Les Mathématiques pour l'Agrégation

C. Antonini
J.-F. Quint
P. Borgnat
J. Bérard
E. Lebeau
E. Souche
A. Chateau
O. Teytaud

14 février 2002

Table des matières

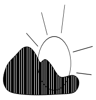
Chapitre 1

Notations et définitions usuelles

$A \wedge B$ note la conjonction logique ; $A \wedge B$ si et seulement si A et B.
$A \vee B$ note la disjonction logique ; $A \vee B$ si et seulement si A ou B.
$A \rightarrow B$ signifie que A implique B.
$A \iff B$ signifie que A et B sont logiquement équivalents, c'est à dire que si on a A, on a nécessairement B.
Une relation sur E est un sous-ensemble de $E \times E$.
$x \in A$ signifie que x est un élément de l'ensemble A.
$A \subset B$ signifie que l'ensemble A est inclus dans (éventuellement égal à) B.
Une suite est dite **presque nulle** si elle est nulle sauf pour un nombre fini de valeurs de l'index.
Une relation $\mathcal{R}$ est dite **réflexive** si pour tout x $x\mathcal{R}x$.
Une relation $\mathcal{R}$ est dite **symétrique** si pour tout x et tout y $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $y\mathcal{R}x$.
Une relation $\mathcal{R}$ est dite **antisymétrique** si pour tout x et tout y $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \rightarrow x = y$.
Une relation $\mathcal{R}$ est dite **transitive** si pour tout x, tout y et tout z, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \rightarrow x\mathcal{R}z$.
Une relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive.
Une relation $\mathcal{R}(x, y)$ est une **fonction** $\mathcal{R}$ est telle que pour tout x il existe au plus un y tel que $\mathcal{R}(x, y)$. C'est une **application** de A dans B si elle est incluse dans $A \times B$ et si pour tout x il existe un et un seul y dans B tel que $\mathcal{R}(x, y)$.
Etant donnée une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E, la **classe d'équivalence** de $x \in E$ est l'ensemble des y tels que $x\mathcal{R}y$. L'ensemble des classes d'équivalence réalise une partition de E.
Etant donné un ordre, on appelle **segment** d'extrémités a et b l'ensemble des x tels que $a \leq x \leq b \vee b \leq x \leq a$.
On note $liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n$ la valeur $sup_{n \rightarrow +\infty} inf_{k \geq n} x_n$.
On note de même $limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n$ la valeur $inf_{n \rightarrow +\infty} sup_{k \geq n} x_n$.
Etant donnés deux ensembles E et F avec $E \subset F$ on note χ_E ou 1_E et on appelle **fonction caractéristique de** E la fonction qui à x dans F associe 1 si $x \in E$ et 0 sinon.
On définit $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. Cette notation est appelée **fonction delta de Kronecker**.
On appelle **support** d'une fonction l'adhérence de l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$.

 signifie "Attention !"

 signifie "Application" (sert à convaincre du fait (réel !) que les mathématiques servent à quelque chose !)

 signifie "Pour y voir plus clair".

 signifie "Remarque".

Chapitre 2

Ensembles ordonnés

Définition 1 *Soit E un ensemble. Un* **ordre** *(partiel) sur E est une relation $\leq$ telle que pour tout $(x, y, z) \in E^3$:*
• $x \leq x$
• $(x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y$
• $(x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z$
Ces trois propriétés sont respectivement la **réflexivité**, *la* **symétrie** *et la* **transitivité**.

E équipé d'un tel ordre est appelé «ensemble partiellement ordonné».

Un ordre $\leq$ donne naissance à une relation d'inégalité stricte $<$ par : $x < y \iff (x \leq y \wedge x \neq y$.

On définit aussi :
• $x \geq y \iff y \leq x$
• $x \not\leq y \iff \neg(x \leq y)$
• $x \parallel y \iff x \not\leq y \wedge y \not\leq x$ (x et y ne sont pas comparables)

Soit F un sous-ensemble de E, E étant muni d'un ordre partiel $\leq_E$; on définit l'ordre partiel $\leq_E$ **induit** sur F par $x \leq_F y \iff x \leq_E y$.

Définition 2 *Un ensemble E muni d'un ordre partiel E est dit* **totalement ordonné** *si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2 x \leq y \vee y \leq x$. Un ensemble totalement ordonné est aussi appelé une* **chaîne**. *Un ensemble tel que $x \leq y \rightarrow x = y$ est appelé une* **antichaîne**.

Définition 3 *Une chaîne C est dîte maximale si et seulement si quel que soit l'élément x, l'ensemble $C \cup \{x\}$ n'est pas une chaîne.*
Une antichaîne C est dîte maximale si et seulement si quel que soit l'élément x, l'ensemble $C \cup \{x\}$ n'est pas une antichaîne.

On note n la chaîne $[0, n[$.
Dans la suite du texte $\leq$ désigne une relation d'ordre partiel.

Définition 4 *Etant donné $\leq$, on définit la* **relation de couverture** $\prec$ *par $x \prec y$ (y couvre x ou x est couvert par y) si et seulement si $x < y \wedge \forall z(x \leq z < y \rightarrow z = x)$. Ceci signifie qu'il n'y a pas de z tel que $x < y < z$.*

Si E est fini, la relation de couverture détermine la relation d'ordre partiel (et réciproquement).

Définition 5 *On définit maintenant le* **diagramme de Hasse** *pour un ensemble fini partiellement ordonné. A chaque élément de E on associe un point du plan, et on trace une ligne de x à y si $x \prec y$. On veille à ce que ces lignes n'intersectent pas les autres points, et on veille à ce que $x \prec y$ implique que l'ordonnée du point associé à x soit inférieure à l'ordonnée du point associé à y.*

Définition 6 *Une application $\phi : E \rightarrow F$ est dîte :*
• **monotone** *si $x \leq y \rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$.*
• *un* **morphisme** *si $x \leq y \iff \phi(x) \leq \phi(y)$.*
• *un* **isomorphisme d'ordre** *si c'est un morphisme bijectif.*

Quand ϕ est un morphisme, on écrit $\phi : E \hookrightarrow F$.
Quand ϕ est un isomorphisme on écrit $E \cong F$; E et F sont isomorphes.

Proposition 7 *Soit ϕ bijective de E dans F : alors les trois énoncés suivants sont équivalents :*
• *ϕ est un isomorphisme d'ordre*
• *$x < y$ dans E si et seulement si $\phi(x) < \phi(y)$ dans F*
• *$x \prec y$ dans P si et seulement si $\phi(x) \prec \phi(y)$*

Deux ensembles finis ordonnés sont isomorphes si et seulement si ils ont un diagramme de Hasse commun.

