour tout t l'application $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable *Pour presque tout x la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E* *Pour tout compact K de E il existe g L^1 telle que pour tout t dans K et presque tout x $\lvert f(t,x)\rvert \leq g(x)$.*	*F est continue sur E.*
E est un ouvert de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ [a] *Pour presque tout t $x \mapsto f(t,x)$ est L^1* *Il existe N négligeable tel que pour tout $x \notin N$ la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable (resp. C^1)* [b]. *Pour tout compact K de E il existe une fonction g L^1 telle que pour tout t dans K et tout $x \notin N$ $\lvert \frac{\delta f}{\delta t}(t,x)\rvert \leq g(x)$.* [a] Hypothèse facile à retenir ; il s'agit de pouvoir définir une dérivée au sens le plus commun, ie dérivée d'une fonction d'une variable réelle ou complexe ! [b] Attention ! Dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{C}$ on parle de dérivabilité au sens complexe, et pas de différentiabilité en voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel !	*Pour tout t la fonction $x \mapsto \frac{\delta f}{\delta x}(t,x)$ est L^1* *F est dérivable (resp. C^1), de dérivée $\int_X \frac{\delta f}{\delta t}(t,x)dx$.*
E est un ouvert de $\mathbb{R}$ ou un ouvert de $\mathbb{C}$. *Pour presque tout t $x \mapsto f(t,x)$ est L^1* *Il existe N négligeable tel que pour tout $x \notin N$ la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est C^k.* *Pour tout compact K de E et tout $j \in [1,k]$ il existe une fonction g L^1 telle que pour tout t dans K et tout $x \notin N$ $\lvert \frac{\delta^j f}{\delta t^j}(t,x)\rvert \leq g(x)$.*	*Pour tout t la fonction $x \mapsto \frac{\delta^j f}{\delta t^j}(t,x)$ est L^1* *F est C^k, et pour $j \in [0,k]$ $\frac{\delta^j F}{\delta t^j} = \int_X \frac{\delta^j f}{\delta t^j}(t,x)dx$.*

Le théorème 69 est un exemple d'application.

Démonstration : Le premier théorème de continuité a été prouvé plus haut ; voir théorème 56.

Le second découle du fait que pour montrer la continuité en un point, il suffit de montrer la continuité séquentielle en ce point ; on se donne alors une suite tendant vers ce point, et on considère l'ensemble K des points de cette suite, plus la limite en question.

K est séparé parce qu'inclus dans un métrique.

K est compact, car étant donné un recouvrement ouvert de ce compact, on extrait un ouvert contenant la limite, il y a un nombre fini de points en dehors de cet ouvert, et ainsi on extrait un recouvrement fini.

On peut donc appliquer le théorème précédent à K, et on a le résultat souhaité.

Les théorèmes sur la dérivabilité découlent du corollaire 57. □

1.10.2 Fonctions holomorphes sous le signe $\int$

Théorème 69 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f de $\Omega \times X$ dans $\mathbb{C}$, avec X espace muni d'une σ-algèbre $\mathcal{T}$ et μ une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.*
On définit la fonction $F(z) = \int_X f(z,x)dx$.
Hypothèses requises :
- *Pour tout z $x \mapsto f(z,x)$ est L^1.*
- *Il existe N négligeable tel que pour tout $x \notin N$ la fonction $z \mapsto f(z,x)$ appartient à $H(\Omega)$.*
- *Pour tout compact K de Ω, il existe g L^1 sur K telle que pour tout z dans K et pour tout $x \notin N$, $|f(z,x))| \leq g(x)$.*

Alors :
- *$F(z)$ est définie pour tout z*
- *F est holomorphe*
- *$F'(z) = \int_X \frac{\delta f}{\delta z}(z,x)dx$*

Démonstration :

Montrons tout d'abord que :

pour tout compact K de Ω, il existe h L^1 sur K telle que pour tout z dans K et pour tout $x \notin N$, $|\frac{\delta f}{\delta z}(z,x))| \leq h(x)$.

Pour montrer ce résultat :

- Soit K un compact de Ω.
- Soit K_δ l'ensemble des z dans $\mathbb{C}$ tels que la distance de z à K soit $\leq \epsilon$ [1].
- L'application qui à z associe la distance de z à K est continue.
- K_δ est borné, et fermé comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue ; K_δ est donc compact.
- Pour tout z dans K le cercle $S(z,\delta)$ de centre z et de rayon δ est inclus dans K_δ.
- On choisit δ suffisamment petit pour que K_δ soit inclus dans Ω (c'est possible car sinon on construit une suite dans $K_{1/n} \cap \mathbb{C} \setminus \Omega$, on se plonge dans le compact K_1, on considère une limite de suite extraite, elle n'est pas dans Ω mais elle est dans K, d'où contradiction)
- D'après le théorème **??**, pour z' dans le disque de centre z et de rayon δ,

$$f(z',x) = \frac{1}{2i\Pi} \int_0^1 \frac{f(z+\delta e^{2i\Pi u}, x)}{\delta e^{2i\Pi u} - z'} du$$

[1] Il ne s'agit pas d'un ϵ voisinage, on a pris $\leq$ et non $<$.

Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégral 68 étant vérifiées, on en déduit :

$$\frac{\delta f}{\delta z}(z,x) = \frac{1}{2i\Pi}\int_0^1 \frac{f(z+\delta e^{2i\Pi u},x)}{(\delta e^{2i\Pi u}-z)^2}du$$

Et donc

$$\frac{\delta f}{\delta z}(z,x) \leq \frac{sup_{K_\delta} f(.,x)}{\delta^2}$$

Donc par hypothèse

$$|\frac{\delta f}{\delta z}(z,x)| \leq \frac{1}{\delta}g(x)$$

La fonction h égale à $\frac{1}{\delta^2}g$ convient donc pour le résultat que l'on voulait montrer, à savoir :

pour tout compact K de Ω, il existe h L^1 sur K telle que pour tout z dans K et pour tout $x \notin N$, $|\frac{\delta f}{\delta z}(z,x))| \leq h(x)$.

Alors, on peut conclure en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral 68 précédent que :

- $F(z)$ est définie pour tout z
- F est holomorphe
- $F'(z) = \int_X \frac{\delta f}{\delta z}(z,x)dx$ $\square$

1.10.3 Primitives

On pourra consulter le théorème **??** pour voir ce qu'il advient de la primitive de f lorsque $\frac{f'}{f}$ converge, et le théorème **??** pour voir ce qu'il advient lorsque $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ converge.

1.11 Zoologie de la mesure

1.11.1 Approfondissements sur les mesures complexes

Définition 70 *Etant donnée μ une mesure complexe sur X, on appelle* **variation totale de** *μ ou* **mesure de la variation totale de** *μ et on note $|\mu|$ l'application de l'ensemble des parties mesurables de X dans $[0,+\infty]$ qui à E mesurable associe $sup\ \sum_i |\mu(E_i)|$, le sup étant pris sur l'ensemble des partitions de X.*

Proposition 71 *$|\mu|$ est une mesure.*

Démonstration :

- Il est clair que $|\mu|(\emptyset) = 0$.
- Soit maintenant $(E_i)_{i\in I}$ avec I dénombrable une partition de E. On va chercher à montrer que $|\mu|(E) = \sum_i |\mu|(E_i)$.

- Montrons tout d'abord que $|\mu|(E) \geq \sum_i |\mu|(E_i)$. Pour cela on se donne $\epsilon > 0$, et on considère, pour tout i dans I, une partition $F_{i,j}$ de E_i avec $\sum_i |\mu(F_{i,j})| \geq (1-\epsilon).|\mu|(E_i)$ (on peut trouver une telle partition, par définition de $|\mu|$). On a alors

$\sum_i (1-\epsilon)|\mu|(E_i) \leq \sum_{i,j} |\mu|(F_{i,j}) \leq \sum_i |\mu|(E_i)$. En faisant tendre ϵ vers 0 on obtient l'inégalité attendue.

- Montrons maintenant que $|\mu|(E) \leq \sum_i |\mu|(E_i)$. Considérons une partition F_j de E. Si on réussit à montrer que la somme des $|\mu(F_j)|$ est inférieur ou égal à la somme des $|\mu|(E_i)$ on aura gagné. On considère alors $G_{i,j} = E_i \cap F_j$. Les $G_{i,j}$ forment une nouvelle partition de E. Par définition de $|\mu|$ on sait que $|\mu|(E_i) \geq \sum_j |\mu(G_{i,j})|$. En sommant sur I on obtient

$$\sum_i |\mu|(E_i) \geq \sum_{i,j} |\mu(G_{i,j})| \geq \sum_j \sum_i |\mu(G_{i,j})| \geq \sum_j |\mu(F_j)|$$

Le résultat est ainsi prouvé.□

Notons que pour prouver ce résultat on utilise allègrement les permutations de sommes infinies lorsque la convergence est absolue.

1.11.2 Presque recouvrement d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ par des petites boules

Proposition 72 *Soit $(x_i, r_i)_{i \in Boules}$, avec les x_i dans $\mathbb{R}^n$, et les r_i tels que $0 < r_i < \Delta < +\infty$.*
Alors il existe $Boules'$ un sous-ensemble <u>dénombrable</u> de $Boules$ tel que

$$\cup_{i \in Boules} \overline{B}(x_i, r_i) \subset \cup_{i \in Boules'} \overline{B}(x_i, 5r_i)$$

ET

$$(i,j) \in Boules'^2 \wedge i \neq j \Rightarrow B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset$$

(c'est à dire que les boules de $Boules'$ sont disjointes, et que si on multiplie leurs rayons par 5 on recouvre tout ce que l'on recouvrait avec $Boules$.

Par commodité, on identifiera le couple (x, r) et la boule fermée $\overline{B}(x, r)$.

<u>Démonstration :</u>

• On définit $Boules_k$ pour $k \geq 1$ l'ensemble des $i \in Boules$ tels que $r_i \in [\frac{D}{2^k}, \frac{D}{2^{k-1}}]$. C'est à dire que l'on regroupe les boules par taille, les plus grosses d'abord.

• On définit $BellesBoules_1$ comme un ensemble maximal de boules disjointes dans $Boules_1$. Cela peut se faire grâce au lemme de Zorn (voir lemme **??**).

• On définit ensuite $BellesBoules_k$ et $Genantes_k$ par récurrence.

• $Genantes_k$ est le sous-ensemble de $Boules_k$ des boules qui intersectent la réunion des boules de la réunion des $BellesBoules_i$ pour $1 \leq i < n$.

• $BellesBoules_k$ est la réunion de $BellesBoules_{k-1}$ et d'un ensemble maximal de boules disjointes parmi $Boules_k \setminus Genantes_k$.

• Il est clair que $BellesBoules_k$ est un ensemble de boules de diamètre minoré par une constante > 0.

• On montre maintenant que $BellesBoules_k$ est un ensemble dénombrable de boules :

- Le nombre de boules de $BellesBoules_k$ incluses dans $[-i, i]^n$ est fini, puisque le volume d'une boule est minoré par une constante > 0 et qu'il y a un volume fini dans $[-i, i]^n$ (rappelons que les boules sont disjointes).

- Donc $BellesBoules_k$ est dénombrable.

• On définit maintenant $BellesBoules$ (tout court, sans indice !) comme la réunion des $BellesBoules_k$. Il s'agit d'une famille de boules disjointes (facile, on prend deux boules, soit elles appartiennent à un même $BellesBoules_k$ (auquel cas elles sont disjointes), soit l'une appartient à $BellesBoules_k$ et l'autre à).

