Les Mathématiques pour l'Agrégation

C. Antonini
J.-F. Quint
P. Borgnat
J. Bérard
E. Lebeau
E. Souche
A. Chateau
O. Teytaud

14 février 2002

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions holomorphes

Un ouvrage de référence est [16], dont nous suivons ici la démarche.

1.1 Cadre

On va ici se préoccuper de fonction de Ω dans $\mathbb{C}$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

1.2 Généralités

Définition 1 *Une fonction est dite* **dérivable au sens complexe en** $a \in \Omega$ **si** $lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *existe et est finie. On note alors cette limite* $f'(a)$.
Une fonction est dite **holomorphe sur** Ω *si elle est dérivable au sens complexe en tout point de* Ω. *On note* $H(\Omega)$ *l'ensemble des fonctions holomorphes sur* Ω.
On notera $D(a,r)$ *(resp.* $D'(a,r)$*) avec* $r > 0$ *l'ensemble des* x *de* Ω *tels que* $|x-a| < r$ *(resp.* $0 < |x-a| < r$*).*
Un domaine est un ouvert connexe non vide.

On remarque immédiatement que :

- $H(\Omega)$ est un anneau pour l'addition et la multiplication usuelles.

- la composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe.

- tout polynôme est holomorphe sur $\mathbb{C}$

- l'inverse d'une fonction holomorphe ne s'annulant pas est holomorphe

- l'exponentielle complexe est holomorphe sur $\mathbb{C}$

- toute série entière est holomorphe ; si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.(z-a)^n$, alors $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n.c_n.(z-a)^{n-1}$

1.3 Vers le théorème de Cauchy

Proposition 2 *Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable X, ϕ une fonction complexe mesurable, Ω un ouvert du plan qui ne rencontre pas $\phi(X)$. Alors avec*

$$f(z) = \int_X \frac{d\mu(t)}{\phi(t) - z}$$

définie pour $z \in \Omega$ On a $f \in H(\Omega)$.

__**Démonstration :**__ • On développe en série entière $1/(\phi(t) - z)$ sur un disque suffisamment petit pour être inclus dans Ω et pour que la convergence soit uniforme.

• On permute alors l'intégrale et la somme (merci la convergence uniforme), et on obtient bien le résultat désiré.$\square$

Définition 3 *On appelle* **courbe** *une application continue d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.*

On appelle **chemin** *une application continue C^1 par morceaux d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.*

Une courbe ou un chemin γ est dit **fermé** *si $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Etant donné γ une courbe, on note γ^* l'image de $[a, b]$ par γ.

Etant donné γ un chemin et f une fonction continue sur γ^*, on note $\int_\gamma f(z).dz$ l'intégrale $\int_{[a,b]} f(t).\gamma'(t).dt$, on appelle cette intégrale l'intégrale de f le long de γ.

Deux chemins γ et γ' sont dits équivalents, si pour toute fonction f continue sur γ^* et γ'^* l'intégrale de f le long de γ est égale à l'intégrale de f le long de γ'.

La **longueur** *d'un chemin γ est l'intégrale de la fonction constante égale à 1 le long de cet arc.*

On appelle **indice** *de z pour $z \in \Omega$ par rapport à γ, avec Ω le complémentaire de γ^*, le complexe*

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2.i.\Pi} \int_\gamma \frac{dt}{t - z}$$

si ϕ est une bijection C^1 de $[a, b]$ dans $[c, d]$, si γ est un chemin d'intervalle de définition $[a, b]$ et γ' est un chemin d'intervalle de définition $[c, d]$, alors si $\gamma = \gamma' \circ \phi$ alors l'intégrale le long de γ est la même que l'intégrale le long de γ' ; c'est à dire qu'un reparamétrage C^1 transforme un chemin en un chemin équivalent.

Théorème 4 (Indice) *L'indice de z par rapport à γ est entier, constant sur chaque composante connexe de Ω (le complémentaire de γ^*), et nul sur la seule composante connexe de Ω qui ne soit pas bornée.*

<u>Démonstration :</u> • Pour voir qu'il y a une seule composante connexe non bornée, c'est facile, il suffit de voir que γ^* est inclus dans un disque ; le complémentaire de ce disque est connexe et donc inclus dans une composante connexe.

• Pour voir que l'indice est un entier, on suppose l'arc défini sur $[0, 1]$, on considère la fonction qui à t associe $exp(\int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z}.du)$. En dérivant cette fonction, on obtient qu'elle est proportionnelle à $\gamma(t) - z$.

• On déduit de ça que notre fonction prend la valeur 1 en 1, ce qui est pile poil ce qu'il nous fallait pour que notre fonction soit un multiple de $2i\Pi$.

• L'indice est constant sur chaque composante connexe, puisqu'il est continu et que chaque composante connexe a donc une image connexe.

• $|\frac{1}{2i\Pi}\int_0^1 \frac{\gamma'(s).ds}{\gamma(s)-z}| \leq |\frac{M}{2\Pi}\int_0^1 \gamma'(s).ds|$, avec M un majorant de $|\frac{1}{\gamma(s)-z}|$. M tendant vers 0 pour z tendant vers l'infini, l'indice est de module inférieur à 1 pour z assez grand, et donc il est nul sur la composante connexe non bornée.$\square$

Quelques remarques :

- On montre facilement que l'indice d'un point z par rapport au chemin $[0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{2i\Pi.t}$, est 1 si $|z| < 1$ et 0 sinon.

- On montre facilement que l'intégrale de la dérivée d'une fonction holomorphe le long d'une chemin fermé est nulle. Par suite, l'intégrale d'un polynôme le long d'un chemin fermé est nulle.

Lemme 5 (Théorème de Cauchy dans le cas d'un triangle dans un convexe) *Soit un triangle de sommets a, b et c. L'intégrale le long de ce triangle est en fait l'intégrale suivant $[a, b]$, plus l'intégrale suivant $[b, c]$, plus l'intégrale suivant $[c, a]$.*

On suppose Ω convexe.

Alors soit f une fonction continue sur Ω, et holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$, avec $p \in \Omega$.

Alors l'intégrale de f le long du triangle est nulle.

(On montrerait facilement le même résultat pour un carré où n'importe quel autre polygone, en le triangulant)

Démonstration :

Il faut distinguer trois cas

• p n'est sur aucun des trois côtés du triangle. Alors on coupe le triangle en quatre plus petits triangles, comme sur la figure 1.1 (schéma de gauche), et on constate que l'intégrale sur au moins l'un des triangles doit être de valeur absolue le quart de la valeur absolue de l'intégrale le long du gros triangle ; or la longueur du petit triangle est la moitié de la longueur du gros. On construit ainsi par récurrence une suite de triangles $\mathbb{D}_n$ de longueur $L.2^{-n}$. On considère le point x, intersection des triangles.

Soit ϵ un réel > 0. f est dérivable en x. Il existe donc un triangle $\mathbb{D}_n$ tel que pour z dans $\mathbb{D}_n$, $f(z) - f(x) - f'(x).(z - x)$ est de module inférieur à $\epsilon.|z - x|$. Or l'intégrale d'une fonction polynôme sur un chemin fermé est nulle, puisqu'un polynôme est la dérivée d'un autre polynôme.

On obtient ainsi que l'intégrale le long du petit triangle est majorée par $\epsilon.(2^{-n}.L)^2$; et puisque l'intégrale sur le grand triangle initial est majorée par 4^n fois le module de l'intégrale sur le triangle $\mathbb{D}^n$, on en déduit que cette intégrale est nulle.

• On suppose maintenant que p soit égal à a (b ou c se traitent bien sûr de même). Alors on place x et y comme sur la figure 1.1 (schéma de droite) ; l'intégrale de f sur les triangles xyb et ybc est nulle ; et celle sur axy peut être rendue aussi petite qu'on le souhaite, puisqu'il suffit de faire tendre x et y vers a (rappelons que f est continue, sur un compact, donc bornée).

• Supposons maintenant que p soit un point de $]a, b[$; il suffit alors de raisonner sur abp, bcp et cap pour conclure.□

Ceux qui ont un peu d'avance auront constaté que l'hypothèse implique en fait que f soit holomorphe sur tout Ω ; mais nous avons besoin de notre lemme avec ces hypothèses-ci afin d'arriver à prouver les résultats qui impliqueront ces résultats.

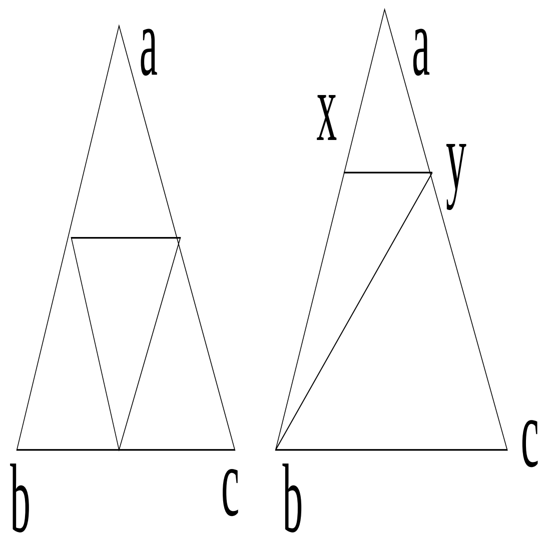

FIG. 1.1 – Découpage en petits triangles ; on utilise les milieux des côtés.

On passe maintenant à une version un peu plus forte :

Théorème 6 (Théorème de Cauchy dans un ensemble convexe) *On suppose Ω ouvert et convexe, p dans Ω, f continue sur Ω et $f \in H(\Omega \setminus \{p\}$. Alors l'intégrale de f le long de γ est nulle pour tout chemin γ fermé tel que $\gamma^* \subset \Omega$.*

<u>Démonstration :</u> On fixe un point a de Ω, et on définit $F(z)$ pour z dans $Omega$ comme l'intégrale sur $[a, z]$ de f.

On raisonne alors sur des triangles a, z, x pour considérer la limite de $\frac{F(z)-F(x)}{z-x}$ pour x tendant vers z. On montre facilement que cette limite est f, et donc que f est une dérivée et est continue, et donc le résultat est clair.□

Théorème 7 (Formule de Cauchy dans un ensemble convexe) *On se donne γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω, et f holomorphe sur Ω. Si $z \in \Omega$ et $z \notin \gamma^*$ alors*

$$f(z).Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\Pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}.du$$

<u>Démonstration :</u>

On se donne z vérifiant les hypothèses. On définit alors g par $g(u) = \frac{f(u)-f(z)}{u-z}$ si $u \in \Omega$ et $u \neq z$, et $g(z) = f'(z)$.

La fonction g est continue, et holomorphe en tout point de $\Omega \setminus \{z\}$, donc d'après le théorème 6, on a $\int_\gamma g(u).du = 0$. En coupant g en ses deux termes $\frac{f(u)}{u-z}$ et $\frac{f(z)}{u-z}$, on obtient le résultat désiré.□

On arrive maintenant à un résultat fondamental d'analyse complexe, facilement démontrable grâce aux résultats qui précèdent.

Théorème 8 (Développement en série entière des fonctions holomorphes) *Toute fonction holomorphe est développable en série entière.*

<u>Démonstration :</u> On se donne a dans Ω, et un disque suffisamment réduit $D(a, r)$ centré en a pour être inclus dans Ω.

Alors on applique la formule de Cauchy (théorème 7) à f sur le convexe $D(a, r)$, avec pour γ l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ définie par $t \mapsto a + re^{2i\Pi.t}$.

On obtient une expression de $f(z)$ qui permet d'appliquer la proposition 2, et on a fini...□

Remarquons qu'une fonction holomorphe est développable en série entière, donc sa dérivée est développable en série entière, donc sa dérivée est holomorphe. La dérivée d'une fonction holomorphe est donc une fonction holomorphe. En fait une fonction $\mathbb{C}$-dérivable (i.e. dérivable au sens complexe) est C^∞.

Enfin un théorème qui peut servir et qui ne coûte pas cher à montrer maintenant qu'on en est là :

Théorème 9 (Théorème de Morera) *Soit f une fonction continue complexe dans un ouvert Ω dont l'intégrale sur tout triangle est nulle. Alors f est holomorphe sur Ω.*

<u>Démonstration :</u> • On considère un disque ouvert D inclus dans Ω centré sur a.

• On construit une fonction F sur D dont f est la dérivée, par $F(z) = \int_{[a,z]} f(u).du$ (un disque, c'est convexe...).

• F est holomorphe, donc sa dérivée f est holomorphe.

• Puisque tout cela est valable pour n'importe quel disque inclus dans Ω, f est holomorphe sur Ω.□

Voir le théorème 19.

Maintenant on va voir plein de conséquences de ces fort jolis théorèmes.

