

Les Mathématiques pour l'Agrégation

C. Antonini
J.-F. Quint
P. Borgnat
J. Bérard
E. Lebeau
E. Souche
A. Chateau
O. Teytaud

14 février 2002

Table des matières

1	Quelques rappels et compléments d'analyse	2
1.1	Rappels sur le corps des réels	2
1.2	Les nombres complexes	3
1.3	Définition de l'intégration au sens de Riemann	4
1.4	Lien entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue	7
1.5	Suites et séries	8
1.5.1	Suites	8
1.5.2	Suites réelles	9
1.5.3	Séries	11
1.6	Du théorème de Rolle aux formules de Taylor	15
1.7	La trigonométrie	21
1.8	Pratique du calcul de primitives	22
1.8.1	Primitives de fractions rationnelles	22
1.8.2	Primitives de $P(\cos(x), \sin(x))$	22
1.8.3	Primitives de $G(x) = F(\cos(x), \sin(x))$	22
1.8.4	Primitives de $H(x) = F(\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x))$	23
1.8.5	Primitives abéliennes	24
1.9	Zoologie de la dérivation	25
1.9.1	Une application du théorème de Rolle	25
1.10	Zoologie de l'intégration	25
1.10.1	Intégrales de Wallis	25
1.10.2	Primitives de $f, \frac{f'}{f} = a/x + o(1/x)$	26
1.10.3	Méthode de Laplace	28
1.11	Zoologie des suites	30
1.11.1	Moyenne de Césaro	30
1.11.2	Constante Γ d'Euler	30
1.12	Zoologie des séries	31
1.12.1	Construction de séries divergentes positives toujours plus petites	31
1.12.2	Somme des inverses des nombres premiers	32
1.12.3	Groupement de termes	32
1.12.4	Exponentielle d'un endomorphisme	33
1.12.5	Transformation d'Abel	34
1.12.6	Produit de convolution de deux séries	36
1.12.7	Transformation de Toeplitz	38

2	Développements limités - comparaison de fonctions	41
2.1	Définitions de base	41
2.2	Opérations sur les équivalents et les développements limités	44
2.3	Développements asymptotiques	48
2.4	Zoologie des comparaisons de séries, de fonctions	50
2.4.1	Equivalent de la suite des sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$	50
2.4.2	Equivalent de $F(x) = \int_a^x f(t)dt$	51
2.4.3	Comparaison séries-intégrales, cas $\frac{f'}{f}$ convergent	51
2.5	Zoologie des développements limités	52
3	Interversions	53
3.1	Interversion de limites et de dérivation	53
3.2	Interversion de limites et de limites	53
3.3	Interversion d'une limite et d'une intégrale	54
4	Séries entières	56
4.1	Définitions	56
4.2	L'indispensable : le lemme d'Abel	56
4.3	A l'intérieur du disque de convergence	57
4.4	A la limite du disque de convergence	59
4.5	Comment déterminer un rayon de convergence ?	59
4.5.1	Formule d'Hadamard	59
4.6	Dérivation des séries entières	60
4.7	Produit de séries entières	61
4.8	Développement en série entière	61
4.9	Zoologie des séries entières	63
4.9.1	L'exponentielle complexe	63
4.10	Séries formelles et série génératrice	64

Chapitre 1

Quelques rappels et compléments d'analyse

1.1 Rappels sur le corps des réels

On considère un corps \mathbb{K} , commutatif, muni d'une relation d'ordre total \leq .

Définition 1 (Définitions de base) \mathbb{K} est **totalelement ordonné** si $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2$ $0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow 0 \leq x + y \wedge 0 \leq x.y$
 \mathbb{K} est **archimédien** si $\forall (x, y) \in \mathbb{K}^2$ $0 \leq x \wedge 0 < y \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} / x < y + \dots + y$ (*n fois*)
 \mathbb{K} a la **propriété de la borne supérieure** si toute partie non vide majorée de K admet une borne supérieure.
On appelle **corps réel** un corps commutatif totalelement ordonné possédant la propriété de la borne supérieure. On le note \mathbb{R} . On admettra l'existence et l'unicité à isomorphisme près d'un tel corps. Il possède en outre la **propriété de la borne inférieure** et il est archimédien (comme on peut le prouver facilement).

Propriétés :

- \mathbb{R} est de caractéristique nulle ; $1 + 1 + \dots + 1 + 1$ est différent de 0.
- \mathbb{R} est infini.

Définition 2 (Quelques définitions supplémentaires) • On appelle **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ et on note $|x|$ le réel $\sup(\{x, -x\})$; c'est une norme, dite **norme usuelle**, de \mathbb{R} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel; la métrique associée est dite **distance usuelle** de \mathbb{R} .

- On note $x^+ = \max(x, 0)$, et $x^- = \max(-x, 0)$, si x est un réel.
- On note $f^+(x) = (f(x))^+$, si f est une fonction à valeurs réelles. On définit de même $f^-(x) = (f(x))^-$.
- On peut définir x^+ à partir de x et $|x|$, $|x|$ à partir de x^+ et x^- , $\sup(x, y)$ à partir de $|x - y|$, x et y , en utilisant simplement des additions et des soustractions; je ne donne pas le détail des formules, que l'on retrouve facilement, et que personne ne se fatigue à apprendre par coeur.
- On appelle **partie entière** d'un réel x et on note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier qui lui est inférieur ou égal. Il est caractérisé par $E(x) \in \mathbb{N} \wedge E(x) \leq x < E(x) + 1$. $x - E(x)$ est appelé **partie décimale** ou **partie fractionnaire** de x , et est noté $\{x\}$.
- On appelle **intervalle** de \mathbb{R} toute partie de \mathbb{R} contenant le segment d'extrémités x et y pour tous x et y dans cette partie.
- On appelle **longueur d'un intervalle** I non vide le réel $\sup_{(x,y) \in I^2} |x - y|$.
- Une partie A de \mathbb{R} est dite **bornée** si $\{|x - y| / (x, y) \in A^2\}$ est majoré; si A est non vide le sup de cet ensemble est alors le diamètre de la partie A , noté $\delta(A)$.

Propriétés :

- Le diamètre d'une boule ou d'une sphère de rayon r est $\leq 2.r$, si cette partie est non vide (ce qui est toujours le cas si l'espace n'est pas réduit à zéro à moins qu'il ne s'agisse d'une boule ouverte de rayon nul)
- Un intervalle peut-être de la forme $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, avec éventuellement $a = -\infty$ si l'intervalle est ouvert à gauche, et/ou $b = +\infty$ si l'intervalle est ouvert à droite.
- Un segment est un intervalle fermé, de diamètre sa longueur.

Définition 3 On appelle **droite numérique achevée** et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble totalement ordonné $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, avec $+\infty$ plus grand élément et $-\infty$ plus petit élément (le reste de l'ordre étant l'ordre usuel).
On étend les définitions de segments et d'intervalles à $\overline{\mathbb{R}}$.

1.2 Les nombres complexes

On suppose le corps des nombres complexes déjà connu ; on rappelle $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Définition 4 Le corps des complexes peut par exemple être construit comme le produit de \mathbb{R} par \mathbb{R} , muni des opérations suivantes :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \times (c, d) = (a \times c - b \times d, a \times d + b \times c)$$

On note alors $i = (0, 1)$.

On note $Im(z)$ la partie imaginaire d'un nombre complexe $z = (a, b)$, c'est à dire $Im(a, b) = b$, et $Re(z)$ sa partie réelle, c'est-à-dire $Re(a, b) = a$.

1.3 Définition de l'intégration au sens de Riemann

Cette partie est un bref rappel sur l'intégrale de Riemann. Pour une définition complète, on consultera par exemple [11].

L'intégrale de Riemann est tout d'abord définie pour les fonctions en **escalier**.

Définition 5 Etant donnée f une telle fonction et σ une **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$, ie une famille $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ vérifiant $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n = b$, l'intégrale sur I de f , pour σ **adaptée** à f , c'est à dire telle que sur chaque $] \sigma_i, \sigma_{i+1}[$ f soit constante, est par définition $\int_I f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (\sigma_{k+1} - \sigma_k)$, où $f|_{] \sigma_i, \sigma_{i+1}[} = \lambda_i$.

Quelques propriétés :

- Définition de l'intégrale indépendante de la subdivision adaptée choisie.
- linéarité de l'intégrale (i.e $\int_I \lambda f + \mu g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$).
- Loi de Chasles : $\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]} f$.
- Valeur de l'intégrale inchangée si on modifie la valeur de f en un nombre fini de points.
- $f \leq g$ implique $\int_I f \leq \int_I g$ (en particulier l'intégrale d'une fonction positive est positive, l'intégrale d'une fonction $\leq M$ sur un intervalle de longueur l est inférieure à lM)

Définition 6 Une application de \mathbb{R} dans E (\mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) est dite **continue par morceaux** sur $I = [a, b]$ s'il existe une subdivision σ de I telle que sur chaque $] \sigma_i, \sigma_{i+1}[$ elle est continue et admet des limites aux bords.