Définition 8 *Le* **dual** *d'un ensemble ordonné est le même ensemble mais muni de l'ordre $\leq^\delta$ tel que $x \leq^\delta y$ si et seulement si $y \leq x$. Le dual d'un énoncé ψ et l'énoncé ψ^δ obtenu en remplaçant $\leq$ par $\geq$ et réciproquement.*
Un énoncé est vrai pour tous les ensembles ordonnés si et seulement si son dual est vrai pour tous les ensembles ordonées.

Définition 9 *Soit F sous-ensemble de E tel que $F \subset E$, avec E ordonné. F est un* **idéal d'ordre** *si et seulement si $x \in F \wedge y \leq x \rightarrow y \in F$. F est un* **filtre d'ordre** *si et seulement si $(x \in F \wedge x \leq y) \rightarrow y \in F$.*
F est un filtre d'ordre si et seulement si le complémentaire de F est un idéal d'ordre.

On définit $\downarrow F$ par l'ensemble des x tel que pour un certain y dans F on a $x \leq y$. Par définition $\downarrow x$ est égal à $\downarrow x$. $\downarrow F$ se lit «section initiale engendrée par F».
On définit $\uparrow F$ par l'ensemble des x tel que pour un certain y dans F on a $y \leq x$. Par définition $\uparrow x$ est égal à $\uparrow x$. $\uparrow F$ se lit «section initiale engendrée par F».
$\downarrow F$ est donc le plus petit idéal d'ordre contenant F, et $\uparrow F$ est le plus petit filtre d'ordre contenant F.
On note $O(E)$ l'ensemble des idéaux d'ordre de l'ensemble ordonné E ; il est lui-même ordonné.

Les trois énoncés suivants sont équivalents :
• $x \leq y$
• $\downarrow x \subset \downarrow y$
• $(\forall F \in O(E)) y \in F \rightarrow x \in F$

Définition 10 *x est* **maximal** *si et seulement si $x \leq y \rightarrow x = y$*
x est le **maximum** *de E si et seulement si pour tout y on a $y \leq x$. On écrit $x = maxQ$.*
Les notions de **minimal** *et d'***élément minimum** *sont définies de manière duale, en renversant l'ordre.*
L'élément maximum d'un ensemble est généralement noté $\top$, et l'élément minimum est généralement noté $\perp$.

Lorsque l'ensemble est fini, l'ensemble des éléments maximaux et l'ensemble des éléments minimaux sont des anti-chaînes maximales.
Lorsqu'une chaîne $\{x_1 < x_2 < ... < x_n\}$ est maximale, alors $\forall i \; x_i \prec x_{i+1}$.

Définition 11 *On appelle généralement :*
• **graphe de la relation** *le graphe dans lequel on supprime les réflexivités.*
• **graphe de compatibilité** *l'ensemble des (x, y) avec x comparable à y.*
• **graphe de Hasse** *(ne pas confondre avec diagramme de Hasse) l'ensemble des (x, y) tels que $x \prec y$.*
• **graphe de couverture** *l'ensemble des x, y tels que $x \prec y$ ou $y \prec x$.*

On note dans la suite $E_\perp$ l'ensemble ordonné constitué de l'ensemble E auquel on ajoute une constante $\perp$ inférieure à tous les éléments de E. S'il y avait une relation d'ordre sur E, la relation sur $E_\perp$ contient cette relation. S'il n'y en avait pas, on obtient ce que l'on appelle un ordre plat.

Définition 12 *L'***union disjointe** $E\dot{\cup}F$ *de deux ensembles ordonnés disjoints E et F est l'ensemble union de E et F avec $x \leq_{E\dot{\cup}F} y \iff (x \leq_E y \vee x \leq_F y)$.*
La **somme linéaire** $E \oplus F$ *de deux ensembles ordonnés disjoints E et F est l'ensemble réunion de E et F muni de la relation $x \leq_{E\oplus F} \iff (x \leq_E y \vee x \leq_F y \vee (x \in E \wedge y \in F))$.*
On note $P \oplus_\perp Q$ la **somme séparée** *de P et Q, égale à $(P\dot{\cup}Q)_\perp$.*
On note $P \oplus_\vee Q$ la **somme coalescente** *de P et Q, obtenue en considérant $P\dot{\cup}Q$ et en identifiant les deux éléments $\perp$.*
Le **produit** *de $P_1, ..., P_n$ est défini sur l'ensemble produit cartésien par $(x_1, ..., x_n) \leq_{P_1\times P_2\times ...\times Pn} (y_1, ..., y_n) \iff \forall i\ x_i \leq_{P_i} y_i$.*

Soit $X = \{1, 2, ..., n\}$, et soit $\phi : P(X) \to \{0, 1\}^n$ défini par $\phi(A) = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ avec $\epsilon_i = 1$ si $i \in A$ et $\epsilon_i = 0$ sinon. Alors ϕ est un isomorphisme d'ordre.

L'ensemble Y^X des applications d'un ensemble X vers un ensemble ordonné Y sont naturellement ordonnées par $f \leq g \iff \forall x\ f(x) \leq g(x)$. Si X est lui-même ordonné, on peut considérer simplement l'ensemble des applications monotones, que l'on note $Y^{<X>}$.
On peut aussi considérer des fonctions au lieu de considérer des applications ; on considère alors que $f \leq g$ si et seulement si pour tout élément x du domaine de définition de f on a $f(x) \leq g(x)$.
Pour ordonner l'ensemble des fonctions de X dans Y on ajoute un élément $\perp$ dans Y inférieur à tous les éléments, et en remplaçant une fonction par l'application qui lui est égale sur son domaine de définition et qui est égale à $\perp$ en dehors de ce domaine. Cette fonction qui à une fonction de X dans Y associe une application de X dans $Y_\perp$ est un isomorphisme d'ordre.

Chapitre 3

Graphes

On s'intéresse ici au cas le plus général d'un ensemble X muni d'une relation binaire U. (X, U) est un graphe orienté.

On note $\Gamma^+(x)$ l'ensemble des y tels que $(x, y) \in U$; on l'appelle ensemble des **successeurs** de x.
On note $\Gamma^-(x)$ l'ensemble des y tels que $(y, x) \in U$; on l'appelle ensemble des **prédécesseurs** de x.
On note $d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$ le **degré sortant** ou **degré externe** de x.
On note $d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$ le **degré entrant** ou **degré interne** de x.
Si $d^-(x) = 0$ x est appelé une **source**.
Si $d^+(x) = 0$ x est appelé un **puits**.

Théorème 13 *Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté fini. G est sans circuit si et seulement si les deux énoncés suivants sont vérifiés :*
• $\exists x \in X \ d^-(x) = 0$
• $\forall x \in X \ d^-(x) = 0 \Longrightarrow G \setminus \{x\}$ *est sans circuit.*

Théorème 14 *Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté fini. G est sans circuit si et seulement si il existe une permutation $(x_1, x_2, ..., x_n)$ des sommets tels que $d^-_{G_i}(x_i) = 0$ où $G_i = G[\{x_i, ..., x_n\}]$.*

Ci-dessous un algorithme déterminant si oui ou non un graphe est sans circuit ou non.
Le codage machine employé consiste en une liste de successeurs pour chaque sommet.