• $BellesBoules$ est une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, et est donc dénombrable.

• Il reste maintenant à prouver ce que l'on cherchait à prouver, c'est à dire que la famille $BellesBoules$ convient, c'est à dire que si l'on multiplie leurs rayons par 5, les boules de $BellesBoules$ remplissent au moins tout l'espace rempli par $Boules$.

• Soit x appartenant à une boule de $Boules$.

• Soit B une boule de $Boules$ à laquelle appartient x.

• Soit n tel que $B \in Boules_k$.

• Par définition de $BellesBoules_k$, la famille

$$\{B\} \cup BellesBoules_k \cup BellesBoules_{k-1} \cup BellesBoules_{k-2} ... \cup BellesBoules_1$$

n'est pas une famille de boules disjointes.

• Il existe donc une boule B' dans un des $BellesBoules_i$ pour $i \leq n$ qui intersecte B.

• En multipliant le rayon de B' par 5, on recouvre donc B...□

Corollaire 73 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et δ un réel > 0.*
Alors il existe une famille dénombrable de boules fermées disjointes de diamètre $< \delta$, toutes incluses dans U, qui recouvrent U à part sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Démonstration :

• On considère les intersections de U avec les couronnes ouvertes de centre 0 et comprises entre les sphères de rayon n et $n+1$.

• Il est clair que les intersections en question sont ouvertes, bornées.

• Il est donc clair que si l'on résoud la question dans le cas d'un ouvert borné, par réunion dénombrable, on aura résolu la question.

• Soit donc un tel U, ouvert borné.

• On considère l'ensemble des boules fermées de diamètre $< \delta$ incluses dans U.

• On considère maintenant la famille $ChouettesBoules_1$ dénombrable construite suivant la proposition précédente ; c'est à dire qu'en multipliant le rayon des boules par 5 on recouvre tout U.

• Le volume de $ChouettesBoules_1$ est au moins $\frac{1}{5^n}$ fois le volume de U.

• On réitère sur le complémentaire de $ChouettesBoules_1$ dans U ; on construit ainsi $ChouettesBoules_2$.

• On continue sur le complémentaire de $ChouettesBoules_1 \cup ChouettesBoules_2 \cup ... \cup ChouettesBoules_k$ pour construire $ChouettesBoules_{k+1}$.

• On considère maintenant $ChouettesBoules$ la réunions des $ChouettesBoules_k$; cette famille est dénombrable, et son complémentaire dans U est de volume inférieur à $(1 - 1/5^n)^i$ pour tout i, et donc de volume nul...□

Chapitre 2

Produit de convolution

Cette partie sera très enrichie par la lecture de la partie **??**, consacrée à la convolution en probabilités, et de la partie 4, consacrée à l'approximation de fonctions, et faisant un large usage du produit de convolution.

2.1 Définitions et généralités

Définition 74 *Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ mesurables. Alors on appelle* **produit de convolution de** f **et** g *et on note $f * g$ la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d\mu(y)$.*

La convolution servira beaucoup, beaucoup, beaucoup, pour les résultats d'approximation de la partie 4 (notamment une version utile du lemme d'Urysohn 100) et de la partie **??**, consacrée à la convolution en probabilités.

Proposition 75

$$f * g = g * f$$

Démonstration : Résulte simplement du changement de variable $u = x - y$.□

Théorème 76 (Domaine de définition de $f * g$) • *Si f et g sont L^1 alors $f*g$ est L^1 et défini presque partout, et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*
• *Si f est L^∞ et g L^1 alors $f * g$ est L^∞ et défini presque partout.*
• *Si f est bornée sur tout compact et si g est L^1 à support compact alors $f * g$ est défini partout.*

Ce résultat est utilisé par exemple dans la proposition 99.

Démonstration :

• Simple application de Fubini (théorème 65).

• Facile, $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|d\mu(y) \leq M \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|d\mu(y)$ avec M un majorant essentiel de $|f|$.

• Facile aussi, $f(x-.)$ admet un majorant sur le compact en dehors du quel $g(.)$ est nul.$\square$

Théorème 77 *Si f est L^1 et si g est L^p, pour $p \in [1,\infty]$, alors $f*g$ est définie presque partout et appartient à L^p ; en outre $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.*

<u>Démonstration :</u>
Si $p=\infty$, c'est clair, si $p=1$, c'est le théorème précédent.
Considérons donc maitenant $1<p<\infty$.
• $y \mapsto g(y)^p$ est L^1.
• $\int |f(x-y)| \, |g(y)|^p dy$ est fini, par le cas $p=1$.
• Posons q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
• $\int (|f(x-y)|^{1/p} \, |g(y)|)^p dy$ est fini
• Puisque $\int (|f(x-y)|^{1/q})^q dy$ est fini aussi, et par l'inégalité de Hölder 85,

$$\int |f(x-y)| \, |g(y)| \, dy$$

est fini aussi et

$$\leq (\int (|f(x-y)|^{1/p} \, |g(y)|)^p dy)^{1/p} (\int |f(x-y)|)^{1/q}$$

$$\leq (\int (|f(x-y)| \, |g(y)|^p) dy)^{1/p} (\int |f(x-y)|)^{1/q}$$

par le cas $p=1$

$$\leq \|f(x-.)\|_1^{1/p} \, \|g(.)^p\|_1^{1/p} \|f(x-.)\|_1^{1/q}$$

$$\leq \|f\|_1 \, \|g\|_p$$

D'où le résultat.$\square$

Définition 78 *Soit f une application définie sur un espace topologique X et à valeur dans $\mathbb{C}$. On appelle* **support de** *f l'adhérence de l'ensemble*

$$\{x \in X ; f(x) = 0\}.$$

On dit que f est à **support compact** *si son suppport est compact.*

Théorème 79 (Propriété fondamentale du produit de convolution) • *Si f est C^k et si g est L^1 à support compact, alors $f*g$ est C^k. En outre pour tout ν tel que $|\nu| \leq k$ $D^\nu(f*g) = (D^\nu f)*g$.*
• *On a le même résultat si f est C^k à support compact et g L^1.*

Ce théorème a pour conséquence la propositon 80, ou le résultat d'approximation 99. Il servira aussi pour le théorème 110 : la densité de l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration :

On démontre simplement le premier $\bullet$, le second étant similaire.

$\bullet$ On montre le résultat sur toute boule $B = B(0, R)$; c'est clairement suffisant pour avoir le résultat désiré.

$\bullet$ On se donne R' tel que le support de G soit inclus dans la boule $B(0, R')$.

$\bullet$ Pour tout x dans B et tout y tel que $g(y)$ est non nul, $x+y$ est dans $B(0, R+R')$.

$\bullet$ Il existe M tel que la somme des $|D^\nu f|$ pour $|\nu| \leq k$ soit inférieure à M sur $B(0, R+R')$.

$\bullet$ On procède alors par récurrence.

$\bullet$ L'initialisation de la récurrence, le cas $k = 0$, est simplement une continuité sous le signe intégral (voir théorème 68).

$\bullet$ Ensuite on suppose le résultat vrai jusqu'au rang k, et on se donne ν tel que $|\nu| = k + 1$; alors pour un certain i $D^\nu = \frac{\delta}{\delta x_i} D^\eta$ pour un certain η.

$\bullet$ Les trois points suivants sont clairement vérifiés :

$$y \mapsto D^\eta f(x-y)g(y)$$

est intégrable

$$x \mapsto D^\eta f(x-y)g(y)$$

est C^1

$$|D^\nu f(x-y)|\,|g(y)| \leq M|g(y)|$$

$\bullet$ Alors :

$$D^\nu \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d\mu(y)$$

$$= \frac{\delta}{\delta x_i} D^\eta \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d\mu(y)$$

$$= \frac{\delta}{\delta x_i} \int_{\mathbb{R}^n} D^\eta f(x-y)g(y)d\mu(y)$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta}{\delta x_i} D^\eta f(x-y)g(y)d\mu(y)$$

(grâce aux résultats affirmés dans le $\bullet$ précédent et grâce au théorème 68)

$$= \int_{\mathbb{R}^n} D^\nu f(x-y)g(y)d\mu(y)$$

D'où le résultat.□

2.2 Zoologie de la convolution

2.2.1 Convoluée d'un polynôme

Proposition 80 *Si f est un polynôme et si g est L^1 à support compact, alors $f * g$ est un polynôme.*

Démonstration : Il s'agit d'une application directe du théorème 79... Il suffit de se rappeler qu'une application dont une dérivée est nulle est un polynôme.□

2.2.2 Une fonction FONDAMENTALE pour la convolution

Proposition 81 *Il existe une certaine fonction ρ C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, positive, d'intégrale 1, de support inclus dans $B(0,1)$.*

<u>Démonstration :</u> On peut par exemple considérer $\rho(x) = K\ exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2})$, pour K convenablement choisi. On trouvera au lemme **??** une preuve du fait que cette fonction est convenable.□

Voir lemme **??** pour une liste d'applications.

Corollaire 82 *Pour tout ϵ, il existe une fonction ρ_ϵ C^∞, de support inclus dans $B(0,\epsilon)$, et d'intégrale 1.*

<u>Démonstration :</u> On utilise simplement la fonction ρ définie en 81, avec $\rho_\epsilon(x) = L\rho(x/\epsilon)$, avec L convenablement choisi.□

On a des applications aux résultats d'approximation suivantes :

- Approximation d'ensembles mesurables par des fonctions C^∞, voir proposition 99.

- Approximations de fonctions C^k par des fonctions C^∞ à support compact ; voir le théorème 110.

- Approximations de fonctions L^p par des fonctions C^∞ à support compact : voir le théorème 111.

Chapitre 3

Espaces $\mathcal{L}^p$ et espaces L^p

3.1 Quelques résultats utiles

Définition 83 (Nombres conjugués) *On dit que deux réels p et q sont conjugués si ils sont tous les deux > 0 et si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Lemme 84 *Pour $\alpha \in]0,1[$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}^+)^2$ on a $u^\alpha.v^{1-\alpha} \leq \alpha.u + (1-\alpha).v$*

Démonstration : On passe au ln et le résultat est évident par concavité de ln.□

Théorème 85 (Inégalités de Hölder) *Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}^+}$, et soient p et q deux réels conjugués, alors*

$$\int f.g \leq (\int f^p)^{\frac{1}{p}}.(\int g^q)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration : • Posons $F = (\int f^p)^{\frac{1}{p}}$ et $G = (\int g^q)^{\frac{1}{q}}$.

• On peut supposer sans perte de généralité F et G finis et non nuls.