Remarque :

Notons $F_b([a, b], \mathbb{R})$ ¹ l'ensemble des fonctions bornées de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Il s'agit d'un espace vectoriel normé complet pour $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ². Notons \mathcal{E} l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On voit alors que \mathcal{E} est inclus dans $F_b([a, b], \mathbb{R})$ et que l'application intégration $f \mapsto \int_{[a, b]} f$ est linéaire, de norme $\leq |b - a|$; l'intégration est ainsi uniformément continue. $\overline{\mathcal{E}}$ est appelé l'ensemble des **fonctions réglées** sur $[a, b]$. D'après un théorème de prolongement, et comme (1) \mathcal{E} est dense dans $\overline{\mathcal{E}}$ (par définition de l'adhérence) (2) $\overline{\mathcal{E}}$ est complet puisque fermé de F_b qui est lui-même complet, on peut prolonger $\int_{[a, b]}$ de manière unique en une application linéaire continue de $\overline{\mathcal{E}}$ dans \mathbb{R} (encore de norme $\leq |b - a|$). Cette méthode permet ainsi de définir l'intégrale sur $[a, b]$ sans avoir à montrer que la limite est indépendante des subdivisions choisies (il suffit juste de voir que les fonctions continues par morceaux appartiennent à F_b).

Toute application f continue par morceaux sur I est limite uniforme d'application en escalier. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite; $\int_I f_n$ converge vers une limite, indépendante du choix de f_n . Par définition, cette limite commune est l'intégrale de f .

Quelques propriétés :

- linéarité de l'intégrale (i.e $\int_I \lambda f + \mu g = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$).
- Loi de Chasles : $\int_{[a, b]} f + \int_{[b, c]} f = \int_{[a, c]} f$
- Valeur de l'intégrale inchangée si on modifie la valeur de f en un nombre fini de points.
- $f \leq g$ implique $\int_I f \leq \int_I g$ (en particulier l'intégrale d'une fonction positive est positive, l'intégrale d'une fonction $< M$ sur un intervalle de longueur l est inférieure à lM)
- Une fonction continue positive d'intégrale nulle sur I est nulle sur I .

L'**inégalité de Schwartz** et l'**inégalité de Minkowski**, données dans la partie ??, sont valables dans le cadre de l'intégrale de Riemann.

On note aussi la formule de la moyenne :

¹ \mathbb{R} pouvant d'ailleurs éventuellement être remplacé par E Banach, ce qui sera utile pour la résolution d'équations linéaires à coefficients non constants en dimension infinie.

² $|f(x)|$ remplacé par $\|f(x)\|$ si E espace de Banach au lieu de \mathbb{R} .

Proposition 7 Formule de la moyenne : Si f et g continues par morceaux sur $[a, b]$, f à valeurs dans \mathbb{R} , g à valeurs dans \mathbb{R}^+ , $m = \inf_{x \in I} f(x)$, $M = \sup_{x \in I} f(x)$, on a

$$m \int_I g \leq \int_I fg \leq M \int_I g$$

Si de plus f est continue, alors

$$\exists c \in I / \int_I fg = f(c) \int_I g$$

Un corollaire important est le cas d'une fonction g constante égale à 1 : $m|b-a| \leq \int_I f \leq M|b-a|$ et si f est continue, $\int_I f = (b-a)f(c)$ pour un certain $c \in [a, b]$.
Maintenant quelques propriétés des sommes de Riemann ;

Définition 8 On appelle **subdivision pointée** de $I = [a, b]$ un couple (σ, ξ) avec σ une subdivision $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$ et ξ une famille $(\xi_0, \dots, \xi_{n-1})$ avec $\xi_i \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$.

Définition 9 On appelle **somme de Riemann** associée à la subdivision pointée (σ, ξ) et on note $Riemann(f, \sigma, \xi)$ la valeur $\sum_{i \in [0, n-1]} f(\xi_i) |\sigma_{i+1} - \sigma_i|$. On appelle **pas d'une subdivision ou d'une subdivision pointée** la quantité $\sup_{i \in [0, n-1]} |\sigma_{i+1} - \sigma_i|$. On le note $pas(\sigma)$.

Alors, si f est continue,

$$\lim_{pas(\sigma) \rightarrow 0} Riemann(f, \sigma, \xi) = \int_I f$$

Si f est continue sur $[a, b]$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f$ est C^1 et est une primitive de f , i.e. $F' = f$.

Enfin, en intégrale de Riemann l'intégration par parties est valable :

Théorème 10 (Intégration par parties) Soient f et g des primitives de fonctions réglées sur $I = [a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} . Alors

$$\int_I fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

avec par définition $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

↗ Cette formule sert à peu près partout, par exemple la proposition ?? (calcul de la somme des $1/n^2$), le théorème 48, pour les intégrales de Wallis (partie 1.10.1). On

trouvera dans le formulaire (partie ??) une preuve de la formule de Stirling utilisant l'intégration par parties.

Le changement de variable est aussi valable :

Théorème 11 (Changement de variable) Si f est continue sur $[c, d]$ et si θ est C^1 de $[a, b]$ dans $[c, d]$, alors on a

$$\int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f = \int_a^b (f \circ \theta)\theta'$$

1.4 Lien entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue

Théorème 12 Soit λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

(i) Soit $I = [a, b]$ intervalle compact ($-\infty < a < b < \infty$), f de I dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} continue (ou simplement réglée). Alors f est mesurable, L^1 sur $[a, b]$ et

$$\int_I f d\lambda (\text{au sens de Lebesgue}) = \int_a^b f(x) dx (\text{au sens de Riemann})$$

(ii) Soit $I =]a, b[$ intervalle de \mathbb{R} ($-\infty \leq a < b \leq \infty$), f continue de $]a, b[$ dans \mathbb{C} (ou simplement réglée sur tout intervalle compact de I). f est alors mesurable, et f est L^1 si et seulement si son intégrale au sens de Riemann est absolument convergente (ie si $\lim_{X \rightarrow a^+, Y \rightarrow b^-} \int_X^Y |f(x)| dx < \infty$) et alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int f d\lambda$$

Le terme de gauche désignant l'intégrale généralisée au sens de Riemann (ie $\lim_{X \rightarrow a^+, Y \rightarrow b^-} \int_X^Y f(x) dx$) et le terme de droite l'intégrale au sens de Lebesgue.

Démonstration : \square

1.5 Suites et séries

1.5.1 Suites

▣ Définitions

Définition 13 La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite extraite** de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si il existe ϕ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} strictement croissante telle que $\forall k y_k = x_{\phi(k)}$.
 x est un **point d'accumulation** ou une **valeur d'adhérence** de la suite x_n si $x \in \bigcap_n \{x_k/k \geq n\}$.
 x_n **converge** vers x si pour tout voisinage V de x il existe N tel que pour tout $n > N$ $x_n \in V$.
La suite x_n est dite **convergente** si elle converge vers un certain x .

▣ Propriétés

- Cas général

Une suite finie admet une suite extraite constante.

Une suite infinie admet une suite extraite monotone.

Une suite bornée admet une suite extraite convergente.

x est point d'accumulation des x_n si pour tout V voisinage de x il existe une infinité de n tels que x_n est dans V .

La notion de convergence d'une suite est équivalente à la notion de limite en l'infini, avec la topologie que l'on s'est donnée en ?? sur $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Dans un espace séparé, la limite est unique.

Si une suite converge vers x , alors toute suite extraite de cette suite converge vers x .

Une limite de suite extraite est une valeur d'adhérence (pas de réciproque dans le cas général).

- Cas métrique

Dans le cas d'un espace métrique, x est donc point d'accumulation si pour tout ϵ il existe une infinité de n tels que $d(x_n, x) < \epsilon$.

Dans un espace métrique, la limite est unique.

Dans le cas d'un espace métrique, une valeur d'adhérence est une limite de suite extraite.

Dans un espace métrique, une suite de Cauchy a au plus une valeur d'adhérence, et si elle en a une, elle converge et cette valeur est sa limite.

Dans un espace métrique compact (qui est donc aussi complet), une suite n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence est une suite convergente.

Dans un espace métrique il sera souvent utile d'introduire la définition $X_n = \{x_p/p \geq n\}$; l'ensemble des valeurs d'adhérence est alors l'intersection des $\overline{X_n}$, c'est donc un fermé, et la suite est une suite de Cauchy si le diamètre des X_n tend vers 0.

- Cas d'un espace vectoriel normé

L'ensemble des suites d'un espace vectoriel normé est un espace vectoriel, avec les opérations de multiplication par un scalaire terme à terme, et d'addition terme à terme (valable même si l'espace n'est pas normé).

L'ensemble des suites bornées en est un sous-espace vectoriel. On peut le normer par

la fonction qui à une suite associe le sup des normes de ses éléments. On notera cette norme $\| \cdot \|$.

L'ensemble des suites de Cauchy est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites bornées.

L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de Cauchy. L'application qui à une suite convergente associe sa limite (qui est unique) est linéaire et continue de norme 1.

Si notre espace vectoriel normé est muni de deux normes différentes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ et si il existe α tel que $\| \cdot \|_1 \leq \alpha \| \cdot \|_2$ alors les suites bornées pour $\| \cdot \|_2$ sont des suites bornées pour $\| \cdot \|_1$, idem pour les suites de Cauchy, et idem pour les suites convergentes. Dans le cas de normes équivalentes, on a donc les mêmes suites de Cauchy, les mêmes suites bornées, et les mêmes suites convergentes. Ainsi, il est de Banach pour $\| \cdot \|_1$ si et seulement si il est de Banach pour $\| \cdot \|_2$.