Procédure sans-circuit(G)
Début : Pour tout $x \in X$ faire
    $d^-(x) = 0$
Pour tout $x \in X$ faire
    Pour tout $y \in \Gamma^+(x)$ faire

$d^-(y) \leftarrow d^-(y)+1$
Source $\leftarrow \emptyset$
Nbsommets $\leftarrow 0$
Pour tout $x \in X$ faire
Si $d^-(x) = 0$ alors Source $\leftarrow$ Source $\cup\{x\}$.
Tant que Source $\neq \emptyset$ faire
$x \leftarrow$ choix(Source)
Source $\leftarrow$ Source privé de $\{x\}$
Nbsommets $\leftarrow$ Nbsommets $+1$
Pour chaque successeur y de x faire
$d^-(y) \leftarrow d^-(y) - 1$
Si $d^-(y) = 0$ alors
Source $\leftarrow$ Source $\cup\{y\}$.
Si (Nbsommets$=n$) alors G est sans circuit sinon G a au moins un circuit.

La complexité de cet algorithme est $O(n+m)$ avec n le nombre de sommets et m le nombre d'arcs.
Source peut être implémentée sous forme de liste, avec pour fonction de choix la fonction simplissime qui choisit le premier élément.

Un **tri topologique** d'un graphe orienté sans circuit $G = (X, U)$ est une permutation $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de X telle que $(x_i, x_j) \in U \Longrightarrow i < j$.

Notons que la permutation calculée par l'algorithme précédent (ie. l'ordre de sortie de Source) est un tri topologique.

L'algorithme suivant sert à engendrer *tous* les tris topologiques :

Procédure Tri-topologique(G)
Pour tout $x \in X$ calculer $d^-(x)$ (comme dans l'algorithme précédent)
$S \leftarrow \emptyset$
Pour tout $x \in X$ faire :
si $d^-(x) = 0$ alors $S \leftarrow S \cup \{x\}$
$\sigma \leftarrow \emptyset$
Tri-topo(G, S, σ)

avec la procédure récursive «Tri-topo» suivante :

Tri-topo(G, S, σ)
Si $S = \emptyset$ alors écrire σ sinon
Pour tout $x \in S$ faire
$S' \leftarrow S - \{x\}$
$\sigma \leftarrow \sigma.x$ (concaténation)
Pour tout $y \in \Gamma^+(x)$ faire
$d^-(y) \leftarrow d^-(y) - 1$
Si $d^-(y) = 0$ alors
$S' \leftarrow S' \cup \{y\}$
Tri-topo(G, S', σ)
Pour tout $y \in \Gamma^+(x)$ faire
$d^-(y) \leftarrow d^-(y) - 1$

$\sigma \leftarrow \sigma$ privé de x

La complexité est en $O((n+m) * |L(G)|)$.
Il existe des algorithmes de complexité $O(n * |L(G)|)$ (beaucoup plus compliqués).
$L(G)$ est le nombre de tri topologiques, n le nombre de sommets, m le nombre d'arcs.

On considère maintenant un graphe $G = (X, U)$ orienté et sans circuits. On pose $h(x) = 0$ si $d^-(x) = 0$ et $h(x) = max\{h(y)|(y, x) \in U\} + 1$ sinon ; $h(x)$ est appelé **hauteur** de x.

Algorithme de construction des niveaux du graphe ; un **niveau** est de la forme $X_i = \{x \in X | h(x) = i\}$:
• Calculer les degrés internes.
• nb-sommets=0
• Pour tout $x \in X$ faire
• • Si $d^-(x) = 0$ faire
• • • ajouter(x) au niveau 0.
• • • nb-sommets++
• $i \leftarrow 0$
• Tant que niveau(i) est non vide faire
• • Pour tout x dans niveau(i) faire
• • • pour tout y successeur de x faire • • • • $d^-(y) \leftarrow d^-(y) - 1$
• • • • Si $d^-(y) = 0$ alors
• • • • • niveau($i+1$) $\leftarrow$ niveau($i+1$) $\cup\{y\}$
• • • • • nb-sommets $\leftarrow$ nb-sommets $+1$
• • $i \leftarrow i + 1$

Il y a des circuits si et seulement si à la fin de l'algorithme nb-sommets est différent de n.
La complexité est en $O(n + m)$.

Un chemin sur un graphe $G = (X, U)$ est un n-uplet $(x_1, ..., x_k)$ tel que $\forall i (x_i, x_{i+1}) \in U$.
Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, la **fermeture transitive** $G_f = (X, U_f)$ de G est définie par $(x, y) \in U_f$ si et seulement si il existe un chemin $(x_1, ..., x_k)$ de G avec $x = x_1$ et $y = x_k$.
Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté avec $X = \{1, ..., k\}$ et $X_0 = \emptyset$.
Soit $\mu = (x_1, ..., x_l)$ un chemin de G, l'intérieur de μ, noté $I(\mu)$, est $\{x_2, ..., x_{l-1}\}$.
$I(\mu) = \emptyset$ si et seulement si $l \leq 2$.
On définit une suite de graphes $G_k = (X, U_k)$ de la manière suivante : $(x, y) \in U_k$ si et seulement si il existe un chemin c entre x et y avec $I(c) \subset X_k$. En particulier $G_0 = G \cup \{(x, x)|x \in X\}$, et $G_n = G_f$.

Lemme : $(i, j) \in U_k \iff ((i, j) \in U_{k-1} \vee ((i, k) \in U_{k-1} \wedge (k, j) \in U_{k-1}))$

On déduit de ce lemme un algorithme destiné à déterminer la fermeture transitive d'un graphe, l'**algorithme de Roy-Warshall** :
• $a \leftarrow g$
(on initialise la matrice avec le graphe)
• Pour i variant de 1 à n faire $a_{i,i} \leftarrow 1$

• Pour k variant de 1 à n faire
• • Pour i variant de 1 à n faire
• • • Pour j variant de 1 à n faire
• • • • $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} \vee (a_{i,k} \wedge a_{k,j})$

On peut constater que l'on n'applique pas exactement le lemme, car les $a_{i,j}$ ne sont pas les bons, mais l'on peut aussi montrer que l'algorithme fonctionne tout de même.

La complexité de l'algorithme de Roy-Warshall est $O(n^3)$.

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, $G_r = (X, U_r)$ est une **réduction transitive** de G si $U_r \subset U$, G_r n'a pas de transitivité et $(G_r)_f = G_f$.
La réduction transitive n'est pas toujours unique.
Si $G = (X, U)$ est un graphe orienté sans circuit, il a une unique réduction transitive appelé **graphe de Hasse**.