Théorème 10 *Soit f une fonction holomorphe sur Ω un ouvert connexe. Soit Z l'ensemble des z tels que $f(z) = 0$. Alors soit Z est égal à Ω, soit Z n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{C}$.*
Si Z n'est pas $\mathbb{C}$ alors peut pour tout a dans Z trouver un entier positif unique m tel que $f(z) = (z-a)^m.g(z)$, avec g holomorphe non nulle en a. L'ensemble des zéros de f est dans ce cas au plus dénombrable.

On verra une jolie application avec le théorème de Runge **??**.

Démonstration : Soit Z' l'ensemble des points d'accumulation de Z. $Z' \subset Z$, car f étant continue, Z est fermé.

On considère le développement en série entière de f sur un disque D centré sur a quelconque dans $Z(f)$;

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n.(z-a)^n$$

pour tout $z \in D$.

Si les c_n ne sont pas tous nuls, on considère le plus petit entier m tel que $c_m \neq 0$. On sait alors que g, définie par $g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ si $z \neq a$ et $g(a) = c_m$, vérifie les conditions demandées. Par continuité de g, on peut alors déduire que a est un point isolé de Z, puisque g est non nul sur un voisinage de a.

Le fait que Z ne contienne aucun point d'accumulation implique que Z contient un nombre fini de points sur toute boule de rayon n, et donc que Z est au plus dénombrable.

De tout ça on déduit que si a est dans Z', alors il y a un disque autour de a qui est aussi dans Z'. Donc Z' est ouvert, puisqu'il contient un disque centré sur a pour tout a dans Z'. Mais il est aussi fermé, puisqu'il est un ensemble de points d'accumulations. Donc s'il n'est pas vide et que l'on travaille dans un connexe, Z' est égal à Ω.$\square$

On remarque au passage que deux fonctions holomorphes égales sur un ensemble ayant un point d'accumulation sont donc nécéssairement égales (leur différence est holomorphe et nulle sur un ensemble ayant un point d'accumulation). Ce résultat est connu sous le nom de **principe de prolongement analytique**.

Proposition 11 (Principe du prolongement analytique) *Si deux fonctions holomorphes sont égales sur un ensemble ayant un point d'accumulation alors elles sont égales partout où elles sont définies.*

Définition 12 *On appelle m l'***ordre** *du zéro de f en a.*

Si f est holomorphe sur un ouvert Ω privé d'un point a, et n'est pas holomorphe en a, on dit que f admet une **singularité isolée** *en a.*

La singularité est dite **artificielle** *si en changeant $f(a)$ on peut rendre f holomorphe en a.*

Théorème 13 *Si f admet une singularité isolée en a et est bornée sur un voisinage de a, alors la singularité est artificielle.*

Démonstration : • On définit h par $h = (z \mapsto (z-a)^2.f(z))$, et $h(a) = 0$.

• h est holomorphe, on la développe en série entière, $h(z) = \sum_{n \geq 2} c_n.(z-a)^n$ (h est nulle et de dérivée nulle en a, puisque f est bornée sur un certain voisinage de a).

• Il ne reste alors plus qu'à poser $f(a) = c_2$.$\square$

On peut faire encore plus fort :

Théorème 14 *Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, alors l'un des cas suivants se produit :*

- f admet une singularité artificielle en a ou pas de singularité du tout

- il existe des c_i en nombre fini tels que $z \mapsto f(z) - \sum \frac{c_i}{(z-a)^i}$ admette une singularité artificielle en a.

- L'image de tout voisinage de a par f est dense dans $\mathbb{C}$

Démonstration :
• Supposons qu'on ne soit pas dans le troisième cas, et choisissons z tel que z n'appartienne pas à l'adhérence de $f(D'(a,r))$ avec $r > 0$.

• Définissons $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$

• g est holomorphe sur $D'(a,r)$, et est bornée dans un voisinage de a ; donc g est prolongeable en une fonction holomorphe sur $D(a,r)$.

• Si $g(a) \neq 0$, alors f est prolongeable en une fonction holomorphe, et on n'en parle plus, c'est le premier cas.

• Sinon, alors on considère m l'ordre du zéro de g en a, et on développe en série entière $z \mapsto \frac{(z-a)^m}{g(z)}$.

• La flemme de finir, mais c'est pas très dur à partir de là...□

Définition 15 *Dans le deuxième cas,* $\sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{(z-a)^i}$ *est appelé* **partie principale du pôle de f en a** *; m est appelé l'ordre du pôle en a.*

c_1 est appelé **résidu** *de f en a ; on le note $Res(f;a)$.*

Dans le troisième cas, on dit que f a une **singularité essentielle** *en a.*

Dans le premier cas, on dit que f a une **singularité artificielle** *en a.*

Théorème 16 *On se donne f une série entière, $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n.(z-a)^n$, pour $|z| < R$. Alors pour tout r tel que $0 < r < R$ on a*

$$\sum_{\mathbb{N}} |c_n|^2.r^{2n} = \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\Pi} |f(a+re^{i\theta})|^2.d\theta$$

Démonstration : Considérer la formule de Parseval (voir théorème **??**), avec la base des $\theta \mapsto e^{-in\theta}$.□

Quelques corollaires pas trop difficiles :

Corollaire 17 (Théorème de Liouville) *Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier (On dit que cette fonction est* **entière** *) est soit constante soit non bornée.*

- si f holomorphe n'est pas constante sur un domaine (i.e. ouvert connexe) Ω, alors tout voisinage de a contient un point b tel que $|f(b)| > |f(a)|$.

Autre corollaire :

Théorème 18 (Estimations de Cauchy) *f holomorphe sur un disque ouvert D de rayon R, $|f|$ bornée par M sur D, alors $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}$ pour tout $n \geq 0$.*

Ceci servira pour le théorème 19 et pour le théorème 69.

Passons maintenant à des propriétés de passage à la limite :

Théorème 19 *Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur Ω tendant vers f uniformément sur tout compact de Ω. Alors f est holomorphe, et les f_n' convergent uniformément sur tout compact vers f'.*

Démonstration :

• f est continue comme limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions continues.

• Pour le caractère holomorphe de f, on regarde ce qu'il se passe sur des diques ouverts (Ω étant réunion de tels disques) et il suffit ensuite de considérer l'intégrale de f sur le contour d'un triangle inclus dans un disque (un tel disque étant convexe) ; l'intégrale d'une limite uniforme étant la limite de l'intégrale, on déduit que l'intégrale de f sur tout triangle est nulle. Le théorème de Morera (voir théorème 9) permet de conclure.

• On utilise ensuite le théorème 18 pour voir que $|f'(z) - f_n'(z)| \leq \frac{1}{r} \|f - f_n\|_K$, avec K un compact ; d'où la convergence uniforme des dérivées, et le résultat désiré.□

Théorème 20 *On suppose Ω convexe, $a_1, ..., a_n$ des points distincts de Ω, et f holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_1, ..., a_n\}$. On suppose que f admet en pôle en chaque a_i, et on se donne un chemin fermé γ ne passant pas par les a_i. Alors*

$$\frac{1}{2i\Pi} \int_\gamma f(z).dz = \sum_{k=1}^{n} Res(f; a_k).Ind_\gamma(a_k)$$

Démonstration : On applique le théorème de Cauchy à la fonction f moins ses parties principales en les a_i ; l'intégrale de cette fonction est donc nulle. Il ne reste alors qu'à considérer l'intégrale des parties principales, ce qui est facile au vu de résultats antérieurs (voir le théorème 4, et le fait que x^n pour $n \neq -1$ a une primitive holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Théorème 21 • *Si f est holomorphe et admet un zéro d'ordre m en a, alors le résidu de f'/f en a est m.*

• *Si f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a\}$, alors le résidu de f'/f en a est égal à $-m$.*

Démonstration : Pas dur... Il suffit de réécrire la fonction soit en divisant par $(z - a)^m$ (premier •), soit en soustrayant la partie principale du pôle (second •)...□

Théorème 22 *Soit f une fonction holomorphe, et γ un chemin $\theta \mapsto a + re^{i\theta}$, avec $\overline{D}(a, r)$ inclus dans Ω.*

On définit $\Gamma = f \circ \gamma$. Soit w n'appartenant pas à Γ^*.

Alors le nombre de zéros de $f - w$ dans $D(a, r)$, comptés avec leurs ordres de multiplicité, est égal à l'indice de w par rapport à Γ.

Démonstration : Le nombre de zéros de $f - w$ dans $D(a, r)$ est égal à la somme des résidus de $f'/(f - w)$ dans $D(a, r)$, et cette somme est bien l'indice de w par rapport à Γ.□

Théorème 23 (Théorème de l'image ouverte) *On se donne Ω un ouvert connexe, i.e. un domaine, et f holomorphe sur Ω. Alors si f n'est pas constante, et pour tout z_0 dans Ω, f induit sur un voisinage ouvert V de z_0 une application surjective de V sur un ouvert W, telle que pour tout w dans $W \setminus \{w_0 = f(z_0)\}$, il y ait exactement m points distincts $z \in V$ dont l'image par f est w, avec m l'ordre du zéro de $f - w_0$ en z_0.*

Démonstration :

• on considère un cercle orienté suffisamment petit autour de w_0 pour que le disque D de même centre et de même rayon ne comporte pas de zéro ni de $f - w_0$ ni de f' dedans, à part z_0 lui-même.

• on considère le contour de ce cercle suffisamment petit

• on considère l'image par f de ce contour, et la composante connexe W de w_0 dans le complémentaire de cette image (W est ouvert comme composante connexe d'un ouvert, le complémentaire de l'image d'un compact étant évidemment fermé puisque complémentaire d'un compact (rappelons que l'image d'un compact par une application continue est un compact)).

• on prend alors pour V l'intersection du disque ouvert D et de l'image réciproque de W.

• L'indice de w_0 par rapport à $\Gamma = f \circ \gamma$ est m, ainsi donc que l'indice de tout w dans V. D'où le résultat...□

Remarquons un corollaire intéressant, qui donne son nom à ce théorème ; l'image de tout ouvert par une fonction holomorphe est un ouvert.

Il est clair au vu du théorème précédent que si l'on a $f'(z)$ non nul, avec f holomorphe, alors on a localement une bijection autour de z. On peut améliorer ce résultat ; la réciproque locale, est elle aussi holomorphe ; cela fait l'objet du théorème suivant.

Théorème 24 *Soit f holomorphe, f de dérivée non nulle en a alors on peut trouver un ouvert V contenant a tel que f induise une bijection de V sur $f(V)$; la réciproque de f est holomorphe sur $f(V)$.*

Démonstration : Tout ce qui reste à prouver est le caractère holomorphe de la réciproque g de f sur $f(V)$.

Pour cela on considère $\frac{g(z)-g(a)}{z-a}$, on utilise la continuité de g (qui découle du fait que f est une application ouverte, i.e. que l'image de tout ouvert par une fonction holomorphe est une fonction holomorphe), et le fait que $f'(a)$ est non nul, et tout ça coule de source...$\square$

On va maintenant montrer que l'on a le droit de modifier "un peu" une courbe sans changer l'indice d'un point par rapport à cette courbe.

Théorème 25 *Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins d'intervalle de paramétrage $[0,1]$ (ou autre chose...) et si pour tout $t \in [0,1]$ on a $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq |\gamma_1(t)|$, alors $Ind_{\gamma_1}(0) = Ind_{\gamma_2}(0)$.*

Démonstration :
- On pose $\gamma = \gamma_2/\gamma_1$.

- On a alors $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_2} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1}$, donc en intégrant sur $[0,1]$ on déduit que la différence entre l'indice de 0 par rapport à γ_2 et l'indice de 0 par rapport à γ_1 est l'indice de 0 par rapport à γ.

- $|1 - \gamma(t)| < 1$; donc l'indice de 0 par rapport à γ est 0.$\square$

Corollaire 26 (Théorème de Rouché) *f et g holomorphes sur Ω, le disque fermé de centre a et de rayon r étant inclus dans Ω, et $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ sur le cercle de centre a et de rayon r. Alors f et g ont le même nombre de zéros sur le disque ouvert de centre a et de rayon r (en comptant leurs multiplicités).*

Démonstration : On considère $\gamma(t) = e^{2i\Pi t}$, et $\gamma_1 = f \circ \gamma$ et $\gamma_2 = g \circ \gamma$. On applique alors le théorème précédent...$\square$

Cela servira notamment pour montrer le théorème 27 (preuve d'ailleurs fort sympathique). Ainsi que le rappelle Rudin dans [16], on peut aussi utiliser ce résultat pour montrer que tout polynôme de degré n a n racines dans $\mathbb{C}$ (en montrant que tout polynôme de degré n a le même nombre de zéros que z^n, dans un disque de rayon suffisamment grand.

1.4 Topologie de $H(\Omega)$

Pour cela on consultera2.2.2.