- Cas d'un corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

L'ensemble des suites est une \mathbb{K} -algèbre commutative et unitaire ; il est muni pour cela du produit par un scalaire, de l'addition terme à terme, du produit terme à terme (l'unité étant la suite constante égale à 1).

L'ensemble des suites bornées est une sous-algèbre unitaire de cette algèbre.

L'ensemble des suites de Cauchy est une sous-algèbre unitaire de cette sous-algèbre.

L'ensemble des suites convergentes est une sous-algèbre unitaire de cette sous-algèbre.

L'application qui à une suite associe sa limite est un morphisme d'algèbres. Ce morphisme est continu. Le noyau de ce morphisme (l'ensemble des suites qui convergent vers 0) est un idéal de l'ensemble des suites bornées.

- Cas du corps \mathbb{R}

Toute suite monotone bornée converge.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

- Cas du corps \mathbb{C}

Dans le cas d'une suite complexe on peut se ramener à l'étude de suites réelles ; la suite converge si les parties réelles et imaginaires convergent.

1.5.2 Suites réelles

▣ Généralités

L'ensemble des suites réelles est un anneau commutatif, un espace vectoriel sur \mathbb{R} , ou même une \mathbb{R} -algèbre.

Définition 14 Une suite réelle est dite **majorée, minorée, bornée, finie**, si son image est majorée, minorée, bornée, finie.

L'ensemble des suites réelles bornées est un sous-anneau, un sous-espace vectoriel, une sous-algèbre de l'ensemble des suites réelles.

Définition 15 Pour la définition de la limite d'une suite, on pourra consulter ??, et notamment la topologie de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
 Une suite **converge** vers un réel x si sa limite en $+\infty$ est x . Une suite **diverge** si et seulement si elle ne converge pas. \mathbb{R} étant séparé, la limite d'une suite est unique.
 Une suite **tend vers** $+\infty$ (resp. $-\infty$) si sa limite en $+\infty$ est $+\infty$ (resp. $-\infty$) dans \mathbb{R} .

L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-anneau, un sous-espace vectoriel, une sous-algèbre de l'ensemble des suites réelles bornées.

▣ **Suites monotones. Applications**

Théorème 16 Toute suite croissante majorée de \mathbb{R} est convergente ; sa limite est le sup de son image.
 Toute suite décroissante minorée de \mathbb{R} est convergente ; sa limite est l'inf de son image.
 Si deux suites sont l'une croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0, alors elles sont dites **adjacentes** ; deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Démonstration : Ces résultats, très simples, constituent un (petit !) entraînement à l'utilisation des ϵ et des δ . □

Une illustration des suites adjacentes est le résultat 58.

Théorème 17 \mathbb{R} est complet.

Démonstration : Il est évident qu'une suite convergente est de Cauchy ; et réciproquement étant donnée une suite de Cauchy x_n on peut considérer les deux suites $n \mapsto \sup_{k \geq n} x_k$ et $n \mapsto \inf_{k \geq n} x_k$; ces deux suites sont adjacentes.

Théorème 18 (Théorème des segments emboîtés) L'intersection d'une suite décroissante de segments dont la longueur tend vers 0 est un singleton.

Démonstration : Il suffit de considérer la suite des *sup* et la suite des *inf* ; ces suites sont adjacentes. □

1.5.3 Séries

Dans cette partie on travaillera avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 19 On se donne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans \mathbb{K} . On définit $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On se pose la question de la convergence de la suite U_n . Si la limite existe, on l'appellera **somme** de la série et on la notera

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} U_k$$

On dit que (U_n) est la **série** de terme général (u_n) .

Définition 20 On dit que la série de terme général (u_n) converge **absolument** si la série de terme général $(|u_n|)$ converge. Une série est dite **semi-convergente** si elle converge sans converger absolument.

Définition 21 On dit que deux séries sont **de même nature** si et seulement si elles sont simultanément convergentes ou simultanément divergentes.

Définition 22 On appelle **somme partielle d'ordre p** de la série de terme général $(u_n)_{n \geq 0}$ la somme $\sum_{n=0}^p u_n$. On appelle **reste d'ordre p** de la série de terme général $(u_n)_{n \geq 0}$ la somme de la série de terme général $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_n = u_{n+p}$, lorsque cette série converge. On notera par la suite R_p le reste à l'ordre p de la série de terme général (U_n) . On a $R_p = \sum_{n \geq p} u_n$.

Quelques remarques simples :

- La série de terme générale (u_n) converge si et seulement si la suite $n \mapsto \sum_{i=1}^n u_i$ converge.
- s'il y a convergence de la série, alors $u_n \rightarrow 0$.
- la série de terme général (x^n) converge si et seulement si $|x| < 1$. Elle converge d'ailleurs si et seulement si elle converge absolument.
- une série converge (resp. converge absolument) si et seulement si son reste à un certain ordre p converge (resp. converge absolument) ; et en ce cas son reste à tout ordre converge (resp. converge absolument).
- Si une série converge, alors la suite (R_n) tend vers 0 en $+\infty$.
- \mathbb{C} et \mathbb{R} étant complets, on peut directement appliquer le critère de Cauchy aux

séries dans ces espaces :

Proposition 23 La série de terme général (u_n) converge (resp. converge absolument) si et seulement si

$$\forall \epsilon \exists N / \forall n > 0 \left| \sum_{i=N}^{N+n} u_i \right| < \epsilon$$

resp. si et seulement si

$$\forall \epsilon \exists N / \forall n > 0 \sum_{i=N}^{N+n} |u_i| < \epsilon$$



Voir pour application la partie 1.12.1.

- si une série est semi-convergente, alors la série de terme général $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et la série de terme général $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ sont divergentes (tendent vers $+\infty$).
- si une série converge absolument alors elle converge (preuve en considérant les parties réelles et imaginaires, et en les décomposant en partie positive et en partie négative - preuve possible aussi en utilisant le critère de Cauchy).

▣ Séries à termes positifs, absolue convergence

Quelques remarques simples :

Proposition 24 • Une série à termes positifs converge si et seulement si elle est absolument convergente.

- Toute série de terme général extrait du terme général d'une série à termes positifs convergente est convergente, de somme inférieure à la somme de la série initiale.
- Toute série déduite d'une série convergente à termes positifs par permutation (éventuellement infinie) des termes est une série convergente de même somme.
- Si deux séries à termes positifs sont ordonnées par $u_n \leq v_n$, alors si $\sum v_n$ converge on peut affirmer que $\sum u_n$ converge, et si $\sum u_n$ diverge on peut affirmer que $\sum v_n$ diverge.
- si $u_n = O(v_n)$ avec v_n terme générale d'une série absolument convergente (par exemple une série convergente à termes positifs), alors u_n est le terme général d'une série absolument convergente (nb : il n'est pas requis que u_n soit une suite ≥ 0).
- Si $u_n \simeq v_n$ et si l'une de ces deux séries est à termes positifs (au moins au voisinage de l'infini) alors les deux séries sont de même nature.

On déduit notamment de ceci le fait que si u_n est le terme général d'une série à termes positifs ou nuls, alors les séries de termes généraux $\ln(1 + u_n)$ et $\ln(1 - u_n)$ sont de même nature (et de même nature que la série de terme général u_n , dans le cas où $u_n \rightarrow 0$).

↗ Si u_n est une série à terme général positif ou nul, alors $\prod(1 + u_n)$ converge si et seulement si $\sum u_n$ converge.

◇ Séries de Riemann, séries de Bertrand

Proposition 25 • Série de Riemann : $x \in \mathbb{R}$, $\sum 1/n^x$ converge si et seulement si $x > 1$ (démonstration par la comparaison avec une intégrale, voir plus loin)
• Série de Bertrand : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\sum 1/(n^x \cdot \ln(n)^y)$ converge si et seulement si $x > 1$ ou $(x = 1 \text{ et } y > 1)$ (démonstration par la comparaison avec une intégrale, voir plus loin)

⚠ On trouvera une preuve amusante de ces deux résultats en partie 1.12.3 (plus originale que la preuve par comparaison avec une intégrale).

◇ Utilisation de u_{n+1}/u_n

Proposition 26 On se donne (u_n) et (v_n) 2 suites à termes > 0 . Alors si $u_{n+1}/u_n < v_{n+1}/v_n$ (au moins à partir d'un certain rang), alors

- la convergence de la série de terme général v_n entraîne la convergence de la série de terme général u_n
- la divergence de la série de terme général u_n entraîne la divergence de la série de terme général v_n

Démonstration : Les deux affirmations étant contraposées, il suffit de prouver la première, et elle n'est pas bien dure en se ramenant à la comparaison de deux séries de termes généraux équivalents, l'une étant positive...□

Corollaire 27 (Critère de D'Alembert) Si (u_n) est une série à termes positifs telle que u_{n+1}/u_n tend vers k , alors si $k < 1$ la série converge, et si $k > 1$, alors la série diverge.

Démonstration :

- Cas où $k < 1$: on se donne k' avec $k < k' < 1$; la proposition ci-dessus, jointe au fait que la série de terme général k'^n converge, permet de conclure que la série de terme général u_n converge.