Algorithme général de calcul d'une fermeture transitive (pas seulement dans le cas d'un graphe sans circuit).
• Pour $x \in X$ faire
• • marque(x) $\leftarrow$ faux
• • $\Gamma_f^+(x) \leftarrow \emptyset$
• Pour tout $x \in X$ faire
• • file $\leftarrow \{x\}$
• • tant que file $\neq \emptyset$ faire
• • • $y \leftarrow$ premier(file)
• • • supprimer (y,file)
• • • Pour tout $z \in \Gamma^+(y)$ faire
• • • • Si marque(y)=faux alors
• • • • • marque(z) $\leftarrow$ vrai
• • • • • marque($\Gamma_f^+(x) \leftarrow \Gamma_f^+(x) \cup \{z\}$)
• • • • • file $\leftarrow$ file $\cup$ { z }
• • Pour tout $z \in Gamma_f^+(x)$ faire
• • • marque(x) $\leftarrow faux$

Le coût de cet algorithme est $O(n|U| + |U_f|)$.

On cherche maintenant à déterminer à la fois la fermeture et la réduction transitive dans un graphe sans circuit.
L'algorithme employé est l'**algorithme de Goralcicova-Koubek**.

• Pour tout $x \in X$ faire
• • $\Gamma_f^+(x) \leftarrow \emptyset$
• • $\Gamma_r^+(x) \leftarrow \emptyset$
• • marque(x) $\leftarrow$ faux
• On classe les points dans l'ordre d'un tri topologique $\tau = (x_1, x_2, ..., x_n)$
• Pour i variant de n à 1 faire
• • $S \leftarrow \Gamma^+(x_i)$
• • Tant que $S \neq \emptyset$
• • • $x \leftarrow min_\tau(S)$

• • • Si non(marque(X)) alors
(cas où (x_i, x) n'est pas un arc de transitivité)
• • • • $\Gamma_r^+(x_i) \leftarrow \Gamma_r^+(x_i) \cup \{x\}$
• • • • $\Gamma_f^+(x_i) \leftarrow \Gamma_f^+(x_i) \cup \{x\}$
• • • • marque(x) $\leftarrow$ vrai
• • • • Pour tout $y \in \Gamma_f^+(x)$ faire
• • • • • si non(marque(y)) alors
• • • • • • marque(y) $\leftarrow$ vrai
• • • • • • $\Gamma_f^+(x_i) \leftarrow \Gamma_f^+(x_i) \cup \{y\}$
• • • • $S \leftarrow S \setminus \{x\}$
• • Pour tout $y \in \Gamma_f^+(x_i)$ faire
• • • marque(y) $\leftarrow$ faux

La complexité est en $O(n + n|U_r| + |U_f|)$.

Problèmes ouverts : peut on réaliser la fermeture transitive de G en $O(n + |U_f|)$? La réduction transitive en $O(n + |U|)$? Comment détecter qu'un graphe est fermé transitivement ? Réduit transitivement ? (probablement faisable en temps linéaire)

Chapitre 4

Théorie des ensembles - autres systèmes axiomatiques - construction des ensembles usuels

4.1 Les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel

Une **classe** est associée à une propriété d'une seul élément ; c'est à dire que l'on se donne une assertion comportant une et une seule variable libre ; un élément est dans la classe correspondante s'il vérifie l'assertion. Les formules comportant plusieurs variables libres sont appelées **relations**. Eventuellement on peut avoir une distinction entre des variables et des paramètres ; dans ce cas on a une classe pour chaque valeur possible des paramètres.
La théorie des ensembles est basée sur un ensemble d'axiomes. Les objets de cette théorie sont appelés **ensembles**, et la classe des ensembles est appelée **univers**. Les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel sont les suivants :

Axiome 15 *Axiome d'extensionalité :*

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \iff z \in y) \to x = y$$

(deux ensembles sont égaux si et seulement si ils contiennent exactement les mêmes éléments)

Axiome 16 *Axiome de l'union :*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff \exists t (t \in x \wedge z \in t)$$

(une union d'ensembles est un ensemble)

Axiome 17 *Axiome de l'ensemble des parties :*

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \iff z \subset x)$$

(les parties d'un ensembles forment une partie. On note $x \subset y$ l'assertion $\forall z (z \in x \to z \in y)$)

Axiome 18 *Axiome du schéma de remplacement :*
Etant donné une formule $\mathcal{R}(x, y, z_0, ..., z_n)$ de paramètres $z_0, ..., z_n$, définissant pour toute valeur des z_i une fonction, alors :

$$\forall z_0 ... \forall z_n (\forall x \forall y \forall y' E(x, y, z_0, ..., z_n) \wedge E(x, y', z_0, ..., z_n) \to y = y')$$

$$\to \forall t \exists w \forall v (v \in w \iff \exists u (u \in t \wedge E(u, v, x_0, ..., x_{k-1})))$$

On ajoute usuellement un axiome supplémentaire à ces axiomes :

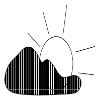
Axiome 19 *axiome de l'infini, qui affirme qu'il existe un ordinal infini. Nous verrons plus loin ce qu'est un ordinal, et ce qu'est un ordinal fini.*

Théorème 20 *La consistance de ces axiomes n'est pas changée si on remplace l'axiome de l'infini par sa négation.*

Démonstration : Voir [12]...□

On appelle **paire** l'ensemble $\{x, y\}$. Ne pas confondre avec le **couple** (x, y), qui désigne en fait l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. On note de même (x, y, z) l'ensemble $(x, (y, z))$, et ainsi de suite pour les n**-uplets ordonnés**. La différence entre $\{x_0, ..., x_n\}$ et $(x_0, ..., x_n)$

est que dans le premier cas l'ordre des termes n'influe pas, alors que dans le second elle influe. On démontre l'associativité et la commutativité de l'union. On notera $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E.



On notera que toutes les opérations intuitives sur les ensembles sont possibles, enfin presque. On peut en tout cas utiliser les intersections, définir l'ensemble des éléments d'un ensemble donné qui vérifient une propriété donnée, on peut travailler sur l'ensemble des parties d'un ensemble, on peut travailler sur un produit cartésien d'ensembles, bref toutes ces choses sans lesquelles les maths prendraient vraiment la tête. On peut aussi montrer l'existence et l'unicité de l'ensemble vide.