1.5 Zoologie des applications holomorphes

1.5.1 Théorème de Montel

Théorème 27 (Théorème de Montel) *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, K compact de Ω, $M \geq 0$, $m > 0$, $k \in K$. Alors il existe un certain $NombreMaxDeZeros$ tels que le nombre de zéros de f dans K, pour f bornée [a] par M sur K et telle que $|f'(k)| \geq m$, est majoré par $NombreMaxDeZeros$.*

[a] En module.

Démonstration :

• On considère l'ensemble U_n des applications f holomorphes sur Ω telles que le nombre de zéros de f sur K soit $< n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; on montre que U_n est ouvert.

- Pour cela donnons-nous f dans U_n

- Soit $NombreZeros$ le nombre de zéros de f dans K. $NombreZeros$, par définition de U_n, est fini.

- Considérons les disques fermés $\overline{D}(z_i, \epsilon_i)$ inclus dans Ω, et tels que f ne s'annule pas sur le disque ouvert, sauf peut-être en z_i.

- Il est clair que les disques ouverts $D(z_i, \epsilon_i)$ recouvrent K.

- On en extrait un nombre fini. Les $D(z_i, \epsilon_i)$ pour $i \in I$, avec I fini, recouvrent donc K.

- On considère alors $LesCercles$ le compact constitué des cercles de rayon ϵ_i et de centre les z_i pour i dans I.

- On considère alors η l'inf de f sur $LesCercles$.

- On considère alors l'ensemble V des fonctions g telles que $sup_{LesCercles}|g - f|$ est inférieur strictement à η. Par le théorème de Rouché 26, les fonctions g dans V ont un nombre de 0 égal au nombre de zéros de f.

- Le résultat est ainsi prouvé.

• On en déduit donc que l'application qui à f associe son nombre de zéros sur K est semi-continue supérieurement.

• L'ensemble $\mathcal{F}$ des applications f bornées en module par M sur K et telles que $|f'(k)| \geq m$ étant compact, le nombre de zéros est borné, le maximum est atteint (car une application semi-continue supérieurement sur un compact atteint son maximum, voir proposition **??**), et il n'est pas infini par la condition $|f'(k)| \geq m$.$\square$

1.5.2 Fonctions holomorphes majorées par un polynôme

Théorème 28 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et P un polynôme, avec $|f| \leq |P|$. Alors f est un polynôme, de degré $\leq$ au degré de P.*

Démonstration :
Il suffit d'utiliser le théorème 18, qui nous dit que

$$|f^{(n)}(0)| \leq n!M/R^n$$

avec M un majorant de $|f|$ sur le disque de centre 0 et de rayon R. Puisque $M \leq L + K \times R^p$ (par hypothèse), on en déduit :

$$|f^{(n)}(0)| \leq n!(L + K \times R^p)/R^n$$

et donc $f^{(n)} = 0$ pour $n > p$, d'où le résultat.$\square$

1.5.3 Fonctions holomorphes tendant vers l'infini en l'infini

Théorème 29 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose*

$$lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = \infty$$

Alors f est une fonction polynôme.

Démonstration :
• Soit Z l'ensemble des zéros de f.

• Au vu de l'hypothèse, pour z assez grand en module, $|f(z)| \geq 1$. Donc Z est inclus dans un compact K.

• Si Z est infini, alors Z possède un point d'accumulation dans K, et donc d'après le théorème 10 f est nulle. Ce cas étant résolu, on peut supposer Z fini.

• On considère alors $1/f$. C'est une fonction holomorphe sur le complémentaire de Z. Sur Z, en utilisant le théorème 10, on constate que $1/f$ admet des pôles, et non pas des singularités essentielles ; on peut donc lui soustraire une fraction rationnelle P/Q, afin que $1/f - P/Q$ soit holomorphe.

• $1/f - P/Q$ est majoré par un polynôme, donc d'après le théorème 28 c'est un polynôme.

• $1/f - P/Q = R$, avec R un polynôme, donc $f = (Q-R)/P$, fraction rationnelle.

• f étant holomorphe, f n'a pas de pôle, et donc se simplifie en un polynôme.□

1.5.4 Sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ - Fonctions holomorphes sur $\widehat{\mathbb{C}}$

Définition 30 (Sphère de Riemann) *Soit $\widehat{\mathbb{C}}$ l'espace topologique obtenu en rajoutant un point, noté ∞, à $\mathbb{C}$, une base de voisinages de ce point étant constituée des ensembles $U \cup \{\infty\}$, où U parcourt les complémentaires dans $\mathbb{C}$ des parties compactes (en somme, c'est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$). On note S^2 la sphère unité de l'espace $\mathbb{R}^3$.*

La projection stéréographique depuis le pôle nord N

$$p_N : \begin{array}{rcl} \mathcal{S}^2 & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (x,y,t) & \mapsto & (x+iy)/(1-t) \text{ si } t \neq 1 \\ N & \mapsto & \infty \end{array},$$

est un homéomorphisme de la sphère $\mathcal{S}^2$ sur $\widehat{\mathcal{C}}$.

La droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est le quotient de $\mathbb{C}^2 \backslash_{\{(0,0)\}}$ par l'action diagonale par multiplication du groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls $\mathbb{C}^*$, munie de la topologie quotient. La classe d'un couple (z_1, z_2) de nombres complexes non tous les deux nuls est notée $(z_1 : z_2)$.

L'application

$$r : \begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (z_1, z_2) & \mapsto & z_1/z_2 \text{ si } z_2 \neq 0 \\ (1:0) & \mapsto & \infty \end{array}$$

est un homéomorphisme de la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

Proposition 31 *Soit a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$. Alors l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{C}^2$ défini par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

passe au quotient en un homéomorphisme de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui, lu sur $\widehat{\mathbb{C}}$, est l'homographie

$$h_A : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

prolongée par $h_A(-d/c) = \infty$ et $h_A(\infty) = a/c$ si $c \neq 0$, ces deux conditions étant remplacées par $h_A(\infty) = \infty$ si $c = 0$. On a ainsi défini un morphisme injectif de $PSL(2, \mathbb{C})$ dans Homéo($\widehat{\mathbb{C}}$).

La droite projective complexe hérite d'une structure de variété complexe de dimension (complexe) 1. La sphère de Riemann est $\widehat{\mathbb{C}}$ munie de la structure complexe héritée de celle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par le biais de r. Celle-ci peut être décrite par un jeu de deux cartes. Soit P_1 l'ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ correspondant aux couples ayant la première coordonnée non nulle et P_2 l'ouvert correspondant aux couples ayant la deuxième coordonnée non nulle. Les ouverts correspondants dans $\widehat{\mathbb{C}}$ sont respectivement $U_1 = \mathbb{C}$ et $U_2 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, dont l'intersection est $\mathbb{C}^*$.

La matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui permute les coordonnées dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, réalise un homéomorphisme (de changement de carte) entre P_1 et P_2, qui est holomorphe, car il se lit $z \mapsto 1/z$ dans $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^*$.

Une application $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est alors dite holomorphe (respectivement méromorphe, où f n'est alors supposée définie qu'en dehors de l'ensemble de ses pôles) si elle est holomorphe (respectivement méromorphe) dans les cartes, c'est-à-dire, d'une part, dans $\mathbb{C}$ au sens usuel et, d'autre part, dans U_2 au sens que $z \mapsto f(1/z)$ est holomorphe (respectivement méromorphe) dans $\mathbb{C}$ au sens usuel.

Une application $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ est alors holomorphe si et seulement si elle est méromorphe en dehors de l'image réciproque de ∞.

Proposition 32 *Les applications holomorphes de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{C}$ sont les fonctions constantes.*

<u>Démonstration :</u> Soit f une application holomorphe de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{C}$. Par continuité en ∞, la fonction f est bornée sur le complémentaire d'une partie compacte de $\mathbb{C}$.

Comme f est également bornée sur ce compact, f est bornée donc constante. □

Théorème 33 *Les applications holomorphes de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$ sont les fractions rationnelles.*

Démonstration : Soit f une telle application. On suppose f non constante. Comme les fonctions holomorphes non constantes, f a ses zéros isolés, si bien que f n'admet qu'un nombre fini de pôles et de racines (car $\widehat{\mathbb{C}}$ est compact). Soit P une fraction rationnelle ayant pour racines (comptées avec multiplicité) les pôles de f et pour pôles les racines de f, de sorte que fP n'ait ni pôle, ni racine. La fonction fP définit alors une application holomorphe de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{C}$, qui est constante d'après la proposition précédente, si bien que f est une fraction rationnelle. □

Théorème 34 *Les automorphismes de la sphère de Riemann sont les homographies.*

Démonstration : Si $P = A/B$ est une fraction rationnelle et w un élément de $\widehat{\mathbb{C}}$, le nombre de solutions dans $\widehat{\mathbb{C}}$, comptées avec multiplicité, de l'équation $P(z) = w$ est le maximum des degrés de A et de B. Par conséquent P est bijective si et seulement si A ou B est de degré 1, l'autre étant de degré 0 ou 1. □

Proposition 35 *Les applications holomorphes de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\widehat{\mathbb{C}}$ qui sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ au sens usuel sont les polnômes.*

Démonstration : Soit f une telle application. Par le même raisonnement que précédemment, f est constante sauf si $f(\infty) = \infty$. Pla cons-nous donc dans ce dernier cas de figure. La fonction f admet alors un nombre fini (éventuellement nul) de zéros, car une infinité de zéros aurait un point d'accumulation dans $\widehat{\mathbb{C}}$, donc dans $\mathbb{C}$ puisque $f(\infty) = \infty$ et f serait alors nulle.

Soit P un polynôme ayant pour racines (comptées avec multiplicité) les zéros de f, de sorte que la fonction $g = f/P$ n'ait pas de racine dans $\mathbb{C}$. Si $g(\infty) = \infty$, alors la fonction $1/g$ définit une application holomorphe de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{C}$ qui s'annule uniquement en ∞, ce qu'interdit la proposition précédente. On a donc $g(\infty) = \lambda$ pour un certain nombre complexe λ. La proposition précćdente montre alors que $g = \lambda$, si bien que $f = \lambda P$. □

Chapitre 2

Analyse fonctionnelle

En analyse fonctionnelle, une référence classique, détaillée et complète, est le livre [2].

2.1 Résultats fondamentaux

2.1.1 Hahn-Banach

⊡ Le théorème

Théorème 36 (Théorème de Hahn-Banach des $\mathbb{R}$-espace vectoriel) *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , et p une application de E dans $\mathbb{R}$ telle que :*
• $\forall (x,y) \in E, p(x+y) \leq p(x)+p(y)$
• $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, p(\lambda.x) = \lambda.p(x)$
Alors toute forme linéaire l sur F sous-espace vectoriel de E telle que $l(x) \leq p(x)$ peut être prolongée en une forme linéaire L sur E telle que $\forall x,\ L(x) \leq p(x)$.

NB : noter que p norme ou semi-norme convient.

voir la partie "applications" juste un peu plus bas.

Démonstration : Cette preuve fait intervenir le lemme de Zorn (voir lemme **??**).

On considère l'ensemble I des formes linéaires f prolongeant l sur un certain sous-espace vectoriel $D(f)$ de E contenant F, et telle que $f \leq p$ pour tout x de $D(f)$.

On munit I de la relation d'ordre définie par

$$f_1 \leq f_2 \iff D(f_1) \subset D(f_2) \wedge \forall x \in D(f_1) f_1(x) = f_2(x)$$

I est inductif. En effet, si J est une partie de I totalement ordonnée, alors la fonction f définie par $D(f) = \cup_{g \in J} D(g)$ et $f(x) = g(x)$ si $g \in J$ et $x \in D(g)$ est un majorant de J.

Par le lemme de Zorn (lemme **??**), on en déduit que I possède un élément maximal f.

On suppose maintenant que $D(f) \neq E$ (on va chercher à montrer que cette hypothèse est contradictoire). Alors on considère y n'appartenant pas à $D(f)$. On définit f' sur $D(f) + \mathbb{R}.y$ par $f'(x + t.y) = f(x) + \alpha.t$, α étant choisi tel que pour tout x dans $D(f)$ on ait $\alpha \leq p(x + y) - f(x)$ et $\alpha \geq f(x) - p(x - y)$; ce qui est possible car $f(x_1) + f(x_2) \leq p(x_1 + x_2) \leq p(x_1 + y) + p(x_2 - y)$.