• Posons $u = (\frac{f(x)}{F})^p$, $v = (\frac{g(x)}{G})^q$, $\alpha = \frac{1}{p}$, on a $1 - \alpha = \frac{1}{q}$, et donc en appliquant le lemme 84 on obtient

$$\frac{f(x).g(x)}{FG} \leq \frac{1}{p}\frac{f(x)^p}{F^p} + \frac{1}{q}\frac{g(x)^q}{G^q}$$

• En intégrant on obtient

$$\frac{1}{FG}\int fg \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Ce qui achève la preuve.□

Corollaire 86 (Inégalité de Schwartz) *Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors*

$$\int |f.g| \leq \sqrt{\int f^2}.\sqrt{\int g^2}$$

Démonstration : Spécialisation du théorème 85 dans le cas $p = q = 2$.□

Théorème 87 (Inégalité de Minkowski) *Soit $p \in]1, +\infty[$, et soient f et g des fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$.*
Alors

$$(\int (f+g)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int f^p)^{\frac{1}{p}} + (\int g^p)^{\frac{1}{p}}$$

Démonstration : • Si $(\int (f+g)^p)^{\frac{1}{p}}$ est infinie, alors par convexité de $x \mapsto x^p$, on peut écrire $(\frac{f+g}{2})^p \leq \frac{f^p+g^p}{2}$, et donc déduire que l'inégalité annoncée est vraie.
• On suppose maintenant que $(\int (f+g)^p)^{\frac{1}{p}}$ est finie.
• On considère q conjugué à p.
• Alors par le théorème 85, on peut écrire les deux inégalités suivantes :

$$\int f.(f+g)^{p-1} \leq (\int f^p)^{\frac{1}{p}}.(\int (f+g)^{(p-1).q})^{\frac{1}{q}}$$

$$\int g.(f+g)^{p-1} \leq (\int g^p)^{\frac{1}{p}}.(\int (f+g)^{(p-1).q})^{\frac{1}{q}}$$

• On additionne et on obtient l'inégalité annoncée.□

3.2 Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

On se donne $p \in [1, +\infty]$. On note bien que p peut être $+\infty$.

Définition 88 (Normes N_p) *Si $p \in [1, +\infty[$ alors on note N_p l'application qui à une fonction f de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou de X dans $\mathbb{C}$ associe $(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$.*
On appelle **majorant essentiel** *d'une fonction f tout M tel que $|f(x)| \leq M$ pour presque tout x.*
Si $p = +\infty$ alors on note N_∞ l'application qui à une fonction f de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou de X dans $\mathbb{C}$ associe la borne inf des majorants essentiels de f. $N_\infty(f)$ est appelée **borne supérieure essentielle** *de f.*
On dit qu'une fonction est **essentiellement bornée** *si $N_\infty(f)$ est fini.*
On note $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ ou $\mathcal{L}^p(X)$ lorsqu'il n'y a pas ambiguité l'ensemble des fonctions f mesurables de (X, μ) dans $\mathbb{R}$ telles que $N^p(f)$ est fini.

Pour la relation $\mathbb{R}$ définie par

$$f\mathbb{R}g \iff f(x) = g(x) \text{ presque partout}$$

on note $L^p(X, \mu)$ ou $L^p(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{R}$ contenant au moins une fonction de $\mathcal{L}^p(X, \mu)$.
On définit de même $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X, \mu)$, $L^p_{\mathbb{C}}(X, \mu)$, $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)$ et $L^p_{\mathbb{C}}(X)$, en considérant des fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$.
On note $\lambda^p(X)$ l'espace $L_{\mathbb{C}}(X, \mu) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ avec μ la mesure du dénombrement (il y a identité entre $L(\mathbb{N})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{N})$ car pour tout P partie de $\mathbb{N}$ $\mu(P)$ est égal au nombre d'éléments de P, éventuellement $+\infty$, et donc le seul ensemble négligeable est l'ensemble vide).
On note λ^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}, \mu) = L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(N)$, avec μ la mesure du dénombrement.
Une famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est **sommable de somme** *x si pour tout ϵ il existe $J \subset I$ finie telle que pour tout K fini telle que $J \subset K \subset I$ on ait $|x - \sum_{i \in K}| \leq \epsilon$.*

On note que la borne supérieure essentielle d'une fonction est le plus petit majorant essentiel de cette fonction.
N_p est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ et une norme sur $L^p(X)$.
$l^p(X)$ est l'ensemble des applications des f de X dans $\mathbb{C}$ telles que la famille $(|f(x)|^p)_{x \in X}$ soit sommable.

3.3 Théorèmes sur les L^p

Théorème 89 (Convergence dominée de Lebesgue dans L^p) On suppose ici $p \neq +\infty$.
Soit une suite (f_n) de fonctions mesurables, telle que

$$f_n(x) \to f(x) \textit{ pour presque tout } x$$

$$\exists g \in L^p / \forall (x,n) |f_n(x)| \leq g(x)$$

alors la classe de f appartient à L^p et f_n tend vers f pour N^p.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à f_n^p, avec g^p et f.$\square$

Remarque 90 (Contre-exemple avec $p = +\infty$) *Il suffit de considérer $f_n = \chi_{[}n, +\infty[$, pour avoir toutes les hypothèses vérifiées, sans que la conclusion soit juste.*

Corollaire 91 *Les espaces L^p sont des espaces de Banach, pour $p \in [1, +\infty]$.*

Démonstration : • Tout d'abord on considère le cas $p = \infty$.
On se donne une série f_n normalement convergente pour la norme infinie ; on peut clairement considérer une limite simple f par complétude de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Quitte à remplacer f par une autre fonction de la même classe que f, on peut considérer M fini un majorant de f (et pas seulement un majorant *essentiel*). On peut alors simplement considérer le reste $\sum_{i=n+1..+\infty} N_\infty(x)$ pour avoir la convergence pour la norme infinie.
• On traite maintenant le cas $p \neq \infty$.
• Supposons donnée une série f_n de fonctions mesurables normalement convergente (il est nécéssaire et suffisant pour qu'un espace normé soit complet que toute série normalement convergente soit convergente).
• On note $g(x) = \sum |f_n(x)|$.
• Par le théorème de convergence monotone $\int g = lim \int \sum_{i \in [1,n]} |f_i(x)|$ et cette quantité est finie par hypothèse.
• Par le théorème 89 appliquée à $\sum_{i=1..n} f_i$ majorée par g appartenant à L^p, f_n tend vers f pour N_p.$\square$

Bien noter que le résultat de complétude vaut aussi pour L^∞.

Proposition 92 *Pour $p \in [1, +\infty]$, si X est de mesure finie, alors $L^{p'}(X) \subset L^p(X)$ pour tout $p' \geq p$ (éventuellement p' infini).*

Démonstration : Pas dur, en séparant X en l'ensemble des points où $|f| > 1$ et en l'ensemble des points où $|f| \leq 1$.$\square$

Remarque importante ! Comme le signale la remarque qui suit le théorème 109, l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'exprime en fait comme le complété pour la distance associée à la norme $\|.\|_p$, si $p < \infty$. Ce résultat n'est pas valable pour $p = \infty$; ici l'adhérence serait simplement l'ensemble des applications qui, pour tout $\epsilon > 0$, sont inférieures à ϵ[1] en dehors d'un certain compact K_ϵ.

La démonstration suivante, difficile, est directement extraite (et simplifiée, quitte à renforcer légèrement les hypothèses - le résultat général inclut en fait X union dénombrable de parties de mesure finie) du livre de W. Rudin, Analyse réelle et complexe.

Théorème 93 *Soit $p \in [1, \infty[$, μ mesure positive finie sur X, ϕ forme linéaire bornée (à valeurs dans $\mathbb{C}$) sur $L^p(X)$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors il existe un unique g (presque partout)* [a] *L^q, tel que*

$$\phi(f) = \int_X fg d\mu \tag{3.1}$$

$$\tag{3.2}$$

et on a alors

$$\|\phi\| = \|g\|_q = \sqrt[q]{\int |g|^q}$$

[a] L'unicité presque partout signifie que si deux fonctions vérifient cette propriété, alors elles sont nécéssairement égales presque partout.

Ce théorème énonce exactement un isomorphisme entre L^q et L^p. Il faut bien noter que L^p signifie $L^p(\mu)$ et L^q signifie $L_q(\mu)$.

Démonstration :

L'unicité découle facilement du fait que si g et g' sont deux fonctions vérifiant la propriété 3.1, alors pour tout E mesurable, l'intégrale sur E de $g - g'$ est nulle ; donc en particulier pour E égal à l'ensemble des x pour lesquels (respectivement) $Re(g(x)) > Re(g'(x))$, $Re(g(x)) < Re(g'(x))$, $Im(g(x)) > Im(g'(x))$, $Im(g(x)) < Im(g'(x))$.

L'existence est beaucoup plus laborieuse à prouver :

• Tout d'abord, l'inégalité de Hölder 85 et l'équation 3.1 impliquent immédiatement $\|\phi\| \leq \|g\|_q$. Il est donc suffisant de montrer l'existence de g et le fait que $\|\phi\| \geq \|g\|_q$.

• Le cas $\phi = 0$ est trivial. Par la suite nous supposerons donc ϕ non nulle.

• Montrons tout d'abord l'existence d'une certaine fonction g telle que $\phi(f) = \int fg$ pour toute $f \in L^\infty(\mu)$. Cela se fait comme suit :

– Définissons $\mathcal{L}(E) = \phi(\chi_E)$ pour χ_E fonction caractéristique de E mesurable de (X, μ).
– $\mathcal{L}$ est additive, au sens où si A et B sont disjoints, $\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$.

[1] En module !

– Elle est dénombrablement additive. Pour le voir considérons les E_i pour i entier > 0 mesurables, disjoints, A_k égal à l'union des A_i pour i égal à $1, 2, ..., k$, et E l'union des E_i. p étant supposé inférieur à ∞, $\|\chi_E - \chi_{A_k}\|_p = (\mu(E \setminus A_k))^{1/p} \to 0$ comme $k \to \infty$. Par continuité de ϕ, ceci implique que $\mathcal{L}(A_k) \to \mathcal{L}(E)$.
– $\mathcal{L}$ est donc une mesure complexe.
– $\mu(E) = 0$ implique que $\mathcal{L}(E) = 0$ car alors $\|\chi_E\|_p = 0$.
– Donc, d'après le théorème de Radon-Nikodyn il existe g L^1 telle que pour tout E mesurable inclus dans X,

$$\phi(\chi_E) = \int_E g d\mu = \int_X \chi_E g d\mu$$

– Ce résultat se généralise par linéarité aux fonctions étagées mesurables.
– On peut ensuite le généraliser aux fonctions dans $L^\infty(\mu)$ car toute fonction f bornée (presque partout) est limite uniforme de fonctions f_i étagées mesurables ; et $\|f_i - f\|_p \to 0$; donc $\phi(f_i) \to \phi(f)$.

• Il reste donc maintenant à montrer que g est L^q et que $\|\phi\| \geq \|g\|_q$; par densité de L^∞ dans L^p on pourra alors conclure que l'équation 3.1 est bien vérifiée.

• On traite tout d'abord le cas $p = 1$. On se donne E mesurable ; alors

$$|\int_E g d\mu| \leq \|\phi\| \|\chi_E\|_1$$

$$= \|\phi\| \mu(E)$$

Donc par le lemme 94 ci-dessous, $\|g\|_\infty \leq \|\phi\|$. On a donc d'une pierre deux résultats : g est L^∞, et $\|\phi\| \geq \|g\|_\infty$.

• Il reste donc à traiter le cas $p > 1$. Cela se fait en considérant α telle que $\alpha g = |g|$ et α de module constant égal à 1. Ceci est un exercice classique et peu difficile. Ensuite :
– On définit E_n l'ensemble des x tels que $|g(x)| \leq n$.
– On définit $f = \chi_{E_n} \times |g^{q-1}| \times \alpha$.
– On constate facilement que $|f|^p = |g|^q$ sur E_n.
– On sait déjà que $\phi(f) = \int fg$; donc

$$\int_{E_n} |g|^q = \int fg = \phi(f) \leq \|\phi\| \times (\int_{E_n} |g|^q)^{1/p}\|$$

donc $\int_{E_n} |g|^q \leq \|\phi\|^q$. Par le théorème de convergence monotone 42, on peut alors dire que $\|g\|_q \leq \|\phi\|$; d'où le résultat. □

Lemme 94 *Supposons X de mesure $\mu(X)$ fini, g appartenant à $L^1(\mu)$, S fermé de $\mathbb{C}$. Alors si pour tout E mesurable de mesure > 0 la moyenne sur E de g (ie $\frac{1}{\mu(E)} \int_E g(x)$) appartient à S, alors g appartient à S presque partout.*

Démonstration :

• Considérons $\mathbb{D}$ un disque fermé dans le complémentaire de Δ.