4.2 La "taille" des ensembles : ordinaux, cardinaux

4.2.1 Les ordinaux

Définition 21 (Définitions de base pour les ordinaux) *On dit qu'un ensemble muni d'une relation d'ordre est* **bien ordonné** *si et seulement si toute partie non vide de cet ensemble admet un élément minimum. L'ordre est alors appelé un* **bon ordre**. *On appelle* **segment initial** *d'une partie bien ordonnée un ensemble de cette partie tel que étant donné un élément de cette partie, tous les éléments qui sont inférieurs à cet élément sont aussi dans la partie. On appelle* **segment initial engendré par** x *l'ensemble des y plus petits que x ; cette partie est clairement un segment initial.*
Un ensemble est dit **transitif** *si tout élément de cet ensemble est inclus dans cet ensemble. C'est à dire que si $S \in E$, alors $S \subset E$ (non, il n'y a pas de faute de frappe !). Un ensemble est un* **ordinal** *s'il est transitif s'il est bien ordonné par $\in$, cette relation étant une relation d'ordre strict. On note On l'ensemble des ordinaux.*

Par exemple les ensembles suivants sont des ordinaux :

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Proposition 22 • *Les segments initiaux d'un ordinal sont soit lui-même, soit ses éléments.*
• *Tout élément d'un ordinal est un ordinal.*
• *Un ordinal n'appartient pas à lui-même.*

Démonstration :

• Soit S un segment initial d'un ordinal O. Alors S est un segment initial engendré par un certain a (a est l'élément minimum de $O \setminus S$) ; l'ensemble des éléments qui sont plus petits que a étant les éléments qui appartiennent à a (puisque c'est ainsi que l'on a défini la relation d'ordre), a est donc le segment initial engendré par a.

• Facile...
• Il suffit de voir que l'on a imposé que $\in$ soit un ordre strict.□

Proposition 23 *Etant donné deux ordinaux O et P, une et une seule des trois assertions suivantes est vérifiée :* • $O \in P$
• $P \in O$
• $P = O$.

Démonstration : Il suffit de considérer l'intersection de O et P et d'examiner ses propriétés.□

La relation $\in$ est donc une relation d'ordre total sur la classe des ordinaux.

Proposition 24 • *La relation $\in$ est un bon ordre sur la classe des ordinaux.*
• *Le plus petit élément de la classe des ordinaux plus grands que E est $E \cup \{E\}$.*
• *L'union d'une classe d'ordinaux est un ordinal ; il est plus grand que tous les ordinaux de cette classe, et il est plus petit que tous les autres ordinaux plus grands que tous ces ordinaux.*

Démonstration :
• Il suffit de constater comme on l'a vu plus haut que le segment initial engendré par O est O.
• Il est clair que E doit appartenir à un tel élément, ainsi qu'être inclus dedans ; réciproquement l'ensemble $E \cup \{E\}$.
• Facile.□

Définition 25 *Etant donné E un ordinal, $E \cup \{E\}$ est appelé le* **successeur** *de E. On le note $E + 1$. E est dit le* **prédécesseur** *de $E + 1$.*

Propriété amusante :
La classe des ordinaux n'est pas un ensemble. En effet si un tel ensemble E existe, alors tout élément de E est un ordinal, et donc un ensemble d'ordinaux, et donc $E \in E$; ce qui n'est pas possible pour un ordinal puisque $\in$ est une relation d'ordre strict.

Définition 26 *On appelle* **morphisme d'ordre** *entre deux ensembles ou classes ordonnés A et B une application de A vers B telle que $f(a) \geq f(b) \iff a \geq b$. Un morphisme d'ordre bijectif est appelé* **isomorphisme d'ordre**. *S'il existe un isomorphisme d'ordre entre deux ensembles ou classes alors on dit que ces ensembles ou classes sont isomorphes pour l'ordre.*

Théorème 27 *S'il existe un isomorphisme d'ordre entre deux ordinaux E et F, alors E et F sont égaux (alors l'isomorphisme d'ordre est l'identité).*

Théorème 28 *Pour tout ensemble ordonné E il existe un et un seul isomorphisme d'ordre de E vers un ordinal.*

Théorème 29 *Toute relation de bon ordre dont le domaine n'est pas un ensemble est nécessairement isomorphe pour l'ordre à la classe des ordinaux.*

Il est ensuite possible de montrer que s'il est vrai pour une certaine propriété P à une seule variable libre x que $P(x)$ est vrai pour tout ordinal E plus petit que F, alors P est vraie pour F, alors on peut conclure que la propriété est vraie pour tout ordinal.

Il reste de nombreuses choses à justifier pour expliquer toutes les petites choses que l'on s'autorise en maths sans se prendre la tête trop ; mais ces considérations dépassent mon propos...

4.2.2 Les cardinaux

⊡ **Le théorème de Cantor-Bernstein**

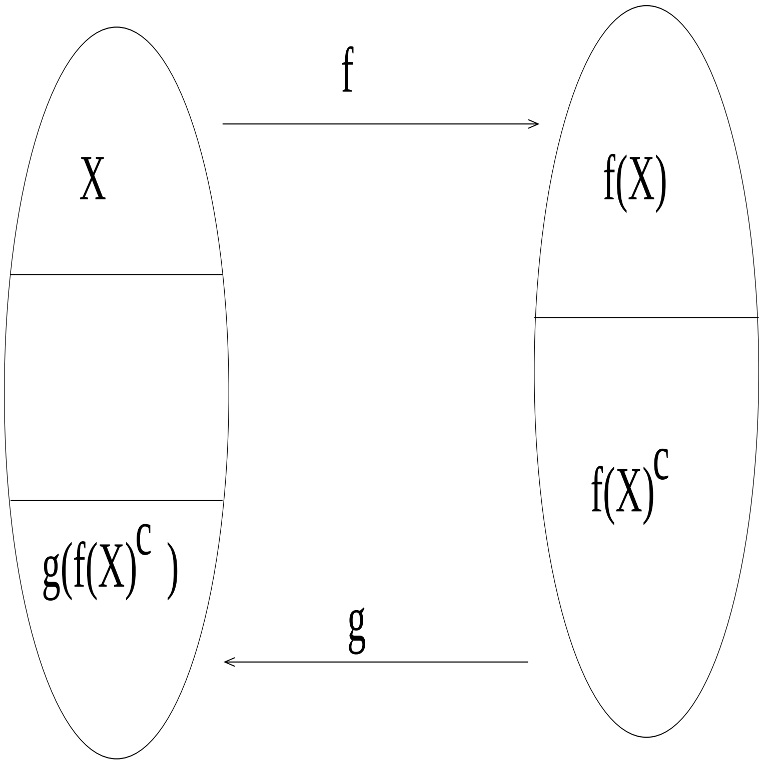


FIG. 4.1 – Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein.