D'où le résultat.□

⊡ **Des applications**

◇ **Sur les formes linéaires**

Corollaire 37 *Soit g une forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E prolongeant g et telle que $\|f\| = \|g\|$.*

Démonstration : Application directe du théorème de Hahn-Banach.□

(la norme sur l'espace dual, évoquée ici, est la norme usuelle, ici la norme de f, forme linéaire continue, est le sup des $\|f(x)\|$ pour x de norme 1)

Corollaire 38 *Soit x dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, alors il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $\|f\| = \|x\|$ et $f(x) = \|x\|^2$.*

Démonstration : Il suffit de prolonger une application linéaire adéquate définie sur $\mathbb{R}.x$.□

Corollaire 39 *Pour tout x d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E, on a $\|x\| = sup_{f \in E' / \|f\|_\infty = 1} \|f(x)\| = max_{f \in E' / \|f\|_\infty = 1} \|f(x)\|$.*

Démonstration : L'inégalité $\|x\| \geq \sup_{f \in E' / \|f\|_\infty \leq 1} \|f(x)\|$ est évidente. Choisissons alors f_0 donné par le corollaire précédent ($\|f_0\| = \|x\|$ et $f_0(x) = \|x\|^2$). On a

$$\|f\|_\infty = \frac{\|f_0\|_\infty}{\|x\|} = 1$$

$$\|f(x)\| = \frac{\|f_0(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$$

D'où le résultat annoncé.□

Ce corollaire servira pour la partie 2.8.1.

◇ **En géométrie**

Théorème 40 (>Séparation des convexes 1) *Soient A et B des convexes non vides disjoints d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E ; si A est ouvert, alors il existe une forme linéaire continue f sur E et un réel α tels que $f(x) \leq \alpha$ pour $x \in A$ et $f(x) \geq \alpha$ si $x \in B$.*

On notera que cela signifie précisément qu'il existe un hyperplan affine fermé (rappelons que l'image inverse d'un singleton par une forme linéaire non nulle est un hyperplan fermé si et seulement si cette forme linéaire est continue) séparant (au sens large) A et B.

On peut en fait étendre le résultat à $f(x) < \alpha$ (et non simplement $\leq$).

Démonstration : On va avoir besoin de deux lemmes.

Lemme 41 *On se donne U un ouvert convexe contenant 0, et on définit μ_U* **la jauge** *associée à U, c'est-à-dire que $\mu_U(x)$ est l'inf des réels $t > 0$ tels que $t^{-1}.x \in U$.*

Alors il existe un certain réel M tel que

$$\forall x \ \mu_U(x) \leq M.\|x\|$$

$$U = \{x / \mu_U(x) < 1\}$$

$$\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}^+ \ \mu_U(\lambda.x) = \lambda.\mu_U(x)$$

$$\forall (x, y) \in E \ \mu_U(x + y) \leq \mu_U(x) + \mu_U(y)$$

(les deux dernières conditions permettent d'utiliser le théorème de Hahn-Banach)

Démonstration : Pas très très dur (en le faisant dans cet ordre)...□

Lemme 42 *Soit U un convexe non vide et y n'appartenant pas à U. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E avec $f(x) < f(y)$ pour tout x dans E.*

Démonstration :

• On montre le résultat dans le cas où 0 appartient à U, et on généralise par une simple translation

• En supposant donc que $0 \in U$, on considère la jauge μ_U (définie comme précédemment).

• On définit la forme linéaire g sur $\mathbb{R}.y$ par $g(t.y) = t$.

• Il est clair que $g(x) \leq \mu_U(x)$

• On peut donc prolonger g à E tout entier ; appelons f la forme linéaire obtenue avec $f \leq \mu_U$.

• f est continue de par le lemme 41 (1ère propriété), et f vérifie les hypothèses demandées (deuxième propriété du lemme 41).□

On peut maintenant en revenir à la démonstration du théorème, toujours non démontré.

• On note $U = \{x - y/(x, y) \in A \times B\}$.

• U est convexe

• U est ouvert (car A l'est)

• U ne contient pas 0

• On considère la fonction f donnée par le lemme 42 avec $y = 0$, c'est-à-dire négative sur tout U.

• Le fait que f soit négative sur tout U se traduit exactement par le fait que pour tout $(x, y) \in A \times B$ on ait $f(x) < f(y)$. On considère alors α le sup des $f(x)$ pour x dans A, et le résultat est démontré.

L'extension ($<$ au lieu de $\leq$) se montre comme suit :

- supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = \alpha$.

- A ouvert implique qu'il existe ϵ tel que $B(x_0, \epsilon)$ soit incluse dans A. (1)

- f non nulle implique qu'il existe g dans E de norme 1 tel que $f(g) > 0$. (2)

- (1) implique que $x_0' = x_0 + \frac{\epsilon}{2} g \in A$.

- (2) implique que $f(x_0') > \alpha$ ce qui est absurde !□

Théorème 43 (Séparation des convexes 2) *Soient A et B deux convexes disjoints de E (toujours un espace vectoriel normé), non vides. On suppose A fermé et B compact ; alors il existe une forme linéaire continue $f \neq 0$ avec $f(A) \leq c_1$ et $f(B) \geq c_2$ avec $c_1 < c_2$.*

Cela signifie exactement que A et B sont séparés par un hyperplan fermé (puisque image inverse d'un singleton par une forme linéaire continue non nulle) au sens strict.

On montrera en utilisant ce théorème que la topologie faible est séparée ; voir le corollaire 77.

Démonstration : • On se donne ϵ positif.

• On note A_ϵ le ϵ-voisinage de A (ie la réunion des boules ouvertes de rayon ϵ de centre dans A), et B_ϵ le ϵ-voisinage de B.

• On remarque que A_ϵ et B_ϵ sont ouverts (comme tous les ϵ voisinages)

• Pour ϵ assez petit, A_ϵ et B_ϵ sont disjoints

• D'après le théorème précédent, on peut séparer A_ϵ et B_ϵ au sens large par un hyperplan fermé.

• On a $f \leq \alpha$ sur A et $f > \alpha$ sur B compact donc $f \geq \beta > \alpha$ sur B.$\square$

On retiendra donc que l'on peut séparer dans un espace vectoriel normé par un hyperplan fermé :

• au sens large, deux convexes disjoints dont l'un (au moins) est ouvert

• au sens strict, deux convexes disjoints dont l'un est fermé et l'autre compact.

◇ **En topologie**

Corollaire 44 *Soit F un sous-espace vectoriel de E (qui est toujours un espace vectoriel normé), qui n'est pas dense dans E. Alors il existe une forme linéaire continue sur E, non nulle, qui est nulle sur F.*

Démonstration : • On se donne x qui n'est pas dans l'adhérence de F.

• $\{x\}$ est compact.

• On peut séparer F et $\{x\}$ au sens strict ; soit f la forme linéaire correspondante. On suppose que $f(F) < K < f(x)$

• $f(F) < K$ implique $f(F) = 0$, puisque F est un espace vectoriel .□

Corollaire 45 *Si F est un sous-espace vectoriel de E et si toute forme linéaire continue sur F est nulle sur E, alors F est dense dans E.*

Le théorème de Runge **??** sera démontré grâce à ce corollaire.

Démonstration : C'est une reformulation du corollaire précédent.□

2.1.2 Le théorème de Baire et ses conséquences

Théorème 46 (Théorème de Baire) *Soit X un espace topologique. Si X est localement compact, ou s'il est métrique complet, alors*
• Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense
• Une réunion dénombrable de fermés recouvrant X comporte un fermé d'intérieur non vide

Comme le signale le livre [2], on peut en fait énoncer plus précisément que l'intérieur de la réunion d'une suite de fermés d'intérieurs vides est vide.

Démonstration : Ce théorème ayant été prouvé (voir théorème **??**) je ne fais que le rappeler ici. Rappelons juste que les deux • sont équivalents (considérer les complémentaires des fermés du deuxième •)□

Notons que le théorème de Baire est en particulier valable pour les espaces de Banach.

Théorème 47 (Théorème de Banach-Steinhaus) *Ce théorème est dit aussi théorème de la* **borne uniforme**.

On se donne E et F des espaces de Banach, et $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F.

Si pour tout x, $\exists M / \forall i \in I / \|T_i(x)\| < M\|x\|$.

Alors $\exists M / \forall i \in I / \|T_i\| < M$.

Ce théorème est plus intuitif sous son petit nom de "théorème de la borne uniforme". L'hypothèse est que l'on a une famille d'applications bornées sur chaque point ; la conclusion est que l'on peut les borner uniformément (bien vérifier que l'on a des Banach).

⚠ Notez bien que la famille des T_i n'est pas nécessairement dénombrable !

Démonstration : La aussi je ne donne pas de preuve, puisqu'elle se trouve au théorème **??**.□

On verra une application à la transformation de Toeplitz (proposition **??**), qui fournit une preuve élégante de la moyenne de Césaro (corollaire **??**).

Corollaire 48 *Soient E et F deux Banach, et T_n une suite d'applications linéaires continues de E dans F, avec $T_n(x)$ convergeant pour tout x - on note par la suite $T(x)$ sa limite.*

Alors $\|T_n\|$ est borné, T est linéaire continue, et $\|T\| \leq liminf\|T_n\|$.

Démonstration : Application directe du théorème de Banach-Steinhaus.□

Corollaire 49 *Soit E un espace vectoriel normé et X un sous-ensemble de E.*

On suppose que pour tout f appartenant à E' l'ensemble $f(X)$ est borné.

Alors X est borné.

Démonstration : On applique Banach-Steinhaus dans E', avec pour famille d'applications linéaires les applications qui à $f \in E'$ associe $f(x)$, pour $x \in X$.

Il faut bien noter que le dual d'un espace vectoriel normé est un Banach, et que ce résultat est nécessaire à cette preuve (voir corollaire **??**).

Noter aussi que ce résultat exprime que "faiblement borné" implique "fortement borné".

Cette façon de voir est d'ailleurs une belle illustration de la notion de "borne uniforme". Si une partie est bornée suivant "toutes les directions" (traduire : suivant toute forme linéaire), alors elle est bornée " tout court "...□

Théorème 50 (Théorème de l'application ouverte) *Soient E et F des espaces de Banach, et T une application linéaire continue surjective de E dans F. Alors T est ouverte (c'est à dire que l'image de tout ouvert par T est un ouvert.*

Démonstration : voir le théorème **??**.□

Bien entendu, dans le cas où T est bijective, on en déduit le théorème d'isomorphisme de Banach **??**, qui stipule qu'une bijection linéaire continue est de réciproque continue (et donc est un homéomorphisme).

Il faut noter un corollaire important : si un espace vectoriel E muni de la norme N_1 est un espace de Banach, et si E muni de la norme N_2 est aussi un espace de Banach, alors si N_1 est plus fine que N_2, alors en fait N_2 est équivalente à N_1.

Théorème 51 (Théorème du graphe fermé) *Soit $T : E \to F$, linéaire entre les Banach E et F. L'application T est continue si et seulement si le graphe de T est fermé dans $E \times F$.*

Démonstration : Voir le théorème **??**.□

Voir le théorème 81.

2.1.3 Autres définitions et propriétés indispensables

Il est indispensable de connaître la topologie faible, la topologie quotient, la topologie produit, la topologie forte, pour la suite. On travaillera exclusivement sur un espace de Banach E, son dual sera un espace de Banach noté E' (comme tout dual d'espace vectoriel normé). On notera S la sphère unité de E, c'est à dire l'ensemble des vecteurs de norme 1.

En résumé (on se reportera à la partie topologie **??** pour toute les preuves) :

• Dans un espace vectoriel normé les opérations algébriques (multiplications par un scalaire et somme) sont continues. La norme est continue elle aussi.

• La topologie associée à la norme sur E est parfois appelée topologie forte.

• La topologie faible sur E est la topologie engendrée par la famille des applications linéaires continues ; c'est a dire que c'est la topologie la moins fine qui rendre toutes ces applications linéaires continues continues (non c'est pas une erreur s'il y a deux fois le mot continu !), c'est à dire qu'une base d'ouverts est constituée par les intersections <u>FINIES</u> de "bandes" de la forme $\{x/|f_i(x - x_0)| < \epsilon_i\}$, pour certains f_i dans E', certains $\epsilon_i > 0$, et un certain x_0 dans E. La boule unité fermée de E' (déterminée par la norme $\|.\|_\infty$) ci-dessous rappelée) est compacte POUR LA TOPOLOGIE FAIBLE * (théorème de Banach Alaoglu).

• la topologie forte sur le dual est la topologie engendrée par la norme $\|.\|_\infty$ qui à $f \in E'$ associe $sup_{x \in S}\|f(x)\|$. La topologie forte est plus fine que la topologie faible, elle-même plus fine que la topologie faible *.

• Etant donné X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X, la topologie quotient est l'ensemble des parties Y de $X/\mathcal{R}$ telles que $p^{-1}(Y)$ soit un ouvert de X, avec p la projection canonique de X sur $X/\mathcal{R}$. Il faut savoir que p est continue et ouverte.

• La topologie induite par une famille applications de X dans d'autres espaces topologiques, est la topologie la moins fine qui rende toutes ces applications continues. Une application f à valeurs dans X muni de la topologie engendrée par la famille des f_i est continue si et seulement si sa composée avec chaque f_i est continue. Il faut noter que la topologie faible est la topologie engendrée par les applications linéaires continues.