• Il suffit de montrer que $\mu(E) = 0$ avec $E = g^{-1}(\mathbb{D})$; en effet, le complémentaire de S étant (comme tout ouvert) union dénombrable de disques fermés, on aura alors $g^{-1}(\mathbb{D})$ union dénombrables d'ensembles de mesure nulle, donc $g^{-1}(\mathbb{D})$ de mesure nulle.

• Montrons donc $\mu(E) = 0$. Pour cela supposons, pour arriver à une contradiction, $\mu(E) > 0$. Alors, en posant α le centre de $\mathbb{D}$ et r son rayon,

$$|\frac{1}{\mu(E)}\int_E g - \alpha| = |\frac{1}{\mu(E)}\int_E (g-\alpha)|$$

$$\leq \frac{1}{\mu(E)}\int_E (g-\alpha)$$

$$\leq r$$

Or $\frac{1}{\mu(E)}\int_E g$ est censé appartenir à S, d'où contradiction.□

3.4 Zoologie des espaces L^p

3.4.1 Espace l^p

Proposition 95 *On note l^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N},\mu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N},\mu) = L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{N}) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(N)$, avec μ la mesure du dénombrement. Il s'agit donc de l'espace des suites (x_i) telles que $\sum |x_i|^p$ est fini. La norme N_p, est la norme suivante :*

$$N_p(x) = \|x\| = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$$

Pour cette norme,
l^p est complet.

Démonstration :

L'inégalité de Hölder se traduit par

$$N_1(z) \leq N_p(x).N_q(y)$$

si p et q sont conjugués et si $z_i = x_i.y_i$.□

3.4.2 Espace L^2

⊡ **Généralités**

2 est conjugué à lui-même, d'où le cas particulier.

Voici une liste de propriétés, découlant immédiatement des propriétés de L^p :
• Le produit de deux fonctions de L^2 est intégrable (par l'inégalité de Hölder)
•

⊡ Espaces préhilbertiens L^2 et $L^2_{\mathbb{C}}$

Définition 96 *Le* **produit scalaire euclidien usuel** *sur* $L^2(X)$ *est égal à* $(f,g) \mapsto < f|g >= \int f.gd\mu$.
Ce produit scalaire euclidien fait de $L^2(X)$ *un espace hilbertien réel. Le* **produit scalaire hermitien usuel** *sur* $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ *est égal à* $(f,g) \mapsto < f|g >= \int \overline{f}.gd\mu$.
Ce produit scalaire hermitien fait de $L^2_{\mathbb{C}}(X)$ *un espace hilbertien complexe.*

⊡ Espace de Hilbert L^2 et $L^2_{\mathbb{C}}$

L^2 et $L^2_{\mathbb{C}}$ sont préhilbertiens et complets, donc ce sont des espaces de Hilbert. Ceci sera abondamment utilisé dans la partie 5 sur les séries de Fourier.

Chapitre 4

Approximation de fonctions

4.1 Topologie et approximation de fonctions caractéristiques

On trouvera ici des lemmes qui seront des outils utiles pour les démonstrations ultérieures. On peut se référer au livre "analyse réelle et complexe" de Rudin.

4.1.1 Intercalation d'ouverts relativement compacts entre un ouvert et un compact

Lemme 97 *Soit X un espace séparé localement compact, U un ouvert de X, et K un ensemble compact inclus dans U. Alors il existe un ouvert V de X relativement compact* [a] *tel que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

[a] C'est-à-dire d'adhérence dans X compacte.

Le lemme d'Urysohn 98 se prouve facilement en utilisant ce résultat.

Démonstration : • Construisons tout d'abord V ouvert contenant K, avec $\overline{V}$ compact

- Soit K_x un voisinage compact de x, pour $x \in K$
- Soit V_x l'intérieur de K_x
- Les V_x recouvrent K, on peut donc en extraire un recouvrement fini $\cup_{x \in I} V_x$
- la réunion V des V_x, pour x dans I, convient.

• Si $U = X$, V convient.

• Sinon, soit F le complémentaire de U. Bien entendu il est fermé.

• Pour x dans F définissons T_x ouvert contenant K avec $x \notin T_x$. Un tel ouvert existe, par le théorème **??**.

• Définissons alors $K_x = \overline{T}_x \cap F \cap \overline{V}$ (voir figure 4.1.

• L'intersection des K_x pour x dans F est vide, car chaque x de F n'appartient pas à T_x, donc pas à $\cap_y T_y$.

• Les K_x sont fermés dans un compact $\overline{V}$. Donc par la propriété **??**, on peut en extraire une sous-famille $(K_x)_{x \in J}$ finie telle que l'intersection soit vide.

• Alors $\cap_{x \in J} T_x \cap V$ convient (rappelons qu'un fermé d'un compact est compact, voir corollaire **??**).□

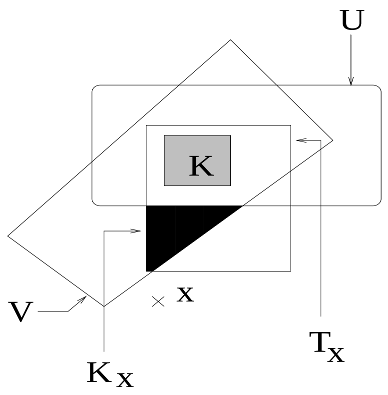

FIG. 4.1 – Construction de K_x pour $x \in F$.

4.1.2 Séparation d'un compact et d'un fermé

Lemme 98 (Lemme d'Urysohn) *Soit X un espace topologique séparé localement compact, U un ouvert de X, K un compact de X inclus dans U. Alors il existe une fonction f continue de X dans $[0, 1]$ telle que*

$$x \in K \to f(x) = 1$$
$$x \notin U \to f(x) = 0$$

Ne pas utiliser un théorème difficile dans un cas simple : dans le cas d'un espace métrique, la fonction qui à x associe $\frac{d(x,X\setminus U)}{d(x,X\setminus U)+d(x,K)}$ convient.

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on trouvera une preuve plus simple avec le théorème 100 (utilisant la convolution). En outre, la fonction construite sera C^∞.

Cela revient à avoir un compact, un fermé disjoint du compact, et à définir une fonction continue égale à 1 sur le compact et à 0 sur le fermé.

Démonstration :

• Par le lemme 97 (appliqué deux fois), construisons V_0 et V_1 deux ouverts relativement compacts [1] tels que

$$K \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset V_1 \subset \overline{V}_1 \subset U$$

• Soit $q_0, ..., q_n, ...$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, avec $q_0 = 0$ et $q_1 = 1$.

• Supposons construits (V_{q_i}) pour $i \in \{0, 1, ...n\}$ des ouverts relativement compacts tels que $q_i < q_j$ implique $\overline{V}_{q_i} \subset V_{q_j}$ pour i et j dans $\{0, 1, ...n\}$.

• Alors le lemme 97 permet de construire $V_{q_{n+1}}$.

• On construit ainsi une famille de fermés indexés par les éléments de $Ratio = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, avec $q < p \Rightarrow \overline{V}_q \subset V_p$.

[1]D' adhérences compactes.

• Définissons alors, pour $q \in Ratio$, $f_q = (1-q)\chi_{V_q}$, et $g_q = q\chi_{\overline{V_q}} + (1-q)$ (voir figure 4.2).

• Puis $f = sup_{q \in Ratio} f_q$, et $g = inf_{q \in Ratio} g_q$.

• Nous avons donc, par la proposition **??**, f semi-continue inférieurement et g semi-continue supérieurement.

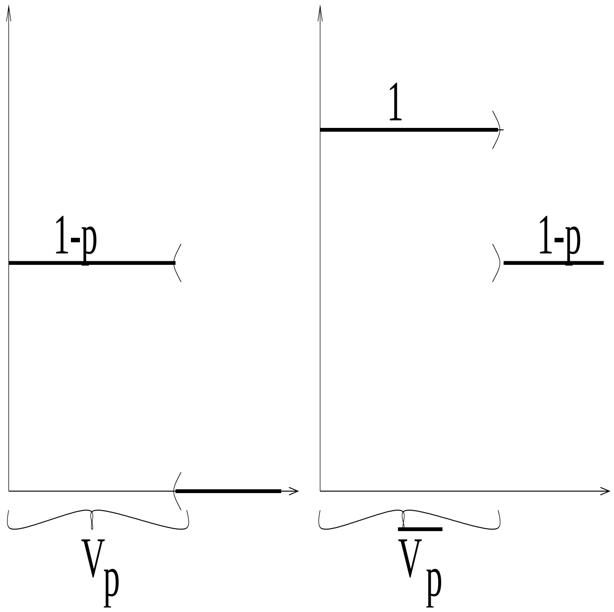

FIG. 4.2 – Graphe de f_q (à gauche) et g_q (à droite).

• Il est clair que $\chi_K \leq g$ et $\chi_U \geq f$.

• Il suffit de montrer (par la proposition **??**) que $f = g$; ainsi f, semi-continue à la fois supérieurement et inférieurement, sera continue.

• Supposons que $f(x) > g(x)$.

- Alors $\exists p, q \in Ratio$ tels que

$$f_p(x) > g_q(x)$$

- Donc $x \notin V_q$, $x \in V_p$, et donc $q < p$

- Par contre (voir figure 4.2) $1-p > 1-q$; ce qui est contradictoire avec $q < p$.

• Supposons maintenant que $f(x) < g(x)$.

- Alors on peut trouver $(p, q) \in Ratio^2$ tels que

$$f(x) < 1-p < 1-q < g(x)$$

- Alors par définition du sup et de l'inf :

$$f_p(x) < 1-p < 1-q < g_q(x)$$

- On en déduit alors $x \notin V_p$ et $x \in V_q$, ce qui implique $p < q$, et contredit $1-p < 1-q$.$\square$

On trouvera par exemple une application dans la partie **??** sur le cube de Hilbert. Les autres versions de lemmes d'Urysohn (voir lemme 100) auront d'autres applications.

4.1.3 Approximation d'un ensemble mesurable par une fonction C^∞

Proposition 99 *Soit E un ensemble mesurable de mesure finie de $\mathbb{R}^n$, et soit $\epsilon > 0$.*
Alors il existe une fonction f C^∞ telle que

$$\chi_E \leq f \leq \chi_{V_{2\epsilon}(E)}$$

avec $V_t(E)$ l'ensemble des éléments à distance $< t$ de E.