- Cas où $k > 1$: en prenant k' tel que $1 < k' < k$, on constate que la suite u_n ne tend pas même vers zéro, ce qui serait la moindre des choses pour le terme général d'une série convergente.□

◇ **Règle de Cauchy**

Théorème 28 (Règle de Cauchy) $u_n > 0$, alors $\limsup \sqrt[n]{u_n} = l < 1 \rightarrow \sum u_n$ converge
 $\limsup \sqrt[n]{u_n} = l > 1 \rightarrow \sum u_n$ diverge

Démonstration : Facile, je ne daigne pas détailler, il suffit dans le premier cas de choisir x compris entre l et 1 ; et dans le deuxième cas, la suite n'a pas même le bon goût de tendre vers 0.□

◇ **Critère de Raabe-Duhamel (alias $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, suite)**

Proposition 29 (Règle de Raabe-Duhamel) Soit $u_n > 0$, avec $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + r_n$, avec r_n terme général d'une série absolument convergente ; alors $u_n \simeq K/n^a$ pour un certain $K > 0$ (et donc la série de terme général u_n converge $\iff a > 1$).

Démonstration : On définit $v_n = \ln(n^a \cdot u_n)$; il est clair que si cette suite converge on a bien le résultat souhaité.

Or $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}/u_n) + a \cdot \ln(\frac{n+1}{n}) = -a/n + r_n + O(-a/n + r_n)^2 + O(1/n^2)$. En utilisant le fait que $|(a/n) \cdot w_n| \leq \frac{1}{2}(a^2/n^2 + w_n^2)$, on en déduit que

$v_{n+1} - v_n = O(1/n^2) + O(r_n^2) + r_n = O(r_n + \frac{1}{n^2})$. Or r_n et $\frac{1}{n^2}$ sont tous deux termes généraux de séries absolument convergentes, donc $v_{n+1} - v_n$ est terme général d'une série absolument convergente, donc convergente, et donc (v_n) est une suite convergente.

1.6 Du théorème de Rolle aux formules de Taylor

Théorème 30 (Théorème de Rolle) Soit f une fonction continue définie sur le segment $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

- Si f est constante sur $[a, b]$, le résultat est clair.
- Si f n'est pas constante, alors f atteint soit son maximum soit son minimum dans $]a, b[$ (il y a là une application de la compacité ; l'image d'un compact par une application continue est un compact, théorème ??) ; la dérivée de f en ce point (ou l'un de ces points) est nécessairement nulle. \square


NB : comme le signale judicieusement le livre [15], on peut aussi avoir le même théorème sur $[a, +\infty[$, avec $f(a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.


 du théorème de Rolle :

- le polynôme dérivé d'un polynôme scindé de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est scindé.
- le théorème 34.
- les résultats 44 et 45.
- le théorème qui suit :

Théorème 31 (Théorème des accroissements finis pour une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R})
 On se donne f continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , dérivable sur $]a, b[$.
 Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Démonstration : Il suffit de soustraire $x \mapsto f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$ à la fonction f pour se ramener au théorème de Rolle. \square

 Ne pas confondre avec le théorème ??.

 cela sert pour le théorème 32.

Théorème 32 (Théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée) *Ce théorème est aussi dit théorème de Darboux.*

Soit f dérivable d'un intervalle I dans \mathbb{R} ; alors $f'(I)$ est un intervalle.

Démonstration :

- On suppose tout d'abord I ouvert ; le cas général s'en déduit clairement.
- On se donne X et Y dans $f'(I)$, puis Z compris entre X et Y .
- On suppose $f'(x) = X$ et $f'(y) = Y$; on cherche z tel que $f'(z) = Z$.
- On se donne $h > 0$ tel que $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < Z < \frac{f(y+h)-f(y)}{h}$ (on se rend compte qu'un tel h existe en considérant les limites des membres de droite et de gauche pour $h \rightarrow 0$)
- On définit $g(u) = \frac{f(u+h)-f(u)}{h}$; c'est à dire que $g(u)$ est la pente de f "en regardant sur une largeur h " (voir figure 1.1).
- On applique le théorème des valeurs intermédiaires, en tant que théorème appliqué à une fonction continue, à g (voir ??). On en déduit qu'il existe un certain u tel que $g(u) = Z$. On applique alors le théorème des accroissements finis 31, pour voir qu'il existe un certain z entre u et $u + h$ tel que $f'(z) = Z$.□

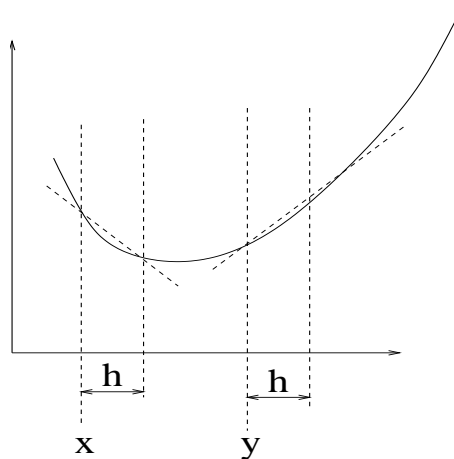


FIG. 1.1 – Théorème de Darboux : on considère les pentes "sur une largeur h "...

Définition 33 (Polynôme de Taylor) *Etant donnée une fonction f de \mathbb{R} dans un espace vectoriel normé au moins n fois dérivable en a , on définit le **développement de Taylor de f à l'ordre n en a** qui est une fonction de \mathbb{R} dans notre espace vectoriel normé définie par $P_{f,a,n}(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$.*

Théorème 34 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , avec $a \neq b$, f de classe C^n de $[a, b]$ dans \mathbb{R} $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$; alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) = P_{f,a,n}(b) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Démonstration :

- On définit

$$g(x) = f(b) - P_{f,x,n}(b) - K \cdot \left(\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right)$$

avec K choisi de manière à avoir $g(a) = 0$ (toujours possible car $b - a$ est non nul par hypothèse).

- On dérive g , on a pile poil les bonnes hypothèses pour appliquer Rolle 30 à g , on en déduit qu'il existe c tel que $g'(c) = 0$ (puisque $g(b) = 0 = g(a)$). Or le calcul de g' permet alors d'écrire que $g'(c) = 0$ implique que $f^{n+1}(c) = K$.

- Il ne reste plus qu'à écrire que $g(a) = 0$. \square

Corollaire 35 (Formule de Mac Laurin) *Il s'agit simplement de la même formule, dans le cas $a = 0$ (l'usage veut que ce cas particulier soit nommé "formule de Mac Laurin").*

$$f(b) = P_{f,0,n}(b) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} (b)^{n+1}$$

Démonstration : Conséquence immédiate du résultat précédent. \square

Quelques exemples d'applications, extraites de [15] :

- $x \mapsto \exp(x)$ est limite de la suite des $P_{\exp,0,n}$
- au voisinage de $+\infty$ et pour tout polynôme P , $P(x) = o(e^x)$.

- Si f est C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et avec M_i pour $i \in \{0, 1, 2\}$ défini comme le sup de $|f^{(i)}|$, on a $M_1 \leq 2\sqrt{M_0 \cdot M_2}$ (preuve en écrivant (par Taylor-Lagrange) que $f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \frac{1}{2}f''(c)t^2$ pour un certain $c \in]a, a+t[$, en divisant par t pour obtenir $f'(a) = \frac{f(a+t)-f(a)}{t} - \frac{1}{2}f''(c)t$ et donc $|f'(a)| \leq \frac{2M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}$ minimal pour $t = 2\sqrt{M_0 M_2}$).

- Si f est C^{n+1} de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et si f et $f^{(n+1)}$ sont bornées, alors les f_i pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont bornées (la preuve utilise le fait que l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ est de dimension finie, bornée, et le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie).

Théorème 36 (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , avec $a \neq b$, f de classe C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$; on suppose en outre que $f^{(n+1)}$ est bornée par M sur $]a, b[$.
Alors $\|f(b) - P_{f,a,n}(b)\| \leq M \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Démonstration :

- On définit

$$g(x) = f(b) - P_{f,x,n}(b)$$

- On considère l'application qui à x associe $-M \cdot \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Pour tout x dans $[a, b]$ on a $\|g'(x)\| \leq h'(x)$; le théorème des accroissements finis ?? permet alors d'écrire que $\|g(b) - g(a)\| \leq h(b) - h(a)$ - ce qui est précisément ce qu'on voulait prouver puisque $g(b) = 0$. □

⚠ Il y a plus simple dans le cas de f application à image dans \mathbb{R} : il s'agit alors d'une conséquence rapide de la formule de Taylor-Lagrange.

Théorème 37 (Formule de Taylor avec reste intégral) Cette fois-ci f est supposée C^{n+1} sur $[a, b]$. Alors :

$$f(b) = f(a) + P_{f,a,n}(b) + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t) dt$$

Démonstration : • Comme d'habitude pour ce genre de formule, on définit $g(x) = f(b) - P_{f,x,n}(b)$.

- g est C^1 ; donc $g(b) - g(a)$ est égale à l'intégrale de g' entre a et b ; il s'agit précisément de la formule de Taylor avec reste intégral... □

⚠ La formule étant passablement infecte à apprendre (je trouve...) le plus simple est sans doute de faire le calcul soi-même, il n'est pas difficile, et peut être retrouvé

très rapidement...