• La topologie produit, définie sur un produit d'espaces topologiques, est la topologie engendrée par les projections canoniques sur chacun des espaces topologiques du produit. Une applications à valeurs dans le produit est alors continue si et seulement si chacune de ses projections canoniques est continue. Un produit est séparé si et seulement si chacun des facteurs l'est. Le théorème de Tykhonov affirme qu'un produit de compacts est compact.

2.1.4 Quelques convergences dans les espaces de fonctions

⊡ Quelques rappels de topologie

Les résultats sont parfois donnés sans preuve ; on se réfèrera à la partie **??**.

◇ Convergence simple

Définition 52 (convergence simple) *On dit qu'une suite f_n d'applications de X dans Y avec Y un espace topologique* **converge simplement** *vers f si pour tout x dans X $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ pour n tendant vers $+\infty$.*

Proposition 53 (La convergence simple correspond-elle à une topologie ?) *Soit l'espace Y^X des applications de Y dans X, avec Y un espace topologique. La topologie produit sur Y^X a pour suites convergentes les suites simplement convergentes. C'est pourquoi on appelle cette topologie la* **topologie de la convergence simple**.

<u>**Démonstration :**</u>

• Soit f_n une suite d'éléments de Y^X, convergeant simplement vers une certaine fonction f. Montrons qu'elle converge aussi vers f pour la topologie produit.

Soit U un ouvert pour la topologie produit, contenant f . Alors (par définition) il existe $x_1, ..., x_n$ dans X et V_i voisinage de $f(x_i)$ tel que $\{g \in Y^X / \forall i \in [1, n], g(x_i) \in$

$V_i\} \subset U$. Il est alors clair qu'à partir d'un certain rang les f_n sont dans U.

• Supposons maintenant que f_n est une suite d'éléments de Y^X, convergeant vers une certaine fonction f pour la topologie produit. Donnons nous alors x dans X ; et U un voisinage de $f(x)$. Alors $V = \{g \in Y^X / g(x) \in U\}$ est un voisinage de f dans Y^X, donc f_n est dans V à partir d'un certain rang, donc $f_n(x) \in V$ à partir de ce même rang. Ceci montre que $f_n(x)$ tend vers $f(x)$.□

Grâce à ce résultat on obtient facilement quelques propriétés, dues à la stabilité de certaines propriétés topologiques par passage au produit :

Corollaire 54 (Caractéristiques de la topologie de la convergence simple) *On considère la topologie de la convergence simple sur Y^X.*

• *si Y est séparé la topologie de la convergence simple est séparée*

• *si Y est compact, alors la topologie de la convergence simple est compacte*

• *si Y est connexe (resp. par arcs), alors la topologie de la convergence simple est connexe (resp. par arcs).*

Démonstration : Un produit de séparés est séparé, un produit de compacts est compact, un produit de connexes est connexe, un produit de connexes par arcs est connexe par arcs.□

◇ **Convergence uniforme, convergence uniforme sur des parties**

Définition 55 *On dit qu'une suite f_n d'applications de X dans Y avec Y un espace métrique* **converge uniformément** *vers f si pour tout ϵ positif il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout x dans X $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon$.*

Etant donnée $\mathcal{S}$ une partie de $P(X)$, on dit que la suite (f_n) de fonctions de X dans Y (avec Y un espace métrique) est **uniformément convergente sur les éléments de** *$\mathcal{S}$ si pour tout $L \in \mathcal{S}$ la suite $(f_{n|L})$ est uniformément convergente sur L.*

Souvent, X sera un espace topologique localement compact et $\mathcal{S}$ sera l'ensemble des compacts de X.

Définition 56 (Topologie de la convergence uniforme) *Soit K un compact et F un espace métrique. L'espace des applications continues de K dans F, noté $C^0(K, F)$ est métrique avec la distance*

$$d(f, g) = sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$$

La topologie associée est dite **topologie de la convergence uniforme**.

Définition 57 (Topologie de la convergence uniforme sur tout compact) *Dans ce cas on peut définir la famille d'écarts (N_K), pour K compact non vide de X, par :*

$$N_K(f, g) = \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) \in [0, \infty]$$

Et la topologie engendrée par ces écarts a pour suites convergentes les suites uniformément convergentes sur les compacts de X. C'est pourquoi on appelle la topologie engendrée par ces applications **topologie de la convergence uniforme sur tout compact**.

Si la famille $(K_i)_{i \in I}$ (I non nécessairement dénombrable !) est telle que tout compact K de X est inclus dans un certain K_i, alors la famille des N_{K_i} suffit.

La topologie de la convergence uniforme sur tout compact a donc pour base d'ouverts les $N_K^{-1}(f, [0, \epsilon[)$ pour $\epsilon > 0$, K compact non vide et f application de X dans Y.

Proposition 58 (Métrisabilité : topologie de convergence uniforme) *Si X est en fait un espace topologique compact, et si on se limite à l'ensemble $C^0(X, Y)$ des applications continues de X dans Y alors l'application $d(f, g) = sup_X d(f(x), g(x))$ est une distance et définit une topologie (sur $C^0(X, Y)$) pour laquelle les suites convergentes sont les suites uniformément convergentes au sens de la définition 55.*

Proposition 59 (La topologie de la convergence uniforme sur tout compact est-elle métrisable ?) *On suppose X localement compact, réunion dénombrable de compacts K_n, $K_m \subset K_{m+1}$, Y métrique ; alors la topologie engendrée par la distance*

$$d(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{N_{K_k}(f, g)}{1 + N_{K_k}(f, g)}$$

admet pour suites convergentes les suites uniformément convergentes sur tout compact au sens de la définition 55.

Exemple : Soit $x \in K$. Montrer que la fonction qui à $f \in C^0(K,F)$ associe $f(x)$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme (resp. de la convergence uniforme sur tout compact).

$\diamond$ **Comparatif entre toutes ces notions de convergence**

Proposition 60 *Supposons que X est un espace topologique localement compact, et Y un espace métrique.*

Convergence pour la topologie de la convergence uniforme

$$\Downarrow$$

Convergence pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

$$\Downarrow$$

Convergence pour la topologie de la convergence simple

Topologies dues aux mesures

(X,μ) étant un espace mesuré, les espaces de fonctions $\mathcal{L}^p(X)$ et $L^p(X)$ ont été définis et étudiés en partie **??**.

Rappelons juste que $L^p(X)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalences de l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{R}$ pour la relation d'équivalence "être égales presque partout" qui contiennent au moins un élément dans $\mathcal{L}^p(X)$.

Rappelons aussi que $L^p(X)$, si X est réunion d'une suite croissante (pour l'inclusion) de compacts de mesure finie, pour $1 \leq p < \infty$, est le complété pour la norme $\|.\|_p = f \mapsto \sqrt[p]{\int_X |f|^p}$ de l'ensemble des fonctions continues à support compact (le résultat n'est pas valable pour $p = \infty$; ici l'adhérence serait simplement l'ensemble des applications continues qui, pour tout $\epsilon > 0$, sont inférieures à ϵ[1] en dehors d'un certain compact K_ϵ).

On définit en outre deux autres notions de convergence, liées à la notion de mesure : la convergence en mesure et la convergence presque partout.

[1]En module !

Définition 61 *Soit f_n une suite de fonctions de X dans Y, avec X un espace mesuré, et Y un espace topologique.*

On dit que f_n **converge presque partout** *vers f s'il existe N négligeable inclus dans X tel que f_n converge simplement vers f sur le complémentaire de N.*

Soit f_n une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ avec X un espace mesuré.

On dit que f_n **converge en mesure vers** *f si pour tout ϵ la limite pour $n \to \infty$ de la mesure de $\{x/|f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}$ est nulle.*

On a alors les résultats suivants entre nos différentes notions de convergence des f_n vers f (lorsque toutes sont définies) :

Notez bien que $p < \infty$.

Convergence uniforme

$\Downarrow$

Convergence uniforme sur tout compact

$\Downarrow$

Convergence simple

$\Downarrow$

Convergence presque partout

$\Downarrow$ si les f_n sont majorées en module par une fonction g appartenant à L^p

Convergence dans L^p

$\Downarrow$

Convergence en mesure

$\Downarrow$

Convergence presque partout d'une suite extraite
et
Convergence presque partout et X de mesure finie $\Rightarrow$ convergence en mesure

Ci-dessous une liste de contre-exemples, pour bien se mettre en tête qu'il ne faut pas confondre convergences et convergences :

• convergence uniforme sur tout compact n'implique par convergence uniforme

En effet, sur $[0, +\infty[$ la suite f_n définie par

$$f_n(x) = 1 \text{ si } x < n$$
$$f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

converge uniformément sur tout compact vers la fonction constante égale à 1, mais ne converge pas uniformément vers cette fonction.

• converge simple n'implique pas convergence uniforme sur tout compact

Il suffit de prendre $f_n(x) = max(1 - nx, 0)$ sur $[0, 1]$. $f_n(x)$ converge clairement vers 0 pour $x > 0$ et vers 1 pour $x = 0$. La convergence n'est pas uniforme car le sup de $|f_n - f|$ reste égal à 1 ; elle n'est pas non plus uniforme sur tout compact car $[0, 1]$ étant compact on aurait alors convergence uniforme.

• convergence presque partout n'implique pas convergence simple.

Evident : $f_n(x) = 1$ pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) = 1$ pour tout x de $[0, 1[$ et $f(1) = 0$.

• Convergence presque partout et même convergence simple n'impliquent pas convergence dans L^p si les f_n ne sont pas majorées en module par une fonction de L^p.

Par exemple, sur $\mathbb{R}$, $f_n(x) = n$ si $x \in]0, 1/n[$, $f_n(x) = 0$ sinon (on pourrait aussi avoir ce résultat avec des fonctions continues, en considérant des fonctions affines par morceaux...).

• Convergence dans L^p n'implique pas convergence presque partout.

On considère $f_n(x) = 1$ si il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $x + u$ est compris au sens large entre $\sum_{k=0}^{n} 1/k$ et $\sum_{k=0}^{n+1} 1/k$, 0 sinon.

• Convergence en mesure n'implique pas convergence dans L^p

Même contre-exemple que pour "convergence presque partout et même convergence simple n'impliquent pas convergence dans L^p si les f_n ne sont pas majorées en module par une fonction de L^p".

• Convergence presque partout n'implique pas convergence en mesure si la mesure de X n'est pas finie

Facile ; sur $\mathbb{R}$, l'application f_n qui à x associe $sin(x/n)$.

2.2 Théorèmes d'Ascoli et conséquences

2.2.1 Théorie

Définition 62 (Equicontinuité) *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications $X \to Y$ où X est un espace topologique et Y un espace métrique. On dit que $\mathcal{F}$ est* **équicontinue** *si, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in X$ il existe un voisinage V_x de x dans X tel que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ pour tout $f \in F$ et tout $y \in V_x$.*
Si X est aussi métrique, $\mathcal{F}$ est dite **uniformément équicontinue** *si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x, y vérifiant $d(x, y) < \alpha$ et tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $d(f(x), f(y)) < \epsilon$.*

Exemples : Une famille finie est toujours équicontinue.

On a un équivalent du théorème de Heine pour les familles équicontinues sur un espace compact.

Théorème 63 *Si X est métrique compact et si Y est métrique, si $\mathcal{F}$ est une famille d'applications équicontinues de X dans Y, alors la famille $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue.*

Démonstration : On considère α_x le rayon d'une boule inclus dans le V_x correspondant à un ϵ donné ; on recouvre l'espace avec ces boules, on en extrait un recouvrement fini, puis on prend le min des α_x, et on a le résultat.$\square$

Théorème 64 (Théorème d'Ascoli) • *Soit F un espace métrique*[a], *et E un espace topologique ; soit $\mathcal{F}$ une famille équicontinue en $e \in E$ de fonctions de E dans F.*

Alors $\overline{\mathcal{F}}$[b] *est équicontinue en e.*

• *Si $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point, alors $\overline{\mathcal{F}}$ est équicontinue en tout point.*

• *Avec $\mathcal{E}$ une partie dense de E, la topologie de la convergence simple, la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, la topologie induite par la convergence simple sur $\mathcal{E}$*[c]*, induisent la même topologie sur $\mathcal{F}$.*

[a] Hypothèse facile à retenir ; on ne pourrait pas définir la notion de famille équicontinue si F n'était pas métrique.

[b] Adhérence prise pour la topologie de la convergence simple, c'est à dire pour la topologie produit dans F^E.

[c] C'est-à-dire la topologie induite par les projections canoniques de F^E sur les $(F_{x_i})_i$

Démonstration : • • (on prouve les deux premiers • en un seul coup) On se donne $\epsilon > 0$. On a donc un certain U voisinage de e tel que pour tout x dans U et tout $f \in \mathcal{F}$ $d(f(x), f(e)) < \epsilon$. On cherche à montrer que cela est en fait vrai pour tout $f \in \overline{\mathcal{F}}$. On se donne une telle fonction f, et un certain x dans U.