<u>Démonstration :</u>
• Soit E un tel ensemble.
• Définissons $f_n = \chi_{V_{1/n}(E)} * \rho_{1/n}$, avec $\rho_{1/n}$ la fonction définie par le corollaire 82 (de support inclus dans $B(0, 1/n)$ et d'intégrale 1, étant en outre de classe C^∞).
• f_n est bien définie et L^1, car $\rho_{1/n}$ et $\chi_{V_{1/n}(E)}$ sont L^1 (voir propriété 76 du produit de convolution).
• f_n est C^∞, par la propriété 79.
• Tout d'abord on remarque que $\chi_E \leq f_n$
En effet, si $x \in E$, alors $f_n(x)$ est l'intégrale de $\rho_{1/n}$ sur une boule de rayon ϵ (sur cette boule en effet $\chi_{V_{1/n}(E)}$ vaut 1 - l'intégrale de f_n y est donc égale à l'intégrale de $\rho_{1/n}$, donc 1).
• Ensuite $f_n \leq \chi_{V_{2\epsilon}(E)}$ pour n assez grand.
- on le montre tout d'abord pour $\chi_{V_{2\epsilon}(E)}(x) = 0$. Pour cela, si $\chi_{V_{2\epsilon}(E)}(x) = 0$, on note que $d(x, E) > 3\epsilon/2$, alors si $1/n \leq \epsilon$,

$$f_n(x) = \int \chi_{V_{1/n}(E)}(x-y)\rho(y)d\mu(y)$$

$$= \int_{\|y\| \leq 1/n} \chi_{V_{1/n}}(x-y)\rho_{1/n}(y)d\mu(y)$$

$$= 0$$

- f est par ailleurs toujours inférieure à 1. D'où le résultat, en choisissant $f = f_n$ pour n assez grand.$\square$

4.1.4 Lemme d'Urysohn

Il ne s'agit ici d'une version dans $\mathbb{R}^n$ du lemme d'Urysohn. On trouvera une version beaucoup plus générale (espace localement compact séparé) avec le lemme 98. Mais pour des applications de la vie de tous les jours, ce théorème suffit, et peut même s'avérer plus puissant, puisqu'il fournit une fonction C^∞ et non simplement une fonction continue.

Théorème 100 (Lemme d'Urysohn, deuxième version) *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant K, alors il existe une fonction f C^∞ à support compact telle que $\chi_K \leq f \leq \chi_\Omega$.*

Il est plus élégant de se passer d'invoquer un tel théorème lorsque l'on peut construire manuellement une solution élégante. Notamment on peut construire manuellement une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ comprise entre $\chi_{\overline{B}(0,n)}$ et $\chi_{\overline{B}(0,n+1)}$. En effet, définissons

$$f_{|B(0,1)}(x) = e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}$$

$$f_{|B(0,1)^c}(x) = 0$$

Cette fonction est C^∞, comme expliqué en **??**, et > 0 sur $B(0,1)$.

On définit alors $F_n(x) = \int_{B(x,n)} f(t)d\mu(t)$.

F_n est C^∞, comme on s'en convainc en dérivant sous le signe $\int$ l'expression suivante (équivalente par un simple changement de variable) $F_n(x) = \int_{B(0,n)} f(x+t)d\mu(t)$ (voir théorème 68). Attention, pour appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme, il faut bien voir que chaque dérivée $D^\nu f$ est majorée par une fonction L^1, ce qui n'est pas difficile en l'occurence, puisque toutes les dérivées $D^\nu f$ sont continues à support compact.

Il est ensuite évident que F_n est strictement > 0 sur $B(0,n)$, nulle sur $B(0,n+1)^c$, et comprise entre 0 et 1 partout.

On construit de même, pour Ω ouvert contenant la boule unité fermée, en considérant $F_n(x/n)$ pour n assez grand, une fonction égale à 1 sur $\overline{B}(0,1)$, et nulle en dehors de Ω.

Voir par exemple 4.6.3 ou les théorèmes 108, 101 et 109.

Démonstration :

• Il faut tout d'abord se rappeler que la distance entre un compact et un fermé disjoints est toujours > 0 (en effet la distance au fermé est continue, par la proposition **??**, et donc son minimum est atteint sur le compact).

• Ensuite on applique le lemme 99.$\square$

4.1.5 Partition C^∞ de l'unité

Théorème 101 (Partition C^∞ de l'unité) *Soit K un compact inclus dans $\mathbb{R}^n$, inclus dans la réunion des Ω_i pour $i \in [1,p]$, avec Ω_i ouvert.*
Alors il existe $f_1, ..., f_p$ des applications C^∞ telles que le support de f_i soit inclus dans Ω_i pour tout $i \in [1,p]$, avec

$$\chi_K \leq \sum_{i\in[1,p]} f_i \leq 1$$

Démonstration :

• On considère la famille $(B_i)_{i\in I}$ des boules B telles qu'il existe $i \in [1,p]$ tel que $B \subset \Omega_i$ [2]. Etant donné i dans I on note $Num(i)$ un entier tel que $B_i \subset \Omega_{Num(i)}$.

• Puisque K est compact, et puisque K est (clairement !) réunion des $(B_i)_{i\in I}$, on se restreint à une réunion finie $(B_i)_{i\in J}$, recouvrant K.

• Commençons par prouver le théorème, sans se préoccuper de la contrainte $\sum_i f_i \leq 1$.

[2] $\exists i \in [1,p]$ tel que $B \subset \Omega_i$ et pas $B \subset \cup_{i\in[1,p]}\Omega_i$!

• Pour cela, définissons Ury_i, pour $i \in J$, une fonction C^∞ égale à 1 sur B_i et nulle en dehors de $\Omega_{Num(i)}$. Cela se fait par le lemme d'Urysohn, version 100, ou éventuellement par la remarque qui suit le dit lemme, qui montre que dans ce cas particulier on peut se passer du résultat général.

• On définit maintenant $MetaUry_i$, pour $i \in [1, p]$, la somme des Ury_j, pour $j \in J$ et $Num(j) = i$.

• Il est clair, comme annoncé plus haut, que la famille $(MetaUry_i)_i$, vérifie le théorème énoncé, à ceci près que la somme n'est pas nécéssairement inférieure ou égale à 1.

• On se donne maintenant une fonction f C^∞ comprise entre χ_K et $\chi_{V_\epsilon(K)}$ [3], avec ϵ inférieur au double de la distance du compact au fermé F défini par son complémentaire :

$$F^c = \{x / \sum_{i \in [1,p]} MetaUry_i(x) > 0\}$$

• On définit alors f_i pour $i \in [1, p]$ par $f_i(x) = \frac{g_i(x)f(x)}{\sum_{j=1}^{n} g_j(x)}$ si $x \in F^c$, et $f_i = 0$ sinon.

• On vérifie facilement que la famille ainsi construire convient.□

4.2 Approximation de fonctions continues

> **Théorème 102 (Théorème de Stone)** *On se donne K un compact, et A une sous-algèbre unitaire de l'algèbre $C^0(K, \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles sur $\mathbb{K}$, munie de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = sup_{x \in K}|f(x)|$.*
> *On suppose que A sépare les points de K, c'est à dire qu'étant donné x et y dans K il existe f dans A tel que $f(x) \neq f(y)$.*
> *Alors A est dense dans $C^0(K, \mathbb{R})$.*

Démonstration :

• On montre tout d'abord que $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0, 1]$ est dans l'adhérence de l'ensemble des polynômes, pour la norme $\|.\|_\infty$. Pour cela on considère le développement de $x \mapsto \sqrt{1-x}$; qui est bien défini sur $[0, 1[$. Le problème est le développement en 1. On observe alors que :

- On a $\sqrt{1-t} = 1 - \sum a_i.t^i$, avec les a_i positifs, pour $t \in [0, 1[$

- Et $\sum_{i \in [0,n]} a_i t^i$ est majoré par $1 - \sqrt{1-t}$, donc par 1, pour tout t ; en prolongeant par continuité, $\sum_{i \in [0,n]} a_i$ est majoré par 1. En passant à la limite pour $n \to +\infty$, $\sum_{i \in [0,n]} a_i$ est majoré par 1.

Le reste $\sum_{i \geq n} a_i.t^i$ est alors majoré par $\sum_{i \geq n} a_i$, qui tend vers 0 quand $n \to \infty$, indépendamment de t, donc...

Il ne reste plus qu'à composer par $t \mapsto 1 - t$ pour avoir le résultat désiré : $x \mapsto \sqrt{x}$ est approchable uniformément par des polynômes sur $[0, 1]$.

• Montrons maintenant que si f est dans A, alors $|f|$ est dans A. On se donne $racine_n(t)$ le n-ième polynôme d'une suite de polynômes tendant vers $\sqrt{t}$ sur $[0, 1]$. On suppose f comprise entre -1 et 1 (on peut se ramener à ce cas-là en divisant f

[3] $V_\epsilon(K)$, dit ϵ-voisinage de K, est l'ensemble des points situés à une distance $< \epsilon$ de K.

par une constante suffisamment grande - on utilise ici le fait que $\underline{A \text{ est unitaire}}$ (et donc contient les constantes)). Alors on constate que

$$racine_n(f.f) \to |f| \text{uniformément}$$

• On montre maintenant que si n fonctions $f_1, ..., f_n$ sont dans A, alors $max\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ (resp. $min\{f_1, f_2, ..., f_n\}$) est dans l'adhérence de A ; en effet on peut toujours exprimer le max (resp. le min) d'un ensemble fini de fonctions f_i par des sommes et différences finies des f_i et de $|f_i|$ (or $|f_i|$ est dans l'adhérence de A par le point ci-dessus).

• On montre maintenant qu'étant donnés deux points x et y distincts de $[0, 1]$ et deux réels X et Y, il existe une application f dans A telle que $f(x) = X$ et $f(y) = Y$... Cela est facile en rappelant que $\underline{A \text{ contient les constantes (puisqu'elle est unitaire)}}$ et que $\underline{A \text{ sépare les points}}$.

• On se donne maintenant une fonction f dans $C^0(K, \mathbb{R})$, $\epsilon > 0$ et x dans K. On cherche à montrer qu'il existe g dans A telle que $g(x) = f(x)$ et $g(t) < f(t) + \epsilon$ pour tout t dans $\mathbb{K}$.

Pour cela on considère, en utilisant le • démontré ci-dessus, pour tout t dans K une fonction f_t de A égale à f en x et inférieure à $x + \epsilon/2$ en t. On considère alors pout tout t dans K l'ouvert U_t surlequel f_t est inférieure à $f + \epsilon$; les U_t recouvrent K et on peut donc en extraire un recouvrement fini $U = \cup_{t \in E} U_t$, avec E fini. Il ne reste alors qu'à considérer la fonction min des fonctions f_t pour $t \in E$, et on a bien une fonction comme souhaitée.

• Maintenant on se donne une fonction f dans $C^0(K, \mathbb{R})$, et on cherche à montrer que l'on peut approcher f uniformément par des fonctions de A ; on aura ainsi conclu le théorème.

Pour cela, on se donne ϵ, et on associe à tout t dans K une fonction g_t égale à f en t, inférieure à $f + \epsilon$ (grâce au • ci-dessus). On peut alors associer à tout t un ouvert V_t tel que $g_t > f - \epsilon$ sur V_t. On peut alors prendre pour fonction g le max des g_t pour $t \in F$, avec F fini tel que l'union des V_t pour $t \in F$, et on a bien $f - g < \epsilon$.$\square$

Un corollaire important est la densité de l'ensemble des polynômes trigonométriques dans l'ensembles des fonctions 2Π-périodiques continues. Un autre corollaire est le suivant :

Corollaire 103 (Théorème de Weierstrass) *L'ensemble des polynômes sur un compact K de $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est dense dans l'ensemble des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, pour la norme uniforme $\|.\|_\infty$.*

<u>Démonstration :</u> C'est un corollaire immédiat du théorème de Stone ci-dessus.$\square$

Il existe une autre preuve du théorème de Weierstrass, basée sur des arguments de probabilité. En fait précisément, ce corollaire est aussi un corollaire du théorème ci-dessous.

Théorème 104 *Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.*
On définit $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$, n-ième **polynôme de Bernstein** *associé à f.*
Alors la suite B_n converge uniformément vers f.