↗ Le théorème de Bernstein, stipulant que toute fonction $f \in C^\infty$ de $[-a, a]$ dans \mathbb{R} , avec $a > 0$, et dont toutes les dérivées d'ordre pair $f^{(2n)}$ sont ≥ 0 sur $[-a, a]$, est développable en série entière sur $] - a, a[$, est démontré dans [15] en application de la formule de Taylor avec reste intégral.

FLEMMARD applications en analyse numérique

Théorème 38 (Formule de Taylor-Young) *On se donne une fonction f de \mathbb{R} dans un espace vectoriel normé E , n fois dérivable en a . Alors*

$$f(x) - P_{f,a,n}(x) = o((x - a)^n)$$

Démonstration : Par récurrence, avec le théorème des accroissements finis ?? □

↗ Ceci fournit bien évidemment une méthode de détermination de développements limités. Mais c'est aussi un outil pour calculer des dérivées de fonctions, comme on va le voir avec les corollaires ci-dessous, permettant de généraliser la formule bien connue $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Il faut noter que la formule se généralise à tout ordre, mais la formule est plus compliquée... Enfin on peut en déduire des résultats sur l'ensemble des zéros d'une fonction suffisamment dérivable, comme illustré par le corollaire 42 (les informations étant bien faibles par rapport aux informations fournies dans le cas complexe...).

Exemple Maple

```
> p := array(1..5); for i from 2 by 2 to 10 do p[i/2] :=
  convert(series(sin(x), x, i), polynom) od;
```

$$p := \text{array}(1..5, [])$$

$$p_1 := x$$

$$p_2 := x - \frac{1}{6} x^3$$

$$p_3 := x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$$

$$p_4 := x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7$$

$$p_5 := x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + \frac{1}{362880} x^9$$

```
> plot(p, x = -5..5);
```

Le résultat est montré sur la figure 1.2.

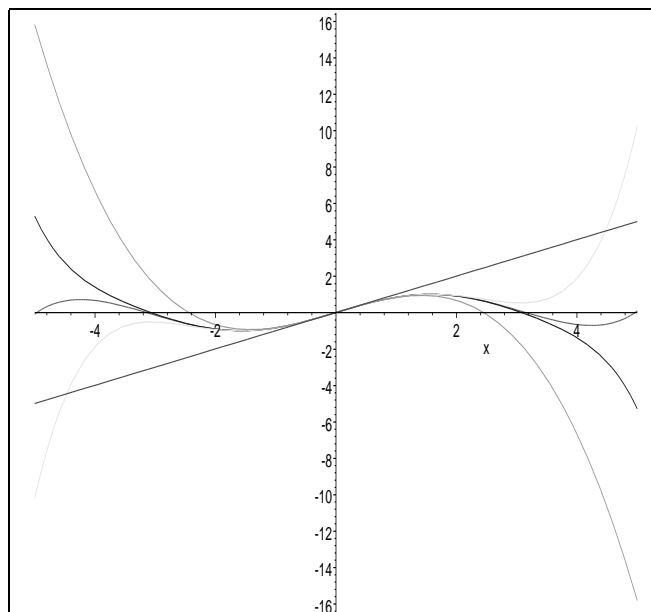


FIG. 1.2 – Approximations successives de $\sin(x)$ par la formule de Taylor-Young

Corollaire 39 (Calcul de la dérivée seconde d'une fonction) Soit f une fonction 2 fois dérivable en a . Alors

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

Démonstration : Par la formule de Taylor-Young, on sait que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f''(a)}{2}.h^2 + o(h^2)$$

et

$$f(a-h) = f(a) - f'(a).h + \frac{f''(a)}{2}.h^2 + o(h^2)$$

On en déduit bien l'égalité annoncée...□

Corollaire 40 (Calcul de la dérivée n -ième d'une fonction) Si f est n fois dérivable en 0, alors

$$f^{(n)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} f(kh)$$

Démonstration : Notons $A(h) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} f(kh)$, et utilisons la formule de Taylor-Young à l'ordre n pour chaque $f(kh)$, on obtient

$$A(h) = \sum_{(k,i) \in [0,n]^2} C_n^k (-1)^{n-k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} k^i h^i + o(k^n h^n)$$

Le terme en h^p est alors $\frac{f^{(p)}(0)}{p!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k^p$.

Il ne reste plus qu'à voir que $\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k^n = n!$ et $\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k^p = 0$ pour $0 \leq p < n$; voir proposition ?? . \square

Définition 41 On appelle **ordre** d'un zéro d'une fonction $f \in C^\infty$ l'entier p minimal tel que $f^{(p)}(a) \neq 0$. Si un tel entier n'existe pas, le zéro est dit d'**ordre infini**.

Corollaire 42 Tout zéro d'ordre fini n d'une fonction dérivable au moins n fois est isolé.

Démonstration : Il suffit d'écrire Taylor-Young, et de se placer suffisamment près du zéro... \square

↗ Une fonction C^∞ qui possède une infinité de zéros sur un compact donné en compte au moins un qui est d'ordre infini.

1.7 La trigonométrie

Je ne donnerai ici que quelques définitions, les preuves et formules étant données dans le formulaire (partie ??).

Les fonctions trigonométriques se définissent généralement à partir de l'exponentielle complexe : avec $\exp(t)$ lui-même défini par une somme de série (voir partie 4.9.1).

On définit $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ et $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$, pour x réel³. On dérive certaines propriétés (voir partie ??) de ces fonctions. La périodicité de $x \mapsto e^{ix}$ donne notamment de nombreux résultats.

Exemple Maple
$> \text{combine}(\cos(x)^5, \text{trig})$ $\frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)$

³Pour z complexe, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

1.8 Pratique du calcul de primitives

Il est nécessaire avant tout de bien connaître les primitives signalées dans le chapitre ???. Dans TOUS les cas, on aura bien soin de regarder sur quels intervalles on peut définir la primitive. Pour cela on déterminera les intervalles sur lesquels la fonction est continue, puis on regarde aux bornes de chaque intervalle si la fonction peut-être prolongée par continuité.

1.8.1 Primitives de fractions rationnelles

On trouvera en FLEMMARD une méthode de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. Une fois une fraction rationnelle décomposée en éléments simples, il suffit d'appliquer les recettes de cuisine évoquées à la partie "primitives" du chapitre ???. Les discontinuités sont les pôles de la fraction rationnelle.

1.8.2 Primitives de $P(\cos(x), \sin(x))$

P désigne un polynôme à deux indéterminées.

Cette situation se présente couramment dans la vie de tous les jours et il est indispensable d'être bien préparé pour y faire face.

Il est évidemment suffisant de savoir intégrer un monôme, c'est-à-dire un élément de la forme $f_{n,m} = x \mapsto \cos(x)^n \sin(x)^m$

- Si n est impair, il suffit de remplacer $\cos(x)^n$ par $(1 - \sin(x)^2)^{\frac{n-1}{2}} \cos(x)$, et le changement de variable $u = \sin(x)$ nous ramène au calcul de la primitive d'un polynôme.

- Si m est impair, il suffit de remplacer $\sin(x)^m$ par $(1 - \cos(x)^2)^{\frac{m-1}{2}} \sin(x)$, et le changement de variable $u = \cos(x)$ nous ramène au calcul de la primitive d'un polynôme.

- Si n et m sont pairs, une méthode générale est de linéariser. Voir pour cela la partie 1.7. On peut aussi procéder par une intégration par parties, pour se ramener à $I_{n+m,0}$ ou $I_{0,n+m}$

- c'est-à-dire que dans l'intégration par parties on intègre $\cos(x)^n \sin(x)$ et on dérive $\sin(x)^{m-1}$ si $n > m > 0$, pour se ramener à une primitive de $\cos(x)^{n+2} \sin(x)^{m-2}$

- et si $m > n > 0$ on intègre $\sin(x)^m \cos(x)$ et on dérive $\cos(x)^{n-1}$ pour se ramener à une primitive de $\cos(x)^{n-2} \sin(x)^{m+2}$.

1.8.3 Primitives de $G(x) = F(\cos(x), \sin(x))$

F désigne une fraction rationnelle à deux indéterminées.

Les discontinuités seront généralement en nombre infini, périodiques ; il convient d'étudier précisément ce qu'il se passe au niveau de chaque discontinuité.

F désigne une fraction rationnelle à deux indéterminées.

On aura alors recours à la règle de Bioche (que l'on peut justifier rigoureusement, voir par exemple le livre d'analyse de Arnaudès et Fraysse).

Proposition 43 *La règle de Bioche nous dit que :*

- Si G est paire, ie $G(-x) = G(x)$, on fait le changement de variable $u = \sin(x)$
- Si G est impaire, ie $G(-x) = -G(x)$, on fait le changement de variable $u = \cos(x)$
- Si G est ω -périodique, c'est à dire si $G(x) = G(x + \omega)$, on fait le changement de variable $u = \tan(\frac{\pi x}{\omega})$.
- Si G n'est rien de tout ça, on n'aura plus d'autre choix que le changement de variable $u = \tan(x/2)$. Rappelons que dans ce cas, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $dx = \frac{2}{1+u^2} du$

1.8.4 Primitives de $H(x) = F(ch(x), sh(x))$

On pensera bien à vérifier en quels points s'annulent le dénominateur.