On définit alors V_x l'ensemble des applications g de E dans F telles que

$$d(g(x), f(x)) < \epsilon \text{ et } d(g(a), f(a)) < \epsilon.$$

V_x est un voisinage de f pour la topologie simple, donc il doit intersecter $\mathcal{F}$; soit g dans l'intersection obtenue. Il suffit alors d'écrire

$$d(g(x), g(a)) \leq d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(a)) + d(f(a), g(a)) \leq 3\epsilon$$

• Il est clair que la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{E}$ est moins fine que le topologie de la convergence simple elle-même moins fine que la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (rappelons qu'un singleton, comme tout ensemble fini séparé, est compact). Le seul problème est la réciproque. On se donne donc U un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, f dans U, et on cherche à montrer que U contient un voisinage pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{E}$ de f.

U étant ouvert en f pour la topologie forte, il existe un compact K et un réel > 0 ϵ tels que

$$\{g \in \mathcal{F} / \forall y \in K d(f(y), g(y)) < \epsilon\}$$

soit inclus dans U.

$$\forall x \exists U_x \text{ ouvert en } x \ / \forall g \in \mathcal{F} \forall y \in U_x d(g(x), g(y)) < \epsilon/5$$

Alors par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe un sous-ensemble I fini de K tel que $K \subset \cup_{x \in I} U_x$. Les U_x étant ouverts non vides et $\mathcal{E}$ étant dense dans E, on choisit pour $x \in I$ un point $y_x \in \mathcal{E}$.

Considérons alors $W = \{g \in \mathcal{F} / \forall x \in I \ d(g(y_x), f(y_x)) < \epsilon/5\}$

$$\forall z \in K \ \exists x \in I / z \in U_x$$

et

$$d(g(z), f(z)) \leq$$

$$d(g(z), g(x)) + d(g(x), g(y_x)) + d(g(y_x), f(y_x)) + d(f(y_x), f(x)) + d(f(x), f(z)) \leq \epsilon$$

Donc $g \in U$, donc $W \subset U$ et donc U est un voisinage de f pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{E}$. D'où le résultat.$\square$

Théorème 65 (Théorème d'Arzéla-Ascoli) *Une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C^0(K, F)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :*
• La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue
• Pour tout $x \in K$ l'ensemble des $f(x)$ pour $f \in \mathcal{F}$ est relativement compact

Voir simplement la partie applications, ci-dessous ; mais aussi le théorème 92.

<u>Démonstration :</u> Tout d'abord supposons que notre famille $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C^0(K, F)$. Pour tout x l'évaluation $\hat{x} : C^0(K, F) \to F$ est continue ; donc l'image $\hat{x}(\overline{\mathcal{F}})$ est compacte, or il contient $\{f(x) | f \in \mathcal{F}\}$; donc l'adhérence de ce dernier ensemble est un fermé d'un compact, et est donc compacte, d'où le second point. Par ailleurs, comme $\mathcal{F}$ est relativement compacte, avec $\epsilon > 0$, on peut trouver $f_1, ..., f_n \in \mathcal{F}$ tels que pour tout $f \in \mathcal{F}$, $d(f_i, f) < \epsilon$; la famille des f_i étant équicontinue (comme toute famille finie), pour $x \in K$ donné, il existe un voisinage V_x de x tel que $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon$ pour tout $y \in V_x$. Comme $d(f(x), f(y)) \leq d(f_i(x), f_i(y)) + 2.d(f_i, f)$, on voit que, pour tout $y \in V_x$ on a $d(f(x), f(y)) \leq 3.\epsilon$.
Réciproquement (voir figure 2.1), supposons les deux conditions données remplies, et montrons que la famille $\mathcal{F}$ est relativement compacte. Pour cela on considère $C_0(K, F)$

comme un sous-ensemble de F^K muni de la topologie produit, cette inclusion induisant sur $C_0(K,F)$ la topologie de la convergence simple. Posons $C_x = \overline{\{f(x)|f \in \mathcal{F}\}}$. Par la seconde condition (qui n'intervient qu'ici), C_x est compact. Comme $\mathcal{F}$ est inclus dans le produit des C_x, $\overline{\mathcal{F}}$ est compact dans F^K. Il faut alors montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est inclus dans $C^0(K,F)$, et que la topologie produit sur $\overline{\mathcal{F}}$ et la topologie de la distance sont les mêmes, ce qui finira la preuve.

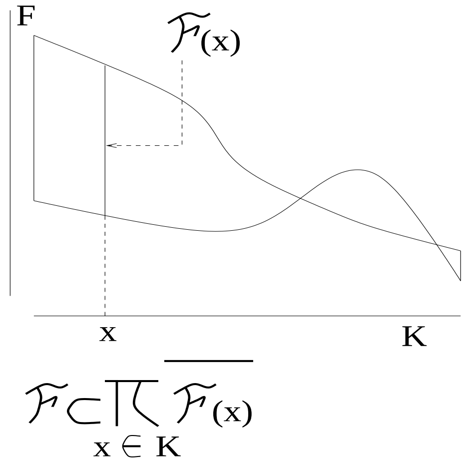

FIG. 2.1 – Illustration de la preuve du théorème d'Arzéla-Ascoli. L'adhérence de la famille considérée est un fermé d'un produit de compacts, donc est un compact ; il reste à vérifier que l'adhérence est bien incluse dans $C^0(K,F)$, et que la topologie produit induit bien la topologie de la distance uniforme.

Lemme 66 *Si $\mathcal{F}$ est équicontinue alors $\overline{\mathcal{F}} \subset C^0(K,F)$ (adhérence pour la topologie produit).*

Démonstration : Le théorème d'Ascoli (2ème point) implique que la famille $\overline{F}$ est équicontinue, ce qui implique clairement le résultat.□

Lemme 67 *La topologie induite par la topologie produit sur $\overline{\mathcal{F}}$ et la topologie de la distance (= topologie de la convergence uniforme) sont les mêmes.*

Démonstration : Chaque fonction $\hat{x}$ (évaluation en x) étant continue, tout ouvert de $\overline{\mathcal{F}}$ est un ouvert pour la topologie de la convergence uniforme.
Il reste à voir que tout voisinage de f_0 appartenant à $\overline{\mathcal{F}}$ dans $\overline{\mathcal{F}}$ pour la métrique, contient un voisinage de f_0 dans $\overline{\mathcal{F}}$ muni de la topologie produit. Soit $\epsilon > 0$, et considérons $\{g \in \overline{\mathcal{F}}|max\ d(g(x), f_0(x)) \leq \epsilon\}$ (qui décrit une base de voisinages de $\overline{\mathcal{F}}$ pour la métrique). Pour tout x, on obtient par la condition 1 un voisinage ouvert de x dans K tel que si $y \in V_x$ on ait $d(h(x), h(y)) < \epsilon/3$ pour tout $h \in \overline{\mathcal{F}}$. Par compacité de K on peut trouver x_1,...x_n tels que $K = \cup_{i=1}^n V_{x_i}$. Considérons alors

$\mathcal{V} = \{g \in \overline{\mathcal{F}} | d(g(x_i), f_0(x_i)) < \epsilon/3\}$; c'est un voisinage de f_0 pour la topologie produit. Si $g \in \mathcal{V}$ et $x \in K$ soit x_{i_0} tel que $x \in V_{x_{i_0}}$, on a alors

$$d(g(x), f_0(x)) \leq d(g(x), g(x_{i_0})) + d(g(x_{i_0}), f_0(x_{i_0})) + d(f_0(x_{i_0}), f_0(x)) < \epsilon$$

donc $d(g(x), f_0(x)) \leq \epsilon$ pour tout $x \in K$. Par conséquent le voisinage

$$\{g \in \overline{\mathcal{F}} | \max d(g(x), f_0(x)) \leq \epsilon\}$$

de f_0 pour la topologie de la convergence uniforme contient $\mathcal{V}$ qui est un voisinage de f_0 pour la topologie produit. En résumé pour cette preuve, un sens est trivial, et l'autre sens se prouve en utilisant une boule pour la distance, et en appliquant à la fois l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ et la compacité de K.□
Ces deux preuves achèvent donc le théorème d'Arzéla-Ascoli. En résumé il faut donc, pour le sens difficile :
• Utiliser la condition sur les parties relativement compactes de F pour conclure à la relative compacité de $\mathcal{F}$ dans l'espace produit
• Utiliser l'équicontinuité pour montrer que $\overline{F} \subset C^0(K, F)$
• Utiliser l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ et la compacité de K pour montrer que les deux topologies sont égales.□

2.2.2 Applications

⊡ **Topologie de** $H(\Omega)$

On travaille sur $H(\Omega)$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, munie de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Définition 68 *On dit d'une partie $\mathcal{F}$ de $H(\Omega)$ qu'elle est* **bornée** *si pour tout compact K de Ω il existe une certaine constante C_K telle que pour toute f dans $\mathcal{F}$ et tout k dans K, $|f(k)| \leq C_K$.*

Théorème 69 *Les parties compactes de l'ensemble des donctions holomorphes sur Ω $H(\Omega)$ sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration : • Montrons tout d'abord (partie facile) que les parties compactes sont fermées et bornées.

- Les parties compactes sont fermées, par le lemme **??** (tout compact d'un espace séparé est fermé)

- Les parties compactes sont bornées ; c'est évident.

• Supposons que K soit une partie fermée bornée de $H(\Omega)$.

- Montrons tout d'abord que K est équicontinue en tout point x de Ω. Soit donc un tel x.

- x est centre d'un certain disque compact inclus dans Ω

- toute f de K est bornée par un certain M sur ce disque compact de rayon R

- donc la dérivée de f en tout point du disque de centre x et de rayon $R/2$ est majorée par $2M/R$, grâce à l'estimateur de Cauchy (théorème 18).

- donc $\mathcal{F}$ est équicontinue en x, par le théorème des accroissements finis **??**.

- Etant donné x dans Ω, l'ensemble des $f(x)$ pour f dans $\mathcal{F}$ est borné, donc relativement compact.

- Par le théorème d'Arzéla-Ascoli 65, K est donc relativement compact, or il est fermé, donc il est compact.$\square$

Corollaire 70 *L'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω $H(\Omega)$ muni de la topologie de la convergence uniforme est métrisable, mais pas normable.*

Démonstration : Pour voir que $H(\Omega)$ est métrisable, il suffit de consulter le lemme **??** et le théorème 59.

D'après le théorème de Riesz (**??**), si $H(\Omega)$ était normable, alors la boule unité fermé serait compacte si et seulement si l'espace était de dimension finie. Or $H(\Omega)$ n'est pas de dimension finie.$\square$

2.3 La hiérarchie des $C^k(\Omega)$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 71 *Etant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $C^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions k fois continument dérivables de Ω dans $\mathbb{C}$.*

$C^k(\Omega)$ est stable par produit, et si f est dans $C^k(\Omega)$ et ne s'annule pas alors $1/f$ est dans $C^k(\Omega)$.

Pour f dans $C^k(\Omega)$ et ν dans $\mathbb{N}^n$ et telle que $\sum_{i=1}^n \mu_i \leq k$, on note

$$\delta^\nu f = \frac{\delta^{|\nu|} f}{(\delta x_1)^{\nu_1} \dots (\delta x_n)^{\nu_n}}$$

L'ordre des dérivations importe peu, comme on l'a vu dans le chapitre de calcul différentiel.

Définition 72 (Opérations dans $\mathbb{N}^n$) *Etant donnés ν et η dans $\mathbb{N}^n$:*

- *on note* $\nu! = \Pi_{i=1}^n (\nu_i)!$.
- *on note* $\nu \geq \eta$ *si* $\forall i \in [1,n] \nu_i - \eta_i \geq 0$
- *si* $\nu \geq \eta$ *on note* $\alpha = \nu - \eta$ *avec* $\forall i \in [1,n] \alpha_i = \nu_i - \eta_i$
- *si* $\nu \geq \eta$ *on note* $C_\nu^\eta = \frac{\nu!}{\eta!(\nu-\eta)!} = \Pi_{i=1}^n C_{\nu_i}^{\eta_i}$
- *on note* $|\nu| = \sum_{i=1}^n \nu_i$
- *on note* 0 *l'élément* $(0,...,0)$ *de* $\mathbb{N}^n$.

Proposition 73 (Formule de Leibnitz)

$$\delta^\alpha (f.g) = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \delta^\beta f \delta^\alpha g$$

⚠ Il s'agit d'un produit et pas d'une composition.