Théorème 30 (Théorème de Cantor-Bernstein) *Soit E et F deux ensembles, f une injection de E dans F, et g une injection de F dans E ; alors il existe une bijection de E dans F.*

__Démonstration :__ • On considère l'ensemble des parties X de E telles que $g(f(X)^c) \cap X = \emptyset$.
• On montre que cet ensemble admet un élément maximal (car il est stable par réunion)
• On montre que le maximum X vérifie $g(f(X)^c) \cup X = E$
• On montre que la fonction qui à x associe $f(x)$ si $x \in X$ et l'unique y tel que $g(y) = x$ si $x \notin X$ est une bijection $\square$

⊡ L'axiome du choix et ses dérivés

◇ Généralités - rappels

Définition 31 (Définitions sur les ordres) *Un* **ordre** *est une relation réflexive, antisymétrique, transitive.*
Une **relation d'ordre strict** *est une relation $<$ telle que $\leq$ définie par $x \leq y \iff (x = y \vee x < y)$ soit une relation d'ordre, et telle que pour tout x $\neg x < x$.*
Un élément x d'une partie E est un **minimum** *de cette partie E si et seulement si $x \in E$ et si $\forall e \in E\ e \geq x$.*
Un élément x d'une partie E est un élément **minimal** *de E si et seulement si $x \in E$ et si $e \in E$ et $e \leq x \rightarrow e = x$.*
Un élément x est dit **minorant** *d'une partie E si $\forall e \in E\ e \geq x$; il n'est pas nécessaire que x soit dans E.*
On définit de même **maximum, élément minimal, majorant**.
La figure 4.2 illustre ces notions.
Un **bon ordre** *est un ordre tel que toute partie non vide a un minimum.*

◇ L'axiome du choix

Axiome 32 (Axiome du choix, première version) *Etant donné un ensemble E, il existe une fonction f qui à une partie non vide de E associe un élément de cette partie.*

Axiome 33 (Axiome du choix, deuxième version) *Un produit d'ensembles non vides est non vide.*

On montre facilement que ces deux axiomes sont équivalents. Pour des applications

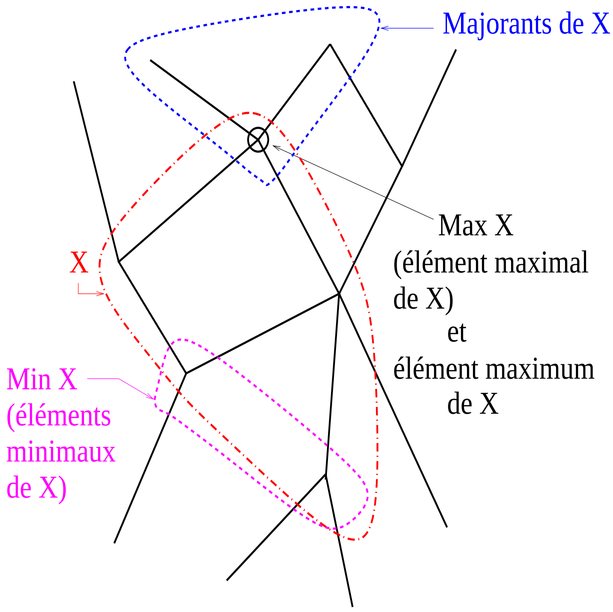


FIG. 4.2 – Illustration de quelques notions sur les ordres. X n'a pas de minorant, ni de plus petit élément ; par contre il a un maximum, c'est le même élément que l'élément maximal unique. Bien noter toutefois qu'un élément maximal, même lorsqu'il est unique, n'est pas nécessairement un maximum.

amusantes de l'axiome du choix on pourra consulter **??**.

Théorème 34 (Théorème de Zermelo) *E non vide $\rightarrow$ il existe une relation de bon ordre (i.e. telle que toute partie non vide admette un minimum).*

Il est difficile de montrer ce théorème à partir de l'axiome du choix. La réciproque est par contre facile.

Définition 35 (Ensemble inductif) *Deux éléments sont dits* **comparables** *si l'un des deux est inférieur ou égal à l'autre.*
On appelle **chaine** *un ensemble totalement ordonné, c'est à dire tel que deux éléments soient toujours comparables.*
Un ensemble ordonné est dit **inductif** *si toute chaine admet un majorant.*

Lemme 36 (Lemme de Zorn) *Tout ensemble non vide ordonné inductif admet un élément maximal.*

Le lemme de Zorn est équivalent au théorème de Zermelo, lui même équivalent aux deux versions de l'axiome du choix. On peut montrer Zermelo à partir de Zorn en considérant l'ensemble des bons ordres sur des parties de E, un couple $(X, \mathcal{R})$ étant inférieur à un couple $(X', \mathcal{R}')$, avec X et X' des parties de E et $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ des bons ordres sur respectivement X et X', si $X \subset X'$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, et si $x \in X$ et $x' \in X'$ avec $x'\mathcal{R}'x$, alors $x' \in X$.

L'axiome du choix permet par exemple de démontrer l'existence d'une base pour tout espace vectoriel. L'axiome du choix est équivalent à l'existence d'une injection de A dans B ou de B dans A pour tous ensembles A et B ; la preuve de ce fait à partir de Zorn se fait facilement, en considérant les bijections entre des parties de A et des parties de B, par contre la réciproque est difficile.

L'axiome de fondation est l'assertion selon laquelle dans tout ensemble non vide il existe un élément d'intersection vide avec cet ensemble ; l'axiome de fondation sera plus détaillé en 4.5.

Théorème 37 (Consistance relative de AC et de $\neg AC$) *(AC désigne l'axiome du choix)*
Si la théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel avec axiome de fondation est consistante, alors la théorie de Zermelo-Fraenkel avec axiome de fondation et axiome du choix est consistante.
Si la théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel est consistante, alors la théorie de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix est consistante.
D'autre part si la théorie de Zermelo-Fraenkel est consistante, alors la théorie de Zermelo-Fraenkel avec la négation de l'axiome du choix est consistante.
Enfin, si la théorie de Zermelo-Fraenkel avec axiome de fondation est consistante, alors la théorie de Zermelo-Fraenkel avec axiome de fondation et avec la négation de l'axiome du choix (i.e. en supposant qu'il existe un ensemble sur lequel on ne peut pas construire une relation de bon ordre) est consistante.

Démonstration : Fortement non trivial. Je passe.□

Il est aussi possible de remplacer la négation de l'axiome du choix par le fait que $\mathcal{P}(\omega)$ ne puisse pas être bien ordonné ; une telle théorie est consistante si la théorie avec axiome de fondation est consistante.

◇ **Quelques exercices**

• On peut énoncer sans l'axiome du choix :
- un produit de groupes est non vide
- un produit dénombrable d'espaces métriques compacts est compact

⊡ Définition des cardinaux. Ordinaux finis et infinis

Définition 38 *Deux ensembles sont dits* **équipotents** *s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.*

Il est évident qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence.