F désigne une fraction rationnelle à deux indéterminées.

On considère alors la fonction $G(x) = F(\cos(x), \sin(x))$.

- Si G est paire, ie $G(-x) = G(x)$, on fait le changement de variable $u = sh(x)$
- Si G est impaire, ie $G(-x) = -G(x)$, on fait le changement de variable $u = ch(x)$
- Si G est π -périodique, c'est à dire si $G(x) = G(x + \pi)$, on fait le changement de variable $u = th(x)$.
- Si G n'est rien de tout ça, on peut faire le changement de variable $u = th(x/2)$. La partie ?? fournit les formules nécessaires. Dans beaucoup de cas pratiques, il sera en fait préférable de faire $u = e^x$.

1.8.5 Primitives abéliennes

Une étude plus complète (notamment incluant des justifications géométriques) se trouve dans le livre d'analyse de Arnaudiès et Fraysse.

$$\square \int R(x, \sqrt{ax+b})$$

R est supposée être une fraction rationnelle à deux indéterminées, a et b des réels. Il suffit alors de faire le changement de variable $u = \sqrt{ax+b}$ pour que magiquement tout s'arrange et que l'on n'ait plus qu'une fraction rationnelle à intégrer.

$$\square \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \text{ avec } a > 0$$

R est supposée être une fraction rationnelle à deux indéterminées.

On fait alors le changement de variable $u = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax}$. En fait cela revient simplement à considérer un repère dans lequel l'équation de l'hyperbole est plus sympathique, c'est-à-dire un repère dont les axes sont les asymptotes de l'hyperbole.

On trouvera dans FLEMMARD d'autres variantes sympathiques.

$$\square \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \text{ avec } a < 0$$

Géométriquement, on constate simplement que la courbe $x \mapsto (x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ est dans le cas $a < 0$ un morceau d'ellipse, et on se donne une paramétrisation sympathique, qui nous donne x comme un cosinus de u (à divers facteurs près) et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ comme un sinus de u (là encore à divers facteurs près).

On fait le changement de variable $\cos(u) = \sqrt{\frac{a^2}{b^2/4-ac}}(x+b/a)$. Cela nous ramène à $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{\frac{ac-b^2/4}{a}} \sin(u)$, et nous simplifie tout ça de manière à en faire une fraction rationnelle.

$$\square \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$$

R est supposée être une fraction rationnelle à deux indéterminées.

Si $n = 2$, il suffit de multiplier par $\sqrt{\frac{cx+d}{cx+d}}$ pour se ramener au cas précédent ; sinon on constate que la fonction réciproque de cette fonction est rationnelle, et donc on pose simplement $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ pour se ramener à une fraction rationnelle.

1.9 Zoologie de la dérivation

1.9.1 Une application du théorème de Rolle

Proposition 44 Soient f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , dérivables sur $]a, b[$. Si $g(b) \neq g(a)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix}$$

s'annule.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle 30 à la fonction h définie par $h(t) = f(t) - f(a) - \frac{g(t) - g(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (f(b) - f(a))$. \square



Alors que le théorème des accroissements finis exprime le fait qu'une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} a une tangente parallèle à n'importe laquelle de ses cordes, le théorème 44 montre que c'est en fait valable pour n'importe quelle courbe dérivable dans \mathbb{R}^2 .

Corollaire 45 (Règle de l'Hôpital) On se donne deux fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continues en $a \in \mathbb{R}$, et dérivables sur un voisinage de a privé de a , avec $f(a) = g(a) = 0$.

On suppose que g et g' sont non nulles sur un voisinage de a privé de a .

Alors si $\frac{f'}{g'}$ tend vers l en a , alors $\frac{f}{g}$ tend vers l en a .

Démonstration : Il s'agit exactement d'une application de la proposition 44. \square

1.10 Zoologie de l'intégration

1.10.1 Intégrales de Wallis

Définition 46 (Intégrale de Wallis) On définit la n ème intégrale de Wallis par $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \cdot dx$.

Supposons $n \geq 2$. On peut écrire $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) \cdot (1 - \cos^2(x)) \cdot dx$ car $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Ensuite on peut écrire $I_n = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) \cdot \cos^2(x) \cdot dx$.

Par une intégration par partie (théorème 10) (on intègre $\sin^{n-2}(x) \cdot \cos(x)$ et on dérive $\cos(x)$) on obtient

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Le produit $n \cdot I_n \cdot I_{n-1}$ est donc constant, égal à $\Pi/2$.

Il reste à remarquer que $I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2} = \frac{n}{n-1} I_n$ pour pouvoir dire que $I_n \simeq I_{n-1}$.

On peut alors conclure que :□

Proposition 47 $I_n \simeq \sqrt{\frac{\Pi}{2n}}$.

1.10.2 Primitives de f , $\frac{f'}{f} = a/x + o(1/x)$

Théorème 48 On se donne f une fonction > 0 et C^1 au voisinage de $+\infty$, et on suppose que $\frac{f'}{f} = a/x + o(1/x)$, avec $a \neq -1$.

On définit $F(x) = \int_b^x f(t) dt$.

Si l'intégrale $\int_b^{+\infty} f$ converge, on définit $R_f(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$.

Alors :

$$\begin{cases} a > -1 \Rightarrow \begin{cases} \int_b^{+\infty} f \text{ diverge} \\ F(x) \simeq \frac{xf(x)}{a+1} \end{cases} \\ a < -1 \Rightarrow \begin{cases} \int_b^{+\infty} f \text{ converge} \\ R_f(x) \simeq -\frac{xf(x)}{a+1} \end{cases} \end{cases}$$

Démonstration :

- Si $a = 0$, l'intégrale $\int_b^{+\infty} f(t) dt$ diverge car

$$f'(x)/f(x) = o(1/x)$$

$$-\epsilon \ln(x/b) \leq \ln(f(x)/f(b))$$

$$f(x)/f(b) \geq (x/b)^{-\epsilon}$$

Donc si $\epsilon \leq 1$, on minore bien notre fonction par quelque chose de trop gros pour être intégrable.

Il suffit ensuite de faire une intégration par partie (théorème 10) pour justifier que $F(x) = xf(x) - bf(b) - \int_b^x tf'(t) dt$.

L'intégrale $\int_b^x tf'(t) dt$ est un $o(\int_b^x f(t) dt)$ puisque $tf'(t)$ est un $o(f(t))$, f étant positive et d'intégrale divergente.

Donc $F(x) \simeq xf(x)$.

- Si $a \neq 0$, alors l'intégrale de a/x est de signe constant et est divergente en $+\infty$, donc on peut écrire $\ln(f(x)) \simeq a \ln(x)$.

- Si $a > -1$, avec $\epsilon = (a+1)/2$ et η tel que pour $x > \eta$, $\ln(f(x)) \geq (a-\epsilon)\ln(x)$, on a pour $x > \eta$ $f(x) \geq x^{a-\epsilon}$ avec $a-\epsilon > -1$, et donc l'intégrale diverge. On peut

alors écrire, grâce à une intégration par parties (théorème 10) :

$$F(x) = xf(x) - bf(b) - \int_b^x f(t)dt \quad (1.1)$$

Puisque l'intégrale diverge et puisque $a f(t) \simeq tf'(t)$

$$aF(x) \simeq \int_b^x tf'(t)dt$$

En remplaçant cette expression dans l'équation 1.1, on obtient

$$F(x) = xf(x) - aF(x) + o(F(x))$$

et donc

$$F(x) \simeq \frac{xf(x)}{1+a}$$

- Si $a < -1$, avec $\epsilon = (a+1)/2$ et η tel que pour $x > \eta \ln(f(x)) \leq (a+\epsilon)\ln(x)$, donc pour $x > \eta f(x) \leq x^{a+\epsilon}$ avec $a+\epsilon < -1$, et donc l'intégrale converge.

Par définition,

$$R_f(x) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_x^Y f(t)dt$$

On peut alors écrire, grâce à une intégration par parties (théorème 10) :

$$R_f(x) = \lim_{Y \rightarrow \infty} (Yf(Y) - xf(x) - \int_x^Y tf'(t)dt) \quad (1.2)$$

Or $\int_x^Y tf'(t)dt$ converge pour $Y \rightarrow \infty$, et $\int_x^\infty tf'(t)dt = aR_f(x) + o(R_f(x))$.
donc

$$R_f(x) = -\frac{1}{1+a}xf(x) + \lim_{Y \rightarrow \infty} Yf(Y) + o(F(x))$$

Par ailleurs $Yf(Y)$ a une limite en $+\infty$ (au vu de l'équation 1.2); cette limite ne peut être que 0, vue la convergence de l'intégrale de f .

D'où

$$R_f(x) = -\frac{1}{1+a}xf(x) + o(R_f(x))$$

ce qui est bien le résultat souhaité. \square

1.10.3 Méthode de Laplace

Théorème 49 (Méthode de Laplace) Soit f une fonction C^2 sur $]a, b[$, avec $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, telle que f admette un maximum unique en $c \in]a, b[$, avec $f''(c) < 0$, f n'ayant pas $f(c)$ pour valeur d'adhérence pour $x \rightarrow a$ ni pour $x \rightarrow b$, et soit g une fonction continue sur $]a, b[$ avec $g(c) \neq 0$.
On suppose en outre que pour tout t l'intégrale

$$\int_a^b |g(x)| e^{tf(x)} dx$$

est convergente.