<u>Démonstration :</u> On remarque que $B_n(x)$ est précisément l'espérance de $f(\frac{X}{n})$, avec X suivant une loi binomiale $B(n, x)$.

On utilise alors le **module de continuité** $w(f,\delta)$ par

$$w(f,\delta) = sup_{|x-y|<\delta}|f(x) - f(y)|$$

il est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$ car f est continue sur un compact.

Notons $M = sup|f|$.

Alors $|f(x) - B_n(x)| \leq$

$$w(f,\delta)P(|\frac{X}{n} - x| \leq \delta) + M\ P(\frac{X}{n} - x \geq \delta) + M\ P(\frac{X}{n} - x \leq -\delta)$$

$$\leq w(f,\delta) + 2M\ \frac{1}{n^2\delta^2}Var(X)$$

(grâce à l'inégalité de Tchebytchev **??**)

$$\leq w(f,\delta) + \frac{M}{2n\delta^2}$$

$$\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

D'où le résultat.$\square$

Attention ! Le théorème n'est valable que dans le cas des fonctions continues de $\underline{K \subset \mathbb{R}}$ dans $\underline{\mathbb{R}}$; par exemple si l'on considère l'ensemble des fonctions continues de $K \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on constate que l'on ne peut pas approcher $z \mapsto \overline{z}$ du disque unité fermé dans le disque unité fermé, car

$$\int_0^{2\Pi} f(e^{i\theta}).e^{i\theta}d\theta = 2\Pi$$

et donc si on suppose que la suite de polynômes P_n tend uniformément vers $z \mapsto \overline{z}$, la suite d'intégrales ci-dessous tend vers 2Π :

$$\int_0^{2\Pi} P_n(e^{i\theta}).e^{i\theta}d\theta$$

Or toutes les intégrales de cette suite sont nulles (considérer l'intégrale monôme par monôme pour s'en convaincre !).

Pour que tout s'arrange, il faudrait des polynômes en z ET $\overline{z}$.

Théorème 105 (Stone, version complexe) *On se donne A une sous-algèbre unitaire de l'ensemble des fonctions continues de K un compact à valeurs dans $\mathbb{C}$, stable par passage au conjugué et séparant les points de K.*
Alors A est dense dans $C(K,\mathbb{C})$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

<u>Démonstration :</u>

• $Re\ f = (f+\overline{f})/2$ et $Im\ f = (f-\overline{f})/2i$; or <u>A est stable par passage au conjugué</u>, donc les parties réelles et imaginaires de fonctions de A sont dans A.

• la sous-algèbre des fonctions réelles de A sépare les points. En effet, soit x et y distincts, il existe une fonction f qui sépare x et y ; soit la partie réelle de f les sépare, soit la partie imaginaire de f les sépare. Dans le premier cas on a bien ce qu'on veut (une fonction réelle de A qui les sépare), dans le deuxième cas on multiplie par i (on considère $i \times Im\ f$) et cette fonction les sépare.

• en appliquant le théorème dans le cas réel, on peut donc conclure en approchant séparément la partie réelle et la partie imaginaire.□

L'hypothèse sur la stabilité de A par passage au conjugué est indispensable ! En effet, on considère l'algèbre $\mathbb{C}[x]$, et l'application du disque unité fermé dans lui-même, définie par $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas holomorphe, et donc ne peut être dans l'adhérence de $\mathbb{C}[x]$ (rappel : une limite uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe).

FLEMMARD Elebeau n'y croit pas moi je crois que c'est ok

4.3 Approximation de fonctions mesurables

Théorème 106 (Lusin) *Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, dont le support est inclus dans E de mesure finie. Alors pour tout ϵ il existe g continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ telle que :*
• $\mu(\{x/f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$
• $sup|g(x)| \leq sup|f(x)|$

L'hypothèse "support inclus dans E de mesure finie" peut être oubliée. En effet, en résumé, on peut considérer les $g_i = f_{|U_i}$ pour i dans $\mathbb{N}$, avec U_i boule de centre 0 et de rayon i ; alors on peut "approcher" g_i par h_i égale à g_i sauf sur un ensemble de mesure $< \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$, et avec $\sup h_i \leq \sup g_i$. En "recollant" les h_i on arrive à une fonction proche de f.

<u>Démonstration :</u>

• On laisse de côté la fonction nulle.

• Premier cas : $0 \leq f \leq 1$ et E compact, $\sup\ f = 1$.

- Donnons nous $\epsilon > 0$

- f est limite croissante d'une série croissante de fonctions simples (s_n), égales à des fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables (E_n), comme expliqué pendant la preuve de la proposition 38.

- On considère R suffisamment grand pour que $E \subset B(0, R)$.

- Pour tout n on se donne K_n un compact et Ω_n un ouvert inclus dans $B(0, R)$ avec $K_n \subset E_n \subset \Omega_n \subset B(0, R)$, et $\mu(\Omega_n - K_n) < \epsilon.2^{-n}$ (possible grâce au théorème 14).

- Grâce au lemme d'Urysohn 98 ou 100, on se donne une fonction f_n telle que $\chi_{K_n} \leq f_n \leq \chi_{\Omega_n}$.

- Il ne reste plus qu'à sommer $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f_n}{2^n}$.

- g est continue, comme somme convergeant normalement d'une série de fonctions continues (proposition **??**).

- Sur le complémentaire de la réunion des $\Omega_n \setminus K_n$, $f = g$. Cette réunion est de mesure $\leq \epsilon$

- On a bien $|g| \leq \sup\ f$, puisque chaque f_n est majorée par 1.

D'où le résultat dans le cadre qu'on s'était donné, ie $0 \leq f < 1$ et E compact.

• Passons au cas d'une fonction f telle que $0 \leq f \leq 1$, sans hypothèse de compacité sur E.

- Donnons nous $\epsilon > 0$

- Il existe un compact K tel que la mesure de $E \setminus K$ soit inférieur à ϵ.

- On peut donc travailler sur la restriction de f à K pour construire g, et on a encore le résultat désiré.

• Passons maintenant au cas d'une fonction f bornée.

- En considérant f^+ et f^- [4], et en multipliant par une constante pertinente pour se ramener à des fonctions à valeurs dans $[0, 1]$, on a aussi le résultat désiré.

• On peut maintenant considérer le cas le plus général.

- Considérons $A_m = \{x \in \mathbb{R}^n / |f(x)| > m\}$. A_0 est de mesure finie ; on peut donc appliquer la proposition 15 pour conclure que la mesure des A_m tend vers 0 quand $m \to \infty$.

- On se donne donc m tel que $\mu(A_m) < \epsilon$.

- On peut donc appliquer le résultat partiel ci-dessus à la fonction $f.\chi_{A_m^c}$ (fonction produit de f par la fonction caractéristique du complémentaire de A_m, c'est à dire fonction égale à f sur le complémentaire de A_m et à 0 partout ailleurs).

D'où le résultat.$\square$

4.4 Approximation de fonctions mesurables bornées

Corollaire 107 *Soit f une application mesurable <u>bornée</u> de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, dont le support est inclus dans E de mesure finie. Alors f est limite simple presque partout d'une suite de fonctions g_n continues et bornées (par la même borne).*

FLEMMARD intérêt de l'hypothèse f bornée ?

<u>Démonstration :</u> Corollaire immédiat du théorème 106. Détaillons toutefois un peu :

• On peut se donner une suite (g_m) de fonctions continues telles que g_m soit bornées par la même borne que f et telles que g_m soit égale à f sauf sur un ensemble E_m de mesure au plus 2^{-m}, par le théorème 106.

• $\cap_{m \geq 0} \cup_{p \geq m} E_p$ est de mesure nulle (résultat facile à prouver directement, ou découlant facilement du premier lemme de Borel-Cantelli, voir partie **??**).

• On vient précisément d'écrire le résultat (si, si, regardez bien).$\square$

4.5 Dans les espaces C^k ou L^p

Pour connaitre la topologie usuelle sur $C^k(\mathbb{R}^n)$, on consultera la partie **??**.

[4] $f^+(x) = max(f(x), 0)$, $f^-(x) = max(-f(x), 0)$

4.5.1 Densité des fonctions C^k à support compact dans $C^k(\mathbb{R}^n)$

Théorème 108 *L'ensemble des fonctions $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à support compact est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

Démonstration : On se donne une fonction $bulbe$ C^∞ telle que $\chi_{\overline{B}(0,1)} \leq \chi_{\overline{B}(0,2)}$, grâce au lemme 100.

On définit $bulbe_n(x) = bulbe(x/n)$

Il est clair que quelle que soit la fonction f dans $C^k(\mathbb{R}^n)$, $f.bulbe_{n+1}$ est égale à f sur la boule de rayon n et de centre 0. Tout compact étant inclus dans une telle boule, la convergence est clairement uniforme sur tout compact de $f.bulbe_{n+1}$ vers f, et pareil avec toutes les dérivées.$\square$

4.5.2 Densité de l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

Théorème 109 *L'ensemble des fonctions continues à support compact de $L^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $p \neq \infty$.*

Démonstration : • Donnons-nous f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

• On va chercher une fonction continue g à support compact telle que $\|f - g\|_p < \epsilon$.

• C'est facile, il suffit d'appliquer le théorème 106.$\square$

D'une part L^p est complet, d'autre part l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans L^p. On en déduit donc que $L^p(\mathbb{R}^n)$ est le complété de l'ensemble des fonctions continues à support compact pour la norme distance associée à la distance L^p.

4.5.3 Densité de l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans $C^k(\mathbb{R}^n)$

Théorème 110 *Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$[a] est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n)$.*

[a]Ensemble des fonctions C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

• Grâce au théorème 108, il suffit de montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C_c^k(\mathbb{R}^n)$[5].

• Pour cela on fixe $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, f dans $C_c^k(\mathbb{R}^n)$.

• On va utiliser les fonctions ρ et ρ_ϵ définies dans le corollaire 82 et la proposition 81.

• On définit alors (f_m) l'application $f * \rho_{1/n}$. On va montrer que la suite f_m converge uniformément sur tout compact vers f, et qu'il en est de même des dérivées[6].

[5]Ensembles des fonctions C^k à support compact.

[6]Ce qui est caractéristique de la convergence pour la topologie usuelle de C^k, voir **??**.

• Calculons :

$$(f_m - f)(x) = \int (f(x-y) - f(x))\rho_{1/n}(y)d\mu(y)$$
$$= \epsilon^{-n} \int \rho(\frac{y}{\epsilon})(f(x-y) - f(x))dy$$
$$= \int \rho(z)(f(x-\epsilon.z) - f(x))dz \tag{4.1}$$

(avec le changement de variable $z = y/\epsilon$)

• f étant continue à support compact, elle est uniformément continue (voir théorème **??**).

• Donc la quantité 4.1 tend vers 0, l'intégrale de ρ étant bornée, uniformément en x.

• On en déduit que $f_m \to f$ uniformément.

• Pour généraliser au cas des dérivées de f_m et de f, et pour justifier que f_m est bien C^∞, il suffit d'appliquer le théorème 79.□

4.5.4 Densité de l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

Théorème 111 *L'ensemble des fonctions C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^n$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $p < \infty$.*

Démonstration :

• En vertu du théorème 109, il suffit de montrer que l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dense dans $L^p_c(\mathbb{R}^n)$[7]$\cap C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, pour $p < \infty$.

• On se donne donc une fonction f dans $L^p_c(\mathbb{R}^n)$, pour $p < \infty$.

• On va utiliser les fonctions ρ et ρ_ϵ définies dans le corollaire 82 et la proposition 81.