L'axiome du choix permet de démontrer le théorème suivant :

Théorème 39 *Tout ensemble est équipotent à un ordinal.*

Définition 40 *Etant donné un ensemble, on sait qu'il existe au moins un ordinal auquel cet ensemble est équipotent. Eventuellement il peut y en avoir plusieurs ; le plus petit élément de ces ordinaux (au sens défini plus haut sur les ordinaux, c'est à dire la relation $\in$) est appelé le* **cardinal** *de l'ensemble. On note usuellement $\overline{\overline{E}}$ le cardinal de E, ou $\#E$. On note $Card$ la classe des cardinaux.*

Théorème 41 (Théorème de Cantor) *Pour tout ensemble E, on a $\#E \leq \#\mathcal{P}(E)$.*

<u>Démonstration :</u> Supposons le contraire ; alors il existe une surjection f de E dans $\mathcal{P}(E)$. Posons F l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \notin f(x)$; il suffit alors de considérer le $x \in E$ tel que $f(x) = F$. On constate que si $x \in f(x)$, alors $x \notin f(x)$; et vice-versa.$\square$

On notera que $Card$ n'est pas un ensemble ; sinon on pourrait construire un ensemble égal à On, ce qui est impossible.

Définition 42 (Somme de cardinaux) *On note $A + B$ le cardinal de l'union disjointe de deux ensembles respectivement équipotents à A et B.*

On notera que cette définition pose quelques petits problèmes de définition, pas difficiles à résoudre. L'addition de cardinaux est commutative et associative.
Une propriété importante est le fait que la somme des E_i pour $i \in I$ est le plus grand élément entre $\overline{\overline{I}}$ et les E_i, sous réserve que l'un au moins de ses ensembles (I ou l'un des E_i) soit infini.

Définition 43 (Produit de cardinaux) *On note $A \times B$ le cardinal du produit cartésien de A et de B.*

Là aussi il convient de vérifier que le produit de deux couples d'ensembles de mêmes cardinaux respectifs est le même. On peut en outre vérifier que la multiplication de cardinaux est associative et commutative, et distributive par rapport à l'addition. On notera que le produit de deux cardinaux est le plus grand de ces deux cardinaux.

Définition 44 (Exponentiation de cardinaux) *Etant donnés des cardinaux A et B on note A^B le cardinal de l'ensemble des applications de B dans A.*

On vérifiera facilement que la définition a bien un sens. On peut aussi montrer que $A^{B+C} = A^B \times A^C$ et que $A^{B^C} = A^{B \times C}$.

De nombreuses manipulations plus approfondies sur les cardinaux requièrent l'axiome du choix.

Définition 45 *Un ordinal est dit* **fini** *si tout ordinal inclus dans cet ordinal admet un prédécesseur. On appelle aussi* **entier naturel** *un ordinal fini.*

Moi ça m'amuse beaucoup de définir un entier naturel comme étant un ensemble E incluant chacun de ses éléments, tel que pour toute partie F de E il existe $x \in E \cap F$ tel que $x \in G$ pour tout $G \in F \setminus \{x\}$ et pour tout élément F de E il existe G incluant chacun de ses éléments, tel que pour toute partie H de G il existe $y \in G \cap H$ tel que $x \in I$ pour tout $I \in H \setminus \{y\}$, et tel que $G \cup \{G\} = F$. Si je me suis pas gouré.

On montre plein de choses bien agréables sur les ordinaux finis ; ils sont stable par union, produit, exponentiation. On montre aussi que tout ordinal fini est un cardinal.

Définition 46 *Un cardinal est dit* **fini** *s'il est fini en tant qu'ordinal. Dans le cas contraire il est dit* **infini**. *On note $Card'$ la classe des cardinaux infinis.*

Nous supposons maintenant l'axiome de la théorie des ensembles selon lequel il existe un ordinal infini. Un **ordinal infini** est, par définition, un ordinal qui n'est pas fini. Cet axiome de la théorie des ensembles est équivalent à l'axiome selon lequel la classe des ordinaux finis est un ensemble ; ainsi, puisque la classe des ordinaux n'est pas un axiome, il existe un ordinal infini. On peut encore formuler cet axiome en disant qu'il existe un ordinal limite, au vu de la définition ci-dessous :

Définition 47 *Un ordinal différent du vide et sans prédécesseur est appelé un* **ordinal limite**. *C'est donc un ordinal non vide tel que tout élément plus petit que lui a un successeur aussi plus petit que lui.*

Propriété : Un ordinal limite est l'union des ordinaux qui lui sont inférieurs.

Définition 48 *On appelle ω le minimum des ordinaux infinis. ω est donc un ordinal limite, c'est le plus petit, et c'est l'ensemble des ordinaux finis.*
Un ensemble est dit **fini** *si son cardinal est fini.*
Un ensemble est dit **dénombrable** *si son cardinal est inférieur ou égal à ω.*
ω est un cardinal ; on note $\aleph_0 = \omega$ et pour tout ordinal E n'étant pas un ordinal limite, alors avec F le prédécesseur de E, $\aleph_E$ est le plus petit ordinal plus grand que $\aleph_F$; et si E est un ordinal limite, alors $\aleph_E$ est l'union des $\aleph_F$ pour $F \in E$.

Propriété :
Un ensemble infini est un ensemble contenant une partie dénombrable infinie.
Un ensemble infini est un ensemble qui est en bijection avec l'une de ses parties

propres.
$\aleph_E$ est un cardinal.

4.3 L'axiome d'accessibilité

Définition 49 (Cardinal accessible et inaccessible) *Un cardinal E est dit* **inaccessible** *s'il est plus grand que ω, si pour tout F cardinal $< E$ on a $2^F < E$, et si toute famille de cardinaux $< E$, indexée par une famille de cardinal $< E$, a un sup plus petit que E.*
Un cardinal est dit **accessible** *s'il n'est pas inaccessible.*
*L'***axiome d'accessibilité** *affirme que tout cardinal est accessible.*

Théorème 50 *Si Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix est consistant, alors Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix et axiome d'accessibilité est consistant.*

Démonstration : Difficile...□

4.4 L'hypothèse du continu

Le théorème de Cantor nous dit que $\aleph_{E+1} \leq 2^{\aleph_E}$ (il est clair que $2^{\aleph_E}$ est le cardinal de l'ensemble des parties de E).

Définition 51 (Hypothèse du continu - hypothèse du continu généralisée)
On appelle hypothèse du continu l'assertion $\aleph_1 = 2^{\aleph}_0$.
On appelle hypothèse du continu généralisée l'assertion $\aleph_{E+1} = 2^{\aleph}_E$ pour tout E ordinal.

Propriété :
L'hypothèse du continu est équivalente à l'assertion selon laquelle les parties de ω peuvent être bien ordonnées de manière à ce que tout segment initial strict soit dénombrable.

Théorème 52 *Si la théorie de Zermelo-Fraenkel est consistante, alors la théorie de Zermelo-Fraenkel plus hypothèse du continu généralisée est consistante.*

Démonstration : Trop dure !□

4.5 L'axiome de fondation

Définition 53 (Axiome de fondation) *On appelle* **axiome de fondation** *l'axiome selon lequel pour tout ensemble E non vide il existe F tel que $F \in E$ et $F \cap E = \emptyset$.*

Cet axiome entraîne, par exemple, qu'il n'existe pas d'ensemble x tel que $x = \{x\}$, ni d'ensemble x tel que $x \in x$.