Démonstration : Récurrence facile, utilisant le corollaire **??**.□

Définition 74 (Distance sur $C^k(\Omega)$) *On définit maintenant K_m comme étant l'intersection de la boule $\overline{B}(0,m)$ et de $\{x/d(x,\Omega^c) \geq \frac{1}{m}\}$. On définit ensuite $N_m(f)$, pour f dans $C^k(\Omega)$ par $N_m(f) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^d / |\nu| \leq k} sup_{K_m} \delta^\nu f(x)$.*

On définit ensuite sur $C^k(\Omega)$ la distance :

$$d(f,g) = \sum_{m>0} \frac{1}{2^m} \frac{N_m(f-g)}{1+N_m(f-g)}$$

Il est indispensable pour la suite de consulter les propriétés topologiques des K_m ainsi définis ; voir lemme **??**.

Théorème 75 • *N_m est une semi-norme*

• *d est bien définie et est une distance*

• *La topologie définie pour cette distance a pour suites convergentes les suites de fonctions (f_n) de $C^k(\Omega)$ telles que pour tout ν tel que $|\nu| \leq k$ $\delta^\nu f_n$ converge uniformément sur tout compact K de Ω.*

• *$C^k(\Omega)$ est complet pour cette distance*

<u>Démonstration :</u>

• Le fait que N_m soit une semi-norme est évident (rappelons qu'un semi-norme a tout d'une norme à ceci près qu'une semi-norme n'est pas nécéssairement nulle seulement en 0)

• d est bien définie, car $\frac{1}{2^m}\frac{N_m(f-g)}{1+N_m(f-g)} \leq \frac{1}{2^m}$. Il est clair que $d(f,g) = 0 \iff f = g$, et que $d(f,g) = d(g,f)$. Il reste à voir l'inégalité triangulaire.

Pour cela soient f g et h dans $C^k(\Omega)$. Alors

$$N_m(f-g) \leq N_m(f-h) + N_m(h-g)$$

Par croissance de $x \mapsto \frac{x}{1+x}$,

$$\frac{N_m(f-g)}{1+N_m(f-g)} \leq \frac{N_m(f-h)+N_m(h-g)}{1+N_m(f-h)+N_m(h-g)}$$

$$\frac{N_m(f-g)}{1+N_m(f-g)} \leq \frac{N_m(f-h)}{1+N_m(f-h)} + \frac{N_m(h-g)}{1+N_m(h-g)}$$

Il ne reste qu'à sommer en pondérant par $1/2^m$ pour avoir le résultat désiré.

• Commençons par montrer qu'une suite convergente pour cette distance est bien convergente uniformément sur tout compact, ainsi que toutes ses dérivées. Ce résultat est en fait clair ; il suffit de voir que tout compact de K est inclus dans un K_i ; et que pour que $d(f,g)$ tende vers 0, il faut que $N_m(f,g)$ tende vers 0.

La réciproque est plus laborieuse.

Réciproquement, supposons que toutes les dérivées $\leq k$ de f_n convergent uniformément sur tout compact, notons f la fonction limite. Alors donnons nous $\epsilon > 0$. Soit m tel que $\sum_{i=m+1}^{\infty} 1/2^i < \epsilon$. Choisissons ensuite N tel que pour $n \geq N$ et tout $m' < m$ $N_{m'}(f_n - f) \leq \epsilon$. Alors on a bien $d(f_n, f) \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$.

• Il reste à montrer la propriété de complétude.

Donnons-nous f_n une suite de Cauchy pour la distance ainsi définie sur $C^k(\Omega)$.

Pour tout x dans Ω il existe un certain m tel que $x \in Int(K_m)$

Le fait que $(f_n)_n$ soit une suite de Cauchy nous permet de déduire que pour $\nu \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\nu| \leq k$ $(f_n^\nu(x))_n$ est une suite de Cauchy. On note $f_{\infty,\nu}(x)$ la limite.

Pour tout m, on va montrer par récurrence sur $|\nu|$ que f est $C^{|\nu|}$ sur K_m, et que sur l'intérieur de K_m $f_{\infty,\nu} = \delta^\nu f_{\infty,0}$.

La propriété est claire pour $|\nu| = 0$; une limite uniforme de fonctions continues est continue.

On se donne alors ν en supposant la propriété vraie jusqu'à $|\nu| - 1$.

On définit ν' tel que $\delta^\nu = \frac{\delta}{\delta x_p}\delta^{\nu'}$.

Alors sur K_m tel que y appartienne à l'intérieur de K_m, intéressons-nous à la dérivée suivant δx_p de $\delta^{\nu'}$ $f_{\infty,0} = f_{\infty,\nu}$ (si on montre son existence et sa continuité, on aura conclu grâce au théorème **??**).

Pour y' suffisamment proche de y pour être dans K_m et pour que le segment $[y, y']$ soit dans K_m, avec $\forall i \in [1, n] i \neq p \Rightarrow y_i = y'_i$ (c'est à dire que le point y' est juste déplacé suivant la coordonnée p.

$$\delta^{\nu'} f_i(y') - \delta^{\nu'} f_i(y) = \int_{y_p}^{y'_p} \frac{\delta}{\delta x_p}\delta^{\nu'} f_i(y_1, ..., y_{p-1}, u, y_{p+1}, ..., y_n) du$$

$$\delta^{\nu'} f_i(y') - \delta^{\nu'} f_i(y) = \int_{y_p}^{y'_p} \delta^{\nu} f_i(y_1, ..., y_{p-1}, u, y_{p+1}, ..., y_n) du$$

Et en faisant tendre i vers $+\infty$

$$f^{\nu'}(y') - f^{\nu'}(y) = \int_{y_p}^{y'_p} f_{\infty,\nu}(y_1, ..., y_{p-1}, u, y_{p+1}, ..., y_n) du$$

Donc la dérivée partielle $\frac{\delta}{\delta x_p}$ existe et est continue en x (elle vaut $f_{\infty,\nu}$).

Moralité de tout ça :

- Si on se donne un compact K et $\nu \leq k$

- Alors K est inclus dans l'intérieur d'un certain K_m

- Sur ce K_m il y a convergence uniforme de la dérivée $\delta^\nu f_n$ vers $\delta^\nu f_{\infty,0}$, puisqu'il y a convergence pour N_m.

- La limite est bien dans $C^k(\Omega)$.

Donc $C^k(\Omega)$ est bien complet pour la métrique que l'on a définie !$\square$

Corollaire 76 (Autre façon de voir la topologie sur $C^k(\Omega)$) *La même topologie serait définie en définissant les fermés comme étant les sous-ensembles contenant les limites de toute suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées d'ordre total $\leq k$ sur tout compact.*

2.4 La topologie faible

Nous allons montrer ici quelques propriétés de la topologie faible.

Corollaire 77 *La topologie faible est séparée.*

Démonstration : C'est une application directe du théorème 43 ; les singletons sont compacts, on en prend deux, on les sépare au sens strict par un hyperplan fermé ; les deux demi-espaces ouverts restant sont des ouverts séparants les deux points...$\square$

Définition 78 *On note $x_n \rightharpoonup x$ le fait que la suite x_n d'élément de E* **converge vers** *$x \in E$ pour la topologie faible.*

On note $x_n \to x$ la convergence de x_n vers x pour la topologie de la norme (ben oui, on est dans un espace vectoriel normé E), et $f_n \to f$ dans E' pour la convergence de f_n vers f pour la topologie forte. On pourra aussi qualifier de convergence forte la convergence dans E pour la norme.

Exemple :
Dans cette proposition, les $\forall f$ désignent $\forall f \in E'$.

$$(x_n \rightharpoonup x) \iff (\forall f, f(x_n) \to f(x))$$
$$(x_n \to x) \to (x_n \rightharpoonup x)$$
$$(x_n \rightharpoonup x) \to (\|x_n\| \text{ borné et } \|x\| \leq liminf\|x_n\|)$$
$$(x_n \rightharpoonup x \text{ et } f_n \to f) \to (f_n(x_n) \to f(x)(\text{dans } \mathbb{R}))$$
$$(x_n \to x \text{ et } f_n \rightharpoonup f) \to (f_n(x_n) \to f(x)(\text{dans } \mathbb{R}))$$

2.5 Liens entre topologie faible et topologie forte

2.5.1 En dimension finie

Théorème 79 *Si E est de dimension finie, alors la topologie faible sur E et la topologie forte sur E sont égales.*

Démonstration :

• La topologie forte est toujours plus fine que la topologie faible (évident au vu des définitions ; dans un ouvert (au sens de la topologie faible) , tout point possède un voisinage de la forme $\cap_{i \in I} \{x / f_i(x - x_0) < \epsilon_i\}$, et pour tout point x dans cette intersection on loge une boule ouverte centrée sur x de rayon $inf\{(\epsilon_i - \|x - x_0\|)/\|f_i\|_\infty | i \in I\})$: il s'agit là d'un ouvert pour la topologie forte.

• Réciproquement, soit x dans E, et U un ouvert (pour la topologie forte) contenant x. On cherche à construire un ouvert pour la topologie faible qui contienne x et qui soit inclus dans U. On peut naturellement se restreindre à $U = B(x, \epsilon)$, boule ouverte de centre x et de rayon r.

• On fixe $(e_1, ..., e_n)$ une base de E de vecteurs de norme 1.

• On note $(f_i)_{i \in [1,n]}$ la famille des applications telles que $\forall t \in E \; t = \sum_{i \in [1,n]} f_i(t)$.

• On peut alors écrire $\|t - x\| \leq \sum_{i \in [1,n]} |f_i(t - x)|$.

• Il suffit alors d'écrire $V = \{t / |f_i(t - x)| < \epsilon / n\}$ pour avoir un ouvert V pour la topologie faible inclus dans U et contenant x.$\square$

On verra en partie 2.7.1 que cette propriété est caractéristique de la dimension finie.

2.5.2 Dans le cas général

Théorème 80 *Soit E un espace vectoriel normé , et C convexe inclus dans E. Alors C est faiblement fermé (i.e. fermé pour la topologie faible) si et seulement si C est fortement fermé (i.e. fermé pour la topologie forte).*

On trouvera une application avec la proposition 87.

Démonstration :

• Il est clair que si C est faiblement fermé, alors il est fortement fermé. Il suffit donc de se préoccuper de la réciproque.

• Supposons maintenant C fortement fermé.

• On se donne un point x appartenant au complémentaire de C.

• D'après le théorème 43 il existe un hyperplan fermé qui sépare C et $\{x\}$ au sens strict.

• L'hyperplan délimites deux demi-espaces faiblement ouverts, dont l'un contient x et est inclus dans le complémentaire de C.

• C a donc un complémentaire faiblement ouvert, et C est donc faiblement fermé.□

Théorème 81 *Soient E et F des espaces de Banach. On se donne T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue pour E et F munis chacun de sa topologie faible si et seulement si T est continue pour E et F munis de leur topologie d'espaces vectoriels normés (ie la topologie forte).*

Démonstration : • Supposons tout d'abord que T est continue de E dans F pour la topologie forte, et montrons que T est continue pour la topologie faible.

- on va procéder en montrant que pour toute forme linéaire continue f sur F, l'application $f \circ T$ est continue (de E muni de la topologie faible dans $\mathbb{R}$).

- soit donc $f \in F'$.

- $f \circ T$ est continue pour la topologie forte, et linéaire.

- $f \circ T$ est donc continue pour la topologie faible aussi (puisque, par définition, la topologie faible rend continues toutes les formes linéaires continues).

• Supposons maintenant que T est continue de E dans F pour la topologie faible, et montrons que T est continue pour la topologie forte.

- le graphe de T est alors fermé dans le produit $E \times F$, muni de la topologie produit des topologies faibles de E et F.

- le graphe de T est donc aussi fermé pour le produit des topologies fortes car ce graphe est un convexe faiblement fermé de $E \times F$ de $E \times F$, et donc T est continue pour la topologie forte (re-utilisation du théorème du graphe fermé **??**). □

2.6 Espaces de Hölder

2.6.1 Espaces $Lip_\alpha(\Omega)$

Définition 82 *On dit qu'une application d'un métrique E dans $\mathbb{C}$ vérifie la* **condition de Hölder d'ordre** *α si il existe C dans $\mathbb{R}^+$ tel que pour tous x et y dans E $|f(x) - f(y)| \leq Cd(x,y)^\alpha$.*

Etant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et α un réel appartenant à $]0,1]$, on note $Lip_\alpha(\Omega)$ l'ensemble des applications bornées de Ω dans $\mathbb{C}$ vérifiant la condition de Hölder d'ordre α sur Ω.

Etant donné f dans $Lip_\alpha(\Omega)$, on note $\|f\|_\alpha$ le réel $\|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}$. Il s'agit d'une norme.

définir Lip_α pour $\alpha > 1$ serait peu intéressant, car on travaillerait sur des fonctions localement constantes sur un ouvert, c'est à dire, les composantes connexes d'un ouvert étant ouvertes et dénombrables, sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ...