• On définit alors (f_m) l'application $f * \rho_{1/n}$.

• On pose maintenant q tel que $1/p + 1/q = 1$, le conjugué de p.

• Il ne reste plus qu'à calculer :

$$|(f_m - f)(x)|$$
$$\leq \int \rho(z)|f(x - z/n) - f(x)|d\mu(z)$$
$$\leq \int \rho(z)^{1/q}\rho(z)^{1/p}|f(x - z/n) - f(x)|d\mu(z)$$
$$\leq (\int (\rho(z)^{1/q})^q)d\mu(z))^{1/q}(\int (\rho(z)^{1/p})|f(x - z/n) - f(x)|)^p d\mu(z))^{1/p}$$

par l'inégalité de Hölder (théorème 85)

$$\leq (\int \rho(z)d\mu(z))^{1/q}(\int \rho(z)|f(x - z/n) - f(x)|^p d\mu(z))^{1/p}$$

[7] Ensemble des fonctions de L^p à support compact.

• On déduit du calcul précédent, puisque $\int \rho = 1$ par la proposition 81 :

$$N^p(f_m - f)^p \leq \int (\int \rho(z)|f(x - z/n) - f(x)|^p d\mu(z))d\mu(x)$$
$$\leq \int \rho(z) \int |f(x - z/n) - f(x)|^p d\mu(x)d\mu(z)$$

(par le théorème de Fubini 65)

$$\leq \int \rho(z) \underbrace{\|f(. - z/n) - f(.)\|_p^p}_{\to 0 \text{ (justifié ci-dessous)}} d\mu(z)$$

$$\to 0$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue 89, puisqu'on a convergence simple vers 0, et convergence dominée par $z \mapsto \rho(z)2^p\|f\|_p$ qui est bien une fonction L^1.

• Le fait qu'étant donné z, $\|f(. - z/n) - f(.)\|_p \to 0$ est clair dans le cas où f est continue, puisqu'alors f est uniformément continue, et qu'on intègre $f(. - z/n) - f(.)$ sur un domaine borné (à z donné).

• Sinon f s'exprime de toute façon comme limite dans L^p de fonctions continues à support compact (par le théorème 109) ; donc il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire.□

4.6 Autre approche, dans les espaces L^p

On donne ici des résultats de densité dans les espaces L^p. Comme signalé dans le chapitre Fourier, $L_1 \cap L_2$ est dense dans L_2, ce qui a de grandes applications (prolongement de la transformée de Fourier).

4.6.1 Approximation dans L^1 par des fonctions semi-continues

Théorème 112 (Vitali-Carathéodory) *Soit f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors pour tout ϵ il existe s semi-continue supérieurement et i semi-continue inférieurement, avec s majorée et i minorée, telles que*

$$s \leq f \leq i$$

et

$$\int (i - s)d\mu < \epsilon$$

Démonstration : • On se ramène à f positive en considérant $f = f^+ - f^-$, avec f^+ et f^- des applications positives.
• Ensuite on écrit f comme limite d'une suite s_n de fonctions simples
• On écrit alors f comme limite d'une série de fonctions $f_n = s_n - s_{n-1}$
• f_n étant une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, on peut écrire $f(x) =$

$\sum_{i \in I} \lambda_i \chi_{E_i}(x)$
• f étant dans L^1, on a $\int f d\mu = \sum_{i \in I} \lambda_i \mu(E_i)$.
• De par les propriétés de la mesure de Lebesgue, E_i est compris entre K_i et U_i, avec $\mu(U_i \setminus K_i) \leq \epsilon/2^i$.
• Il ne reste plus qu'à sommer les $\lambda_i.\chi_{U_i}$ pour déterminer i, et un nombre fini suffisamment grand de $\lambda_i.\chi_{K_i}$ pour déterminer s.$\square$

4.6.2 Approximation dans L^p pour $p < \infty$ par des fonctions en escalier à support compact

Définition 113 *Une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite* **en escalier** *si c'est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques d'intervalles de $\mathbb{R}$. Une application à valeurs dans un espace vectoriel F est dite* **en escalier** *si c'est une combinaison linéaire finie d'applications $f.\overrightarrow{x}$ avec f fonction caractéristique et $\overrightarrow{x}$ un élément de F.*

Théorème 114 *Les classes des fonctions en escalier à support compact constituent un sous-espace vectoriel dense de $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p \in [1, +\infty[$.*

Démonstration : • Il est clair qu'il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel .
• L'adhérence de ce sous-espace vectoriel contient les fonctions caractéristiques d'ouverts de mesure finie. En effet soit U un ouvert de mesure finie, $U = \cup_{i \in J} I_i$ avec J au plus dénombrable (par exemple $U = \cup_{i \in \mathbb{N}} U \cap B(0, i)$), avec les I_i des ouverts bornés, et donc $f_n = \sup_{i \in [1,n]} \chi_{I_i}$ est majorée par χ_U, converge simplement vers χ_U, et donc converge vers χ_U pour la norme de L^p par le théorème 89.
• L'adhérence de ce sous-espace vectoriel contient aussi les fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables de mesure finie, comme on s'en convaincra aisément en consultant le théorème 14, montrant que la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable est limite de fonctions caractéristiques d'ouverts.
• L'adhérence de ce sous-espace vectoriel contient aussi les fonctions simples. En effet ces fonctions sont des combinaisons linéaires des fonctions précédentes.
• L'adhérence de ce sous-espace vectoriel contient enfin toutes les fonctions intégrables positives, puisque celles-ci sont limites de suites de fonctions simples (voir la proposition 38) et que le théorème 89 garantit la convergence dans L^p, et donc toutes les fonctions intégrables négatives, et donc toutes les fonctions intégrables. $\square$

4.6.3 Approximation dans L^p pour $p < \infty$ par des fonctions C^∞ à support compact

Théorème 115 *Pour $1 \leq p < +\infty$ ($p \neq +\infty$), les classes des fonctions indéfiniment dérivables à support compact constituent un sous-espace vectoriel dense de $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration : Par le théorème précédent, il suffit d'approcher la fonction caractéristique d'un ouvert borné par des fonctions C^∞ à support compact.

Pour cela on utilise une propriété fondamentale de la mesure de Lebesgue, qui est le fait qu'un ensemble mesurable est compris, pour tout $\epsilon > 0$, entre un compact K et un ouvert U tels que $\mu(U \setminus K) < \epsilon$.

Il ne reste plus qu'à trouver une fonction θ C^∞, telle que

$$\chi_K \leq \theta \leq \chi_U$$

Construire une telle fonction est précisément l'objet d'une variante du lemme d'Urysohn, voir lemme 100.$\square$

4.6.4 Approximation de fonctions tendant vers 0 en $\pm\infty$ dans L^∞ par des fonctions C^∞ à support compact

Théorème 116 *L'espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact est dense dans le sous-espace vectoriel de L^∞ des fonctions bornées tendant vers 0 en $\pm\infty$.*

Démonstration : Laissée au lecteur.$\square$

Chapitre 5

Fourier

Il est nécéssaire pour bien faire d'avoir lu la partie?? et la partie3.

5.1 Séries trigonométriques

Définition 117 *Une fonction f est dite T-***périodique** *si pour tout x $f(x+T) = f(x)$.*
Pour p fini on note $\mathfrak{L}^p$ l'espace $L^P_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ [a] pour la mesure de Lebesgue, mais avec une norme divisée par 2π, c'est à dire que $\|f\| = (\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p.dx)^{\frac{1}{p}}$.
On note $\mathfrak{L}^\infty$ l'espace $L^\infty_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ pour la mesure de Lebesgue.
On appelle **polynôme trigonométrique** *une application de la forme $t \mapsto a_0 + \sum_{i=1}^N a_i.cos(i.t) + b_i.sin(i.t)$, pour $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$.*
Le produit scalaire hermitien usuel sur $\mathfrak{L}^2$ est l'application $(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}.g(t).dt$. Il s'agit bien d'un produit scalaire hermitien.
On note u_n l'application $t \mapsto e^{int}$, pour $n \in \mathbb{Z}$. Nous verrons plus loin qu'il s'agit d'une base hilbertienne de $\mathfrak{L}^2$.

[a] attention, ne pas confondre $\mathfrak{L}^p$ et $\mathcal{L}^p$, ce dernier désignant l'ensemble des fonctions dont la puissance p-ième est intégrable, AVANT de quotienter pour la relation d'égalité presque partout - par passage au quotient on obtient L^p, et en spécialisant aux fonctions définies sur $[-\pi, \pi]$ on obtient $\mathfrak{L}^p$.

Remarques 118 • *On identifiera par la suite (sans préavis !) une fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ à une fonction périodique de période 2π. A part dans les cas où la continuité est importante, on se préoccupera peu du problème de définition en π, puisque l'on travaillera généralement sur des propriétés vraies presque partout pour la mesure de Lebesgue.*

• *Il y a une renormalisation (la division par 2π pour la mesure de Lebesgue) pour p fini et pas pour p infini ; cela ne serait pas le cas si l'on raisonnait sur $[0, 1]$ au lieu de $[-\pi, \pi]$.*

• *On peut réécrire un polynône trigonométrique sous la forme $t \mapsto \sum_{i=-N}^{N} c_n.e^{int}$, avec $N \in \mathbb{N}$ et $c_i \in \mathbb{C}$ (et réciproquement, une telle fonction est toujours un polynôme trigonométrique).*

• *Un polynône trigonométrique est 2π-périodique.*

Théorème 119 *La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathfrak{L}^2$.*

Démonstration : • Il est clair qu'il s'agit d'une famille orthonormale.

• Il suffit d'appliquer 4.6.3 et de montrer que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$ (on utilise la densité de $C^0([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}^2$). Pour cela, on procède comme suit :

- on considère f une fonction continue de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$

- on définit $P_n(t) = \frac{(\frac{1+cos(t)}{2})^n}{\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1+cos(t)}{2})^n.dt}$

On constate (grâce à la linéarisation) que P_n est un polynôme trigonométrique positif, d'intégrale 1, convergeant uniformément vers 0 sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, +\pi]$ pour tout $\delta \in]0, \pi[$. Intuitivement, P_n tend vers une fonction comportant une pointe en 0 et nulle partout ailleurs.

- on définit $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(x-t).dx$. En remarquant que le translaté d'un polynôme trigonométrique est un polynôme trigonométrique, on montre que f_n est un polynôme trigonométrique.

- on montre alors que la norme infinie de $f_n - f$ tend vers 0, et donc la norme 2 aussi puisque $[-\pi, \pi]$ est de mesure finie (oui, je passe sous silence le calcul, désolé...).$\square$

5.2 Séries de Fourier d'une fonction périodique

Pour étudier une fonction périodique, on se ramène au cas d'une période 2π, et on la considère définie sur $[-\pi, \pi]$.

Définition 120 *Soit f dans $\mathfrak{L}^1$. Alors on définit les* **coefficients de Fourier de** *f pour $n \in \mathbb{Z}$ par*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i.n.t}.f(t).dt$$

On appelle **noyau de Dirichlet d'ordre** *n l'application $x \mapsto \sum_{i=-n}^{n} u_i(x)$.*
On le note D_n.
On appelle **noyau de Féjer d'ordre** *n l'application*

$$x \mapsto \frac{\sum i = 0^{n-1} D_i}{n}$$

On le note K_n.
On note $s_n(f)$ et on appelle **somme de Fourier d'ordre** *n la somme $\sum_{i=-n}^{n} \hat{f}(n) u_n$.*
On note $\sigma_n(f)$ et on appelle **somme de Féjer d'ordre** *n la somme $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} s_i}{n}$.*
On appelle **série de Fourier** *associée à f la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n).e^{i.n.t}$$

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_n = 1$ si $n = 0$ et 0 sinon, ce qui implique que pour tout $n \geq 0$ on a $\frac{1}{2\pi} D_n = 1$ et pour tout $n \geq 1$ on a $\frac{1}{2\pi} K_n = 1$.