Alors

$$\int_a^b g(x) e^{tf(x)} dx \simeq_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi} g(c) e^{tf(c)}}{\sqrt{-tf''(c)}}$$

Démonstration :

- En remplaçant $f(x)$ par $f(x - c)$ et $g(x)$ par $g(x - c)$ on se ramène au cas où $c = 0$, quitte à changer a et b (s'ils ne sont pas infinis).

- Quitte à remplacer g par $-g$, on suppose $g(0) > 0$.

- On se donne $\epsilon > 0$.

- On se donne $\delta > 0$, suffisamment petit pour que $|x| \leq \delta$ implique

$$f(0) + \frac{f''(0)}{2} x^2 (1 + \epsilon) \leq f(x) \leq f(0) + \frac{f''(0)}{2} x^2 (1 - \epsilon)$$

et

$$(1 - \epsilon)g(0) \leq g(x) \leq (1 + \epsilon)g(0)$$

- On précise alors $I(\delta, t) = \int_0^\delta g(x) e^{tf(x)} dx$;

$$\int_0^\delta g(x) e^{tf(0) + t \frac{f''(0)}{2} (1 + \epsilon) x^2} \leq I(\delta) \leq \int_0^\delta g(x) e^{tf(0) + t \frac{f''(0)}{2} (1 - \epsilon) x^2}$$

- On cherche alors à préciser $U(\delta, t, \pm) = \int_0^\delta g(x) e^{tf(0) + t \frac{f''(0)}{2} (1 \pm \epsilon) x^2}$.

$$\int_0^\delta g(0)(1 - \epsilon) e^{tf(0) + t \frac{f''(0)}{2} (1 - \epsilon) x^2} \leq U(\delta, t, \pm) \leq \int_0^\delta g(0)(1 + \epsilon) e^{tf(0) + t \frac{f''(0)}{2} (1 + \epsilon) x^2} dx$$

- On effectue un changement de variable $y = x \sqrt{-tf''(0)(1 - \epsilon)/2}$.

- En ne traitant que l'inégalité de droite (l'autre étant similaire) :

$$U(\delta, t, \pm) \leq \frac{\int_0^{\delta \sqrt{-tf''(0)(1 \pm \epsilon)/2}} g(0)(1 + \epsilon) e^{tf(0) - y^2} dy}{\sqrt{-tf''(0)(1 \pm \epsilon)/2}}$$

- On a alors

$$U(\delta, t, \pm) \leq \frac{g(0)e^{tf(0)} \int_0^\delta \sqrt{-tf''(0)(1-\epsilon)/2} (1+\epsilon)e^{-y^2} dy}{\sqrt{-tf''(0)(1 \pm \epsilon/2)}} \leq e^{tf(0)} g(0) \frac{2\Pi}{2\sqrt{-tf''(0)(1 \pm \epsilon)}}$$

• Majorons maintenant $U(\delta, t, -)$, en prenant garde au fait que δ dépend de ϵ :

$$U(\delta, t, -) \leq \int_0^\delta g(0)(1+\epsilon)e^{tf(0)+t\frac{f''(0)}{2}(1-\epsilon)x^2} dx$$

avec $y = \sqrt{-tf''(0)(1-\epsilon)}x$,

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\delta \sqrt{-tf''(0)(1-\epsilon)x} \frac{g(0)(1+\epsilon)e^{tf(0)-y^2} dy}{\sqrt{-tf''(0)(1-\epsilon)x}} \\ &\leq g(0)(1+\epsilon)e^{tf(0)} \frac{\int_0^\infty e^{-y^2} dy}{\sqrt{-tf''(0)(1-\epsilon)x}} \end{aligned}$$

Or $\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc

$$\leq \frac{\sqrt{2\pi}g(0)e^{tf(0)}(1+\epsilon)}{2\sqrt{-tf''(0)}\sqrt{1-\epsilon}}$$

De même on minore $U(\delta, t, +)$ par

$$\int_0^\delta g(0)(1-\epsilon)e^{tf(0)+t\frac{f''(0)}{2}(1+\epsilon)x^2} dx$$

avec $y = \sqrt{-tf''(0)\frac{1+\epsilon}{2}}$ on arrive à

$$\geq \frac{\sqrt{2\pi}g(0)e^{tf(0)}(1-\epsilon)}{2\sqrt{-tf''(0)}(1+\epsilon)}$$

pour $t \geq T_\epsilon$.

• On conclut alors que $I(\delta, t)$, qui vérifie

$$U(\delta, t, +) \leq I(\delta, t) \leq U(\delta, t, -)$$

est compris entre $\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}F(t)$ et $\frac{1+\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon}}F(t)$, avec $F(t) = \frac{\sqrt{2\pi}g(0)e^{tf(0)}}{2\sqrt{-tf''(0)}}$.

• $I(\delta, t)$ est équivalent à $e^{tf(0)}g(0)\frac{2\Pi}{2\sqrt{-tf''(0)(1-\epsilon)}}$

• On considère par ailleurs $V(\delta, t) = \int_\delta^b g(x)e^{tf(x)}$.

$$- |V(\delta, t)| \leq \int_\delta^b |g(x)|e^{(t-1)f(x)}e^{f(x)} dx$$

- Pour $x \in [\delta, b]$, $f(x) \leq f(\delta)$, si du moins on prend la peine d'imposer δ suffisamment petit.

- Donc pour un tel δ , $|V(\delta, t)| \leq e^{(t-1)f(\delta)} \int_\delta^b |g(x)|e^{f(x)} dx$

- Or $\int_{\delta}^b |g(x)|e^{f(x)} dx \leq \int_a^b |g(a)|e^{f(x)} < \infty$ (< par hypothèse)

• $V(\delta, t) = o(I(\delta, t))$ pour $t \rightarrow \infty$ (car $f(\delta) < f(0)$)

• On en déduit

$$\int_0^b g(x)e^{tf(x)} \simeq e^{tf(0)} g(0) \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{-tf''(0)(1-\epsilon)}}$$

• En effectuant la même manœuvre sur $]a, c]$ et en sommant (les équivalents étant tous deux positifs) on obtient le résultat désiré...□

1.11 Zoologie des suites

1.11.1 Moyenne de Césaro

Théorème 50 (Moyenne de Césaro) On se donne une suite u_n à valeurs dans un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E . Soit λ_n une suite de réels > 0 , telle que $\sum \lambda_n$ diverge.

Alors si $u_n \rightarrow l$, alors $v_n \rightarrow l$, avec $v_n = \frac{\sum_{k=0}^n \lambda_k \cdot u_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k}$.

Démonstration :

• On se ramène tout d'abord au cas où $l = 0$, simplement en considérant la suite de terme général $u_n - l$ (il est clair que v_n est ainsi diminué lui aussi de l).

• On se donne $\epsilon > 0$; il existe un certain N tel que pour tout $n > N$, $|u_n| < \epsilon$.

• Pour $n > N$, on a alors

$$v_n = \frac{\sum_{k=0}^N \lambda_k \cdot u_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k} + \frac{\sum_{k=N+1}^n \lambda_k \cdot u_k}{\sum_{k=0}^n \lambda_k}$$

• Le premier terme de la somme ci-dessus tend clairement vers 0, le second est plus petit qu' ϵ (en valeur absolue), d'où le résultat.□

1.11.2 Constante Γ d'Euler

Définissons $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n)$.

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{n}$$

car $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

En écrivant $u_{n+1} - u_n$, on obtient donc que u_n décroît.

Par ailleurs, $u_{n+1} - u_n > \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$, donc par sommation $u_n - u_1 > 1/n - 1$, donc $u_n > 0$. Donc u_n , décroissante positive, tend vers une limite finie, notée Γ et appelée **constante d'Euler**.

Définition 51 La limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n)$ est appelée **constante d'Euler** et est notée Γ .

On obtient facilement en Maple (par la commande "evalf(gamma,500)") :

```

Γ ≈ .5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672348848677267776646709
3694706329174674951463144724980708248096050401448654283622417399764492353625350033374293
7337737673942792595258247094916008735203948165670853233151776611528621199501507984793745
0857057400299213547861466940296043254215190587755352673313992540129674205137541395491116
8510280798423487758720503843109399736137255306088933126760017247953783675927135157722610
2734929139407984301034177717780881549570661075010161916633401522789358679654972520362128
7922655595366962817638879272680132431010476505963703947394957638906572967929601009015125
1959509222435014093498712282479497471956469763185066761290638110518241974448678363808617
4945516989279230187739107294578155431600500218284409605377243420328547836701517739439870
0302370339518328690001558193988042707411542227819716523011073565833967348717650491941812
3000406546931429992977795693031005030863034185698032310836916400258929708909854868257773
64288253954925873629596133298574739302

```

1.12 Zoologie des séries

1.12.1 Construction de séries divergentes positives toujours plus petites

Le comportement d'une série étant asymptotique, on pourrait se demander s'il ne serait pas possible de construire une suite de terme général (u_n) qui soit "à la limite" de la convergence, fournissant un critère par simple comparaison, permettant de décider si une série positive diverge ou non.