Théorème 54 *Si la théorie de Zermelo-Fraenkel est consistante, alors la théorie de Zaermelo-Fraenkel plus axiome de fondation est consistante.*

Démonstration : Dure !□

Théorème 55 *Il n'existe pas de suite U_n d'ensembles telle que $U_{n+1} \in U_n$ pour tout n.*

Démonstration : La preuve, facile, nécessite l'axiome de fondation.□

Théorème 56 *Si l'on utilise l'axiome de fondation, alors un ensemble E est un ordinal si et seulement si il est transitif et si deux éléments u et v de E vérifient au moins une des assertions suivantes :*
- $u \in v$
- $u = v$
- $v \in u$

Démonstration : La preuve est plus difficile, et je ne la donne pas ici car elle dépasse mon propos de simple brève introduction à la théorie des ensembles.□

Bien sûr on peut montrer que si ces hypothèses sont vérifiées alors pour tout couple (u, v) c'est l'une *et une seule* des assertions qui est vérifiée.

Théorème 57 *Si l'on utilise l'axiome de fondation, alors pour tout ensemble E il existe un unique ensemble transitif contenant E et inclus dans tout ensemble transitif incluant E.*

Démonstration : Non triviale.□

Définition 58 *On appelle* **fermeture transitive** *de E l'ensemble transitif dont l'existence est garantie par le théorème 57.*

Propriété :
La fermeture transitive de E est la réunion de E et de l'union des fermetures transitives des éléments de E.

Définition 59 *Une relation $\mathcal{R}$ est dite* **extensive** *si* $\forall(y,z)[\forall x(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}z) \rightarrow y = z]$.
Un ensemble est dit **extensif** *si $\in$ est une relation extensive sur cet ensemble. C'est à dire que si deux éléments ont même intersection avec l'ensemble, alors ils sont égaux.*

Propriétés :
Un ensemble transitive est extensif.
Un ensemble extensif est isomorphe à un ensemble transitif, et l'isomorphisme est unique (nécessitant l'axiome de fondation).

Il est possible de prouver que l'axiome de fondation est relativement consistant, c'est à dire que la théorie basée sur les axiomes de Zermelo-Fraenkel est consistante si et seulement si la théorie basée sur les mêmes axiomes plus l'axiome de fondation est consistante.

4.6 Résumé de théorie des ensembles

En résumé on a les implications de consistance du schéma 4.3.

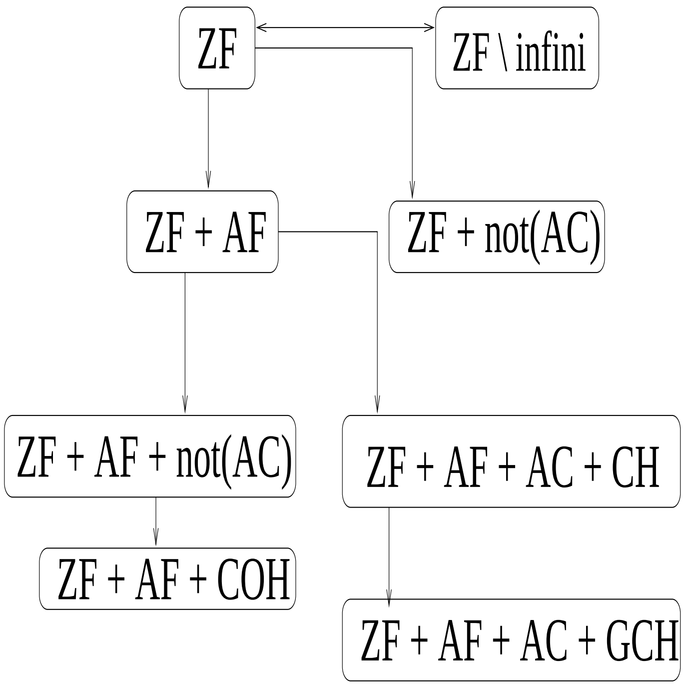


FIG. 4.3 – ZF désigne la théorie de Zermelo-Fraenkel. $ZF \setminus infini$ désigne la même théorie mais privée de l'axiome de l'infini et muni de sa négation. AC désigne l'axiome du choix. $not(AC)$ désigne la négation de AC. COH désigne l'axiome selon lequel les parties de ω ne peuvent pas être bien ordonnes. AF désigne l'axiome de fondation. ACC désigne l'axiome d'accessibilité. CH désigne l'hypothèse du continu, et GCH l'hypothèse du continu généralisée. Une flèche relie une théorie T à une théorie T' si T' est plus forte que T, c'est-à-dire que tous les théorèmes de T sont des théorèmes de T'. Notez bien que toutes les théories présentes sur la figure sont consistantes si et seulement si ZF est consistante. Notez bien aussi que si ZF est consistante, alors il est impossible de le prouver ; mais que par contre si elle ne l'est pas, on dispose d'un algorithme théorique permettant en temps fini de le prouver...

Bibliographie

[1] P. BARBE, M. LEDOUX, *Probabilité*, BELIN, 1998.

[2] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, 1983.

[3] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, FLEMMARD.

[4] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, V. MAILLOT, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, MASSON, 1997.

[5] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, MASSON, 1995.

[6] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, MASSON, 1996.

[7] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, DUNOD, 1998.

[8] F. COMBES *Algèbre et géométrie*, BRÉAL, 1998. <

[9] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, PRESSES UNIVERSITAIRES DE GRENOBLE, 1996.

[10] W. GIORGI, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, MASSON, 1998.

[11] A. GRAMAIN, *Intégration*, HERMANN 1988, PARIS.

[12] J.-L. KRIVINE, *Introduction to axiomatic set theory*, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, DORDRECHT-HOLLAND.

[13] S. LANG, *Real analysis*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1969.

[14] D. PERRIN, *Cours d'algèbre*, ELLIPSES 1996.

[15] A. POMMELLET, *Cours d'analyse*, ELLIPSES 1994.

[16] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, MASSON 1992.

[17] R. SMULLYAN, *Théorie de la récursion pour la métamathématique*, FLEMMARD.

[18] Y.G. SINAI *Probability theory - An introduction course*, SPRINGER TEXTBOOK, 1992.

[19] P. TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, MASSON, 1997.

[20] J. VAUTHIER, J.J. PRAT, *Cours d'analyse mathématiques de l'intégration*, MASSON, 1994.

[21] D. WILLIAMS, *Probability with martingales*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1991.

[22] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC, *Eléments d'analyse pour l'intégration*, MASSON, 1995.