On a $s_n(f) = \frac{1}{2\pi} D_n * f$ et $\sigma_n(f) = \frac{1}{2\pi} K_n * f$ (avec par définition $(g * f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) f(x-t) dt$, produit de convolution) ce qui justifie le terme de noyau.

Bien noter le signe "-" dans l'exponentielle de la formule.
On remarque que si $f \in \mathfrak{L}^2$, alors $f \in \mathfrak{L}^1$, et $\hat{f}(n) = (u_n, f)$.

Proposition 121 *On a isomorphisme isométrique entre $\mathcal{L}^2$ et $l^2(\mathbb{Z})$, donné par $f \mapsto \hat{f}$.*

<u>Démonstration :</u> C'est simplement une reformulation du théorème **??**. □

Proposition 122 *Toute fonction f dans $\mathcal{L}^2$ est somme de sa série de Fourier pour $\mathcal{L}^2$ (c'est à dire que la série de Fourier de f tend vers f pour la norme 2 et pour f dans $\mathcal{L}^2$).*

<u>Démonstration :</u> C'est simplement une reformulation de la relation de Parseval (théorème **??**).□

Il n'y a pas convergence simple de la série de Fourier vers f, même si f est continue ! $\square$

Un problème majeur va être de montrer des résultats similaires dans $\mathcal{L}^1$.

Proposition 123

$$D_n(x) = \frac{sin((n+1/2)x)}{sin(x/2)}$$

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{sin(nx/2)}{sin(x/2)}\right)^2$$

<u>**Démonstration :**</u>

Si x n'est pas multiple de 2π, alors

$$D_n(x) = u_{-n}(x)\sum_{k=0}^{2n} u_k(x)$$

$$= u_{-n}(x)\frac{(e^{ix})^{2n+1}-1}{e^{ix}-1}$$

$$= \frac{e^{ix(n+1/2)}}{e^{ix/2}}\frac{e^{ix(n+1/2)}-e^{-ixn+1/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}$$

$$= \frac{sin((n+1/2)x)}{sin(x/2)}$$

D'où le résultat sur D_n (si x est multiple de 2π, $D_n(x) = 2n+1$, qui est l'unique prolongement par continuité de $\frac{sin(n+\frac{1}{2}x)}{sin(x/2)}$).

Toujours pour x non multiple de 2π,

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{sin((k+1/2)x)}{sin(x/2)}$$

$$= \frac{1}{nsin(x/2)}Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1/2)x}\right)$$

$$= \frac{1}{nsin(x/2)}Im\left(e^{ix/2}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\right)$$

$$= \frac{sin(nx/2)^2}{nsin(x/2)^2}$$

D'où le résultat. $\square$

Deux résultats distincts, prouvés de manières similaires :

Théorème 124 (Théorème de Fejer) • *Soit f périodique continue de période 2π. Alors pour tout n $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|\sigma_n(f)-f\|_\infty \to 0$ pour $n \to \infty$.*
• *Soit $f \in \mathfrak{L}^p$, avec $p \in [1, \infty[$[a]. Alors pour tout n $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$ pour $n \to \infty$.*

[a] Bien noter que ∞ est exclus !

Démonstration : Cette preuve est détaillée dans le livre [22, p81]. Elle utilise à la fois l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini, et le dernier résultat donné sur le noyau de Féjer.□

Un autre résultat, de convergence ponctuelle ce coup-ci :

Théorème 125 (Théorème de Dirichlet) *Si f est L^1 et si f admet une* pseudo-dérivée *à droite et à gauche en x, alors*

$$\sigma_n(f)(x) \to \frac{1}{2}(lim_{t\to x, t<x} f(t) + lim_{t \to x, t>x} f(t))$$

⚠ *Il ne s'agit pas nécéssairement de dérivées à gauche ou à droite, on peut se contenter d'avoir f dans L^1, et admettant en x une limite à gauche et à droite $f_-(x)$ et $f_+(x)$; alors les "pseudo-dérivées" à gauche et à droite sont*

$$f'_g(x) = lim_{t \to x, t<x} \frac{f(t) - f_-(x)}{t - x}$$

$$f'_d(x) = lim_{t \to x, t>x} \frac{f(t) - f_+(x)}{t - x}$$

Démonstration : On renvoie à [15] pour une preuve très claire.□

5.3 Transformation de Fourier

Définition 126 *On se donne f dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, et on note pour x dans $\mathbb{R}$*

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).e^{-i.x.t}.dt$$

$\hat{f}$ est appelée **transformée de Fourier** *de f (plus précisément il s'agit de la* **transformée de Fourier** *L^1 de f).*
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $x \in \mathbb{C}$ tels que $|x| = 1$.

Si f est dans L^1, alors $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.

Proposition 127 (Quelques propriétés de la transformée de Fourier) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.*
• *Avec $g : x \mapsto f(x)e^{i\lambda x}$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\lambda)$.*
• *Avec $g : x \mapsto f(x-\lambda)$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\lambda t}$.*
• *Si g est L^1 et si $h = f * g$, alors $\hat{h}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.*

Démonstration : Les deux premiers • sont clairs. Le troisième découle immédiatement du théorème de Fubini 65.□

Les deux théorèmes suivants, fondamentaux, ne seront pas prouvés ici. Ils sont ardus, et prouvés rigoureusement dans [16].

Théorème 128 (Théorème d'inversion) *Si f et $\hat{f}$ appartiennent tous deux à L^1, alors*

$$g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{ixt}dt$$

est continue, tend vers 0 en $+\infty$ ou $-\infty$ et est égale à f presque partout

Théorème 129 (Théorème de Plancherel) *La transformation de Fourier s'étend en une* **transformation de Fourier** *L^2, définie comme l'unique application $f \mapsto \hat{f}$ de L^2 dans L^2 telle que :*
• *elle coïncide avec la transformée de Fourier L^1 sur $L^1 \cap L^2$*
• *c'est une isométrie de L^2 dans L^2*
Elle vérifie en outre :
• *c'est un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre L^2 et L^2*
• *Théorème d'inversion L^2 :*

$$lim_{M\to\infty} \|f_A - \hat{f}\|_2 = 0$$

avec

$$f_M(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} f(x)e^{-ixt}dx$$

et

$$lim_{M\to\infty} \|\hat{f}_M - f\|_2 = 0$$

avec

$$\hat{f}_M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} f(t)e^{-ixt}dt$$

on peut aussi écrire que l'application de $L^1 \cap L^2$ dans $L^1 \cap L^2$ qui à f associe $\tilde{f}$ avec $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)exp(ixt)dt$ s'étend en une isométrie de L^2 dans L^2, et $f \mapsto \tilde{f}$ est l'inverse de $f \mapsto \hat{f}$ au sens où pour toute f L^2 $\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}} = f$ presque partout.

5.4 Applications des séries de Fourier

5.4.1 Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Proposition 130

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$$

Démonstration :

On applique simplement la formule de Parseval (théorème **??**) à la transformée de Fourier de l'application identité de $[-\pi, \pi[$ dans lui-même.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, définissons

$$c_k = 2\pi \hat{f}(k)$$
$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} x e^{ikx} dx$$
$$c_0 = 0 \text{c'est à dire} \hat{f}(0) = 0$$
$$k \neq 0 \Rightarrow c_k = [\frac{xe^{ikx}}{ik}]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx$$
$$= \frac{2\pi(-1)^k}{ik}$$

donc pour $k \neq 0$ $\hat{f}(k) = (-1)^k/(ik)$.

Donc par la formule de Parseval :

$$(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \sum_{k<0} 1/k^2 + \sum_{k>0} 1/k^2$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 2/k^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \pi^2/3$$

Et $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6.\square$

Exemple Maple
$> Sum(1/k\hat{}\,2, k = 1..infinity)$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$
$> value(\%)$
$$\frac{1}{6}\pi^2$$

5.4.2 Exemple de développement en série de Fourier : fonction créneau, fonction identité par morceaux

Exemple Maple
$> restart; fourierc := (f,n)-> (int(f(t)*cos(n*t), t = -Pi..Pi)); fouriers := (f,n)-> (int(f(t)*sin(n*t), t = -Pi..Pi));$
$$fourierc := (f,\,n) \to \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(n\,t)\,dt$$ $$fouriers := (f,\,n) \to \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(n\,t)\,dt$$
$> serie\_fourier := (f,n)-> sum(fouriers(f,k)*sin(k*t), k = 1..n) + sum(fourierc(f,k)*cos(k*t), k = 1..n) + fourierc(f,0)/2;$
$$serie\_fourier :=$$ $$(f,\,n) \to (\sum_{k=1}^{n} \mathrm{fouriers}(f,\,k)\sin(k\,t)) + (\sum_{k=1}^{n} \mathrm{fourierc}(f,\,k)\cos(k\,t))$$
$> p := array(0..5); for\ i\ from\ 1\ by\ 2\ to\ 9\ do\ p[(i-1)/2] := serie\_fourier(Heaviside, i) od; p[5] := Heaviside(t);$
$> plot(p, t = -Pi..Pi, title =$ "$Approximations\ d'une\ fonction\ creneau\ par\ seriesde\ Fourier$"$);$
$> q := array(0..5); for\ i\ from\ 1\ by\ 2\ to\ 9\ do\ q[(i-1)/2] := serie\_fourier(x-> x, i) od;$
$> plot(q, t = -Pi..Pi, title =$ "$Approximations\ d'une\ fonction\ lineaire\ par\ morceaux\ par\ series\ de\ Fourier$"$);$

Il faut bien noter que les coefficients de Fourier étant calculée simplement en fonction de la période $[-\pi, \pi]$, on ne se préoccupe que de la valeur de la fonction sur ces valeurs, d'où la simple définition $x- > x$ ou $Heaviside$, où je ne me préoccupe pas de périodiciser la fonction.

Bibliographie

[1] P. Barbe, M. Ledoux, *Probabilité*, Belin, 1998.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[3] H. Cartan, *Calcul différentiel*, FLEMMARD.

[4] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, Masson, 1997.

[5] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, Masson, 1995.

[6] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, Masson, 1996.

[7] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

[8] F. Combes *Algèbre et géométrie*, Bréal, 1998. <

[9] J.-P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

[10] W. Giorgi, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, Masson, 1998.

[11] A. Gramain, *Intégration*, Hermann 1988, Paris.

[12] J.-L. Krivine, *Introduction to axiomatic set theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland.

[13] S. Lang, *Real analysis*, Addison-Wesley Publishing company, 1969.

[14] D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses 1996.

[15] A. Pommellet, *Cours d'analyse*, Ellipses 1994.

[16] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson 1992.

[17] R. Smullyan, *Théorie de la récursion pour la métamathématique*, FLEMMARD.

[18] Y.G. Sinai *Probability theory - An introduction course*, Springer Textbook, 1992.

[19] P. Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, Masson, 1997.

[20] J. Vauthier, J.J. Prat, *Cours d'analyse mathématiques de l'intégration*, Masson, 1994.

[21] D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991.

[22] C. Zuily, H. Queffélec, *Eléments d'analyse pour l'intégration*, Masson, 1995.