Il n'en est rien, car étant donnée une suite $u_n > 0$ telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge, on peut construire une suite $v_n > 0$ telle que $v_n = o(u_n)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ diverge.

Pour cela, soit $v_n = \frac{u_n}{U_n}$. Il est clair que $v_n = o(u_n)$. Il reste à voir que la série de terme général (v_n) diverge. Pour cela on utilise le critère de Cauchy ;

$$\begin{aligned}
 \forall N \in \mathbb{N}, \forall n > 0, V_{N+n} - V_N &= \sum_{i=N+1}^{N+n} \frac{u_i}{U_i} \\
 &\geq \frac{u_{N+1}}{U_{N+n}} + \dots + \frac{u_{N+n}}{U_{N+n}} \\
 &\geq \frac{U_{N+n} - U_{N-1}}{U_{N+n}} \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

comme $n \rightarrow \infty$, donc le critère de Cauchy n'est pas vérifié. \square

1.12.2 Somme des inverses des nombres premiers

On définit p_n comme le n -ième nombre premier, dans l'ordre croissant. On se pré-occupe de la nature de la série $\sum 1/p_n$ de terme général $1/p_n$.

Définissons $u_n = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$, et considérons $\ln(u_n) = \sum_{i=1}^n \ln(1 - 1/p_i)$, il apparaît que la série est de même nature que la suite (et non pas série !) (u_n) .

On remarque alors que

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{i=0}^{+\infty} 1/p_n^i$$

et on peut écrire tout nombre $1/n$ comme produit d'un certain nombre d'inverses de nombres premiers ; donc le produit u_n est supérieur à la somme des inverses des entiers plus petits que n (un nombre entier étant produit de nombres premiers inférieurs ou égaux à lui-même...); donc la suite (u_n) diverge, car $\sum 1/n$ diverge.

D'où


$$\sum_{n \geq 0} 1/p_n = +\infty$$

1.12.3 Groupement de termes


On a vu que dans le cas de séries à termes positifs, on pouvait permuter les termes autant qu'on le souhaitait sans changer la convergence de la série ; dans le cas général ce n'est pas vrai (considérer $u_n = (-1)^n$ par exemple, ou bien la série de terme général $u_n = (-1)^n/n$, que l'on peut faire tendre vers n'importe quelle limite réelle en changeant l'ordre des termes).

On a toutefois des résultats partiels :

Théorème 52 *On considère une suite u_n à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit ϕ une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} avec $\phi(0) = 0$. On définit $Tranche_n = u_{\phi(n)} + u_{\phi(n)+1} + \dots + u_{\phi(n+1)-1}$ (ceux qui n'ont pas compris pourquoi on appelait cette série "Tranche" sont priés de relire soigneusement cette ligne). On définit $GrosseTranche_n = |u_{\phi(n)}| + |u_{\phi(n)+1}| + \dots + |u_{\phi(n+1)-1}|$. On suppose que $GrosseTranche_n$ tend vers 0. Alors la série de terme général (u_n) converge si et seulement si la série de terme général $Tranche_n$ converge, et si elles convergent elles ont même somme.*

 Peu importe le caractère convergent de la série de terme général $(GrosseTranche_n)$!

Démonstration : Pas dur... On associe à tout n la somme partielle d'ordre ϕ_n , on montre que cette suite converge (c'est en fait l'hypothèse), et on montre en utilisant la seconde hypothèse que la différence entre U_n (la somme partielle d'ordre n) et $U_{\phi(p)}$, avec p maximal tel que $\phi(p) \leq n$, est petite pour n grand...□

 Dans le cas d'une série à termes positifs, on n'a pas besoin de l'hypothèse "GrosseTranche_n tend vers 0".

⇒ Application possible : règle de la loupe.

Proposition 53 (Règle de la loupe) Soit u_n une suite décroissante de réels > 0 ; alors les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n \cdot u_{2^n}$ sont de même nature.

Démonstration : Facile avec le groupement de termes ;

$$\frac{1}{2}2^{n+1}u_{2^{n+1}} \leq u_{2^{n+1}} + \dots + u_{2^n-1} \leq 2^n \cdot u_{2^n}$$

D'où le résultat, en constatant qu'on peut grouper les termes par $\phi(n) = 2^n$, puisque l'on est dans le cas d'une série à termes positifs. □

L'hypothèse de décroissance est nécessaire, comme on peut s'en convaincre en considérant $u_{2^n} = \frac{1}{2^{2^n}}$ et $u_p = 1$ si $p \notin \{2^n/n \in \mathbb{N}\}$.

⇒ Application possible : série de Riemann, série de Bertrand.

Si $u_n = 1/n^x$, $2^n \cdot u_{2^n} = \frac{2^n}{2^{nx}} = 2^{n \cdot (1-x)}$ donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $x > 1$

Si $u_n = 1/(n^x \cdot \log(n)^y)$, le résultat ci-dessus donne la convergence de la série $\sum u_n$ si $x > 1$, et la divergence si $x < 1$; il reste le cas limite $u_n = 1/(n \cdot \log(n)^y)$, dans ce cas $2^n \cdot u_{2^n} = 1/(n \cdot \ln(2))^y$, dont la série converge si et seulement si $y > 1$.


1.12.4 Exponentielle d'un endomorphisme


Théorème 54 Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ (i.e. f un endomorphisme continu de E), avec E un espace de Banach, on appelle **exponentielle de l'endomorphisme** f et on note $\exp(f)$ l'endomorphisme qui à x associe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$

Bien entendu, la convergence est normale sur tout borné de $\mathcal{L}(E)$, donc uniforme sur tout borné.

Théorème 55 (Dérivation de l'exponentielle) Soit E un Banach et soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors l'application $t \mapsto \exp(tf)$ est dérivable, de dérivée $\exp(tf) \circ f = f \circ \exp(tf)$.

Démonstration : Il suffit de voir que l'on a convergence uniforme de la série dérivée, et d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale ??.

 Attention à ne pas généraliser en croyant que $d(f \mapsto \exp(f)) = (g \mapsto \exp(f)g)$, ce n'est pas vrai en général, et du ici au fait que l'homothétie commute avec tout endomorphisme !

 pour la pratique du calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme en dimension finie, voir la partie ??.

1.12.5 Transformation d'Abel

Théorème 56 (Transformée d'Abel) Soit E un espace vectoriel normé, (r_n) une suite de réels, (e_n) une suite de E . On note $E_n = \sum_{k=0}^n e_k$. Alors pour tout $M < N$


$$\sum_{n=M}^N r_n e_n = [rE]_M^N - \sum_{n=M}^{N-1} (r_n - r_{n+1}) E_n$$

avec $[rE]_M^N = r(N)E(N) - r(M)E(M-1)$ par définition (attention au $-1!$).

Démonstration :

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^N r_n e_n &= \sum_{n=M}^N r_n (E_n - E_{n-1}) \\ &= \sum_{n=M}^N r_n E_n - \sum_{k=M-1}^{N-1} r_{n+1} E_n \\ &= [rE]_M^N - \sum_{n=M}^{N-1} (r_n - r_{n+1}) E_n \end{aligned}$$

D'où le résultat ; soulignons l'analogie avec l'intégration par parties (théorème 10). □

 les théorèmes 57 et 60.

□ **Théorème d'Abel**

Théorème 57 (Théorème d'Abel) Soit (r_n) une suite de réels tendant *en décroissant* vers 0 (au moins au voisinage de l'infini), soit (e_n) le terme général d'une série dans un Banach dont les sommes partielles sont bornées, alors la série de terme général (u_n) avec $u_n = r_n \cdot e_n$ converge, ie

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n \cdot e_n \text{ converge}$$

Démonstration : Application directe de la transformation d'Abel ! □

Un cas particulier classique est le cas $e_n = (-1)^n$:

Corollaire 58 (Série alternée) Si $u_n = (-1)^n \epsilon_n$ et si ϵ_n décroît vers 0, alors la série de terme général u_n converge.

⚠ La preuve utilisant Abel est un peu forte pour ce résultat, qui s'obtient facilement en considérant les suites U_{2n} et U_{2n+1} ; elles sont clairement adjacentes. On voit alors en outre que la limite U de U_n est toujours comprise entre U_{2n+1} et U_{2n} .

□ **Théorème de Dirichlet**

Définition 59 On dit qu'une suite (x_n) est à **variation bornée** si la série de terme général (y_n) est absolument convergente, avec $y_n = x_{n+1} - x_n$,

Grâce au critère de Cauchy, on peut constater qu'une suite à variation bornée est convergente.

Théorème 60 (Théorème de Dirichlet) Soit ϵ_n une suite à variation bornée tendant vers 0, et soit (v_n) une suite telle que la série de terme général (v_n) ait ses sommes partielles bornées, alors la série de terme général (u_n) converge, avec $u_n = \epsilon_n \cdot v_n$.

Démonstration : Encore grâce à la transformation d'Abel, avec un zeste de critère de Cauchy. □

L'hypothèse $\epsilon_n \rightarrow 0$ est nécessaire ; pour avoir un contre-exemple, considérer $\epsilon_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ et $x_n = (-1)^n$.

1.12.6 Produit de convolution de deux séries

☐ Pour commencer

Définition 61 On se donne deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Par définition, le **produit de convolution** de ces deux séries est la série de terme général w