Proposition 83 • *Toute fonction dans $Lip_\alpha(\Omega)$ est uniformément continue.*

• *Toute fonction dans $Lip_\alpha(\Omega)$ se prolonge en une fonction continue sur $\overline{\Omega}$.*

• *Si $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$, alors $Lip_\beta(\Omega) \subset Lip_\alpha(\Omega)$*

• *Toute fonction C^1 à dérivée bornée est dans Lip_α pour tout $\alpha \in]0,1]$.*

Démonstration : La plupart des points sont évidents ; le prolongement en une fonction continue utilise le fait que $\mathbb{C}$ est complet, le fait que Ω est dense dans $\overline{\Omega}$, l'uniforme continuité de toute fonction dans $Lip_\alpha(\Omega)$ et le théorème **??**.$\square$

Théorème 84 *$Lip_\alpha(\Omega)$ (muni de la norme $\|.\|_\alpha$)est un espace de Banach.*

Démonstration :

• Donnons-nous (f_m) une suite de Cauchy dans $Lip_\alpha(\Omega)$.

• (f_m) est aussi de Cauchy pour la norme $\|.\|_\infty$.

• Soit donc f la limite de la suite (f_m) pour la convergence uniforme.

• f est bien bornée, puisque limite uniforme de fonctions bornées.

• $|f_m(x) - f_m(y)| \leq \underbrace{\|f_p\|_\alpha}_{\text{bornée.}} \|x-y\|^\alpha$

• On fait alors tendre m vers ∞, et on constate que f vérifie la condition de Hölder d'ordre α.

• Vérifier que f_m tend vers f pour $\|.\|_\alpha$ est facile...$\square$

Il existe une fonction qui soit dans $Lip_\alpha(\mathbb{R})$ pour tout α dans $]0,1[$ mais pas dans $Lip_1(\mathbb{R})$; par exemple la fonction définie au théorème **??**. Montrer ce fait est toutefois fortement non trivial...

2.6.2 Espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$

Définition 85 (Espaces de Hölder) *Etant donné Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, α dans $]0,1]$, $k \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence sur k les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$ par*

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = Lip_\alpha(\Omega)$$

$$k \geq 1 \Rightarrow$$

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \textit{ bornée de } \Omega \textit{ dans } C \;/ \forall i \in [1,n] \frac{\delta f}{\delta x_i} \textit{ existe et appartient à } C^{k-1,\alpha}(\Omega)\}$$

Cette définition équivaut à (voir définition 72 pour les opérations sur $\mathbb{N}^n$) :

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega)/f \textit{ bornée } \wedge \forall \nu / |\nu| \leq k \Rightarrow D^\nu f \in Lip_\alpha(\Omega)$$

On munit $C^{k,\alpha}(\Omega)$ de la norme $f \mapsto \|f\|_{k,\alpha} = \sum_{|\nu|\leq k} \|D^\nu f\|_\alpha$.

De manière équivalente, $\|f\|_{k,\alpha} = \sum_{\nu \leq k}(\|D^\nu f\|_\infty + sup_{x\neq y} \frac{|f^{(\nu)}(x) - f^{(\nu)}(y)|}{|x-y|^\alpha})$ (c'est la même expression développée !) et la norme suivante est équivalente à celle-ci :

$$f \mapsto \|f\|'_{k,\alpha} = \sum_{|\nu|\leq k} \|D^\nu f\|_\infty + \sum_{|\nu|=k} \sup_{x\neq y} \frac{f^{(\nu)}(x) - f^{(\nu)}(y)}{|x-y|^\alpha}$$

Bien sûr il convient de vérifier l'équivalence des deux définitions.

Quelques résultats sans preuve :

Théorème 86 • *$C^{k,\alpha}(\Omega)$ est un espace de Banach.*

• *Les fonctions de $C^{k,\alpha}(\Omega)$ sont prolongeables par continuité sur $\overline{\Omega}$ en fonctions vérifiant la condition de Hölder pour toutes les dérivées $\leq k$.*

• *$k+\alpha \geq k'+\alpha'$ implique $C^{k,\alpha} \subset C^{k',\alpha'}$*

• $\|uv\|_{k,\alpha} \leq \|u\|_{k,\alpha}\|v\|_{k,\alpha}$

Pour plus d'informations sur les espaces de Hölder, on pourra consulter le livre [22].

2.7 Zoologie de l'analyse fonctionnelle

2.7.1 La topologie faible n'est pas la topologie forte en dimension infinie

Proposition 87 *Soit E un Banach de dimension infinie. Alors la topologie faible est différente de la topologie forte.*

<u>Démonstration :</u> On a vu au théorème 79 que si la dimension est finie, alors la topologie faible et la topologie forte sont égales. On a aussi vu que dans le cas général, la topologie forte est plus fine que la topologie faible. On va montrer ici que la topologie forte est strictement plus fine en dimension infinie, en exhibant un ouvert pour la topologie forte qui n'est pas ouvert pour la topologie faible, ou, ce qui revient au même par passage au complémentaire, un fermé pour la topologie forte qui n'est pas fermé pour la topologie faible.

• On considère la sphère unité S de E. Elle est fermée, comme image réciproque d'un singleton (donc un fermé) par une application continue (la norme).

• On va chercher à déterminer l'adhérence de S pour la topologie faible.

• Soit x de norme < 1.

• On se donne U un voisinage de x pour la topologie faible.

• Alors (propriété de base de la topologie faible), U contient une intersection d'un nombre fini de $\{t/|f_i(x-t)| < \epsilon_i\}$.

• Les f_i étant en nombre fini, l'intersection de leurs noyaux ne saurait être réduite à 0 (en effet sinon l'application qui à t associe $(f_1(t), ..., f_n(t))$ serait injective, et donc la dimension de E serait finie).

• On peut donc choisir y non nul tel que $f_i(y) = 0$ pour tout i.

• $x + \lambda.y$ est dans U pour tout λ.

• $\|x + \lambda.y\|$ est minoré par $|\ |\lambda|.\|y\| - \|x\|\ |$, et donc en faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on conclut que U intersecte S.

• On en déduit d'un coup que la boule ouverte de rayon 1 n'est pas ouverte, que la sphère de rayon 1 n'est pas fermée, et que l'adhérence de la sphère de rayon 1 contient au moins la boule fermée de rayon 1. La boule unité fermée du dual d'un espace vectoriel normé étant compacte pour la topologie faible (voir théorème **??**), cette boule est fermée pour la topologie faible[2] ; et donc l'adhérence de la sphère unité est bien la boule unité fermée.□

2.8 Les topologies sur E'

Rappelons que E' est le dual de E, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E. En tant que dual d'un espace vectoriel normé , E' est un Banach, c'est à dire qu'il est normé complet.

E' est muni naturellement de deux topologies déjà vues ; d'une part la topologie forte (c'est à dire la topologie de la norme $\|.\|_\infty$, avec $\|f\|_\infty = sup_{x\in S}\|f(x)\|$ - S étant la sphère unité), d'autre part la topologie faible - définie par rapport à son dual $(E')'$, c'est à dire le bidual E'' de E.

On va introduire une troisième topologie, encore moins fine que la topologie faible ; la topologie faible-*.

[2]On peut aussi éviter l'utilisation de **??** en disant que $\overline{B}(0,1)$ est un convexe fermé pour la topologie forte, donc est fermée pour la topologie faible (théorème 80)

2.8.1 La topologie faible-*

Pour plus d'informations on consultera le livre [2].

Définition 88 *On définit une* **injection canonique de** E **dans son bidual** E'' *par* $x \mapsto (f \mapsto f(x))$*. A tout élement de* E *on associe donc une forme linéaire continue sur* E' *(il s'agit donc bien d'un élément de* E''*.*
On notera ϕ_x*, pour* x *dans* E*, l'application qui à* f *dans* E' *associe* $f(x)$*.*

Proposition 89 • *Il s'agit bien d'une injection (voir résultat 77).*

• *Il s'agit d'une isométrie (voir corollaire 39).*

• *Il ne s'agit pas nécessairement d'une bijection ; c'est toutefois le cas lorsque* E *est de dimension finie ou est un espace de Hilbert. Par définition, l'espace* E *est dit* **réflexif** *lorsqu'il s'agit d'une bijection.*

Définition 90 *La* **topologie faible étoile***, alias* **topologie faible-***, est la topologie engendrée par la famille des* ϕ_x *pour* x *dans* E*.*

On notera $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *la convergence de la suite* f_n *vers* f *dans* E' *pour la topologie faible *.*

Proposition 91 • *La topologie faible * est séparée.*

• $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *si et seulement si pour tout* x $f_n(x) \to f(x)$*.*

• *Convergence forte* $\geq$ *convergence faible* $\geq$ *convergence faible-**

• *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq liminf \|f_n\|$

• *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *et* $x_n \to x$ *alors* $f_n(x_n) \to f(x)$

2.8.2 Un résultat utilisant le théorème d'isomorphisme de Banach, le théorème d'Ascoli et le théorème de Riesz

Théorème 92 *Soit* E *l'espace vectoriel des applications continues de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de* $\|f\|_0 = max_{[0,1]} \|f(t)\|$*. Alors tout sous-espace vectoriel de* E *formé de fonctions* C^1 *et fermé (pour la topologie de* $(E, \|.\|_0)$*) est de dimension finie.*

Démonstration : Soit F un tel sous-espace.

• F est un Banach pour la norme $\|.\|_1$, où $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$. Prouvons-le :

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(F, \|.\|_1)$.

- f_n est aussi de Cauchy dans $(F, \|.\|_0)$.

- f'_n aussi.

- f_n et f'_n convergent donc vers deux fonctions, disons f et g respectivement, continues.

- pour tout t dans $[0, 1]$, $\int_0^t f'_n(u)du \to \int_0^t g(u)du$.

- donc $f_n(t) - f_n(0) \to \int_0^t g$, donc $f(t) - f(0) = \int_0^t g$

- donc $g = f'$

- donc $f_n \to f$ dans $(F, \|.\|_1)$.

• La norme $\|.\|_1$, définie par $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$ pour f C^1, est majorée sur F par $A.\|f_0\|$, pour un certain $A > 0$. Prouvons-le :

- Considérons l'application J identité de $(F, \|.\|_1)$ dans $(F, \|.\|_0)$, où $\|f\|_1 = \|f\|_0 + \|f'\|_0$.

- F est fermé dans $(E, \|.\|_0)$, donc $(F, \|.\|_0)$ est un Banach.

- F est aussi un Banach dans $(E, \|.\|_1)$ (voir le • précédent).

- J est linéaire, continue, bijective entre 2 Banach ; c'est donc un homéomorphisme.

- ainsi par le théorème d'isomorphisme de Banach (**??**), on a bien le résultat annoncé.

• Soit maintenant $B = \overline{\{f \in F / \|f\|_0 \leq 1\}}$. Alors B est équicontinue. Prouvons-le :

- $\|f\|_1 \leq A.\|f\|_0 \leq A$, pour tout $f \in B$, donc par l'inégalité des accroissements finis, B est équicontinue.

• Pour tout x dans $[0, 1]$, l'ensemble des $f(x)$ pour f dans B est inclus dans $[-1, 1]$, par définition de B ; donc cet ensemble est relativement compact.

• Par le théorème d'Arzéla-Ascoli, et grâce aux deux points précédents, B est relativement compacte. B est fermée par définition.

• Par le théorème de Riesz **??**, F est donc de dimension finie.□

Bibliographie

[1] P. BARBE, M. LEDOUX, *Probabilité*, BELIN, 1998.

[2] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, 1983.

[3] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, FLEMMARD.

[4] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, V. MAILLOT, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, MASSON, 1997.

[5] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, MASSON, 1995.

[6] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, MASSON, 1996.

[7] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, DUNOD, 1998.

[8] F. COMBES *Algèbre et géométrie*, BRÉAL, 1998. <

[9] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, PRESSES UNIVERSITAIRES DE GRENOBLE, 1996.

[10] W. GIORGI, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, MASSON, 1998.

[11] A. GRAMAIN, *Intégration*, HERMANN 1988, PARIS.

[12] J.-L. KRIVINE, *Introduction to axiomatic set theory*, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, DORDRECHT-HOLLAND.

[13] S. LANG, *Real analysis*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1969.

[14] D. PERRIN, *Cours d'algèbre*, ELLIPSES 1996.

[15] A. POMMELLET, *Cours d'analyse*, ELLIPSES 1994.

[16] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, MASSON 1992.

[17] R. SMULLYAN, *Théorie de la récursion pour la métamathématique*, FLEMMARD.

[18] Y.G. SINAI *Probability theory - An introduction course*, SPRINGER TEXTBOOK, 1992.

[19] P. TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, MASSON, 1997.

[20] J. VAUTHIER, J.J. PRAT, *Cours d'analyse mathématiques de l'intégration*, MASSON, 1994.

[21] D. WILLIAMS, *Probability with martingales*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1991.

[22] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC, *Eléments d'analyse pour l'intégration*, MASSON, 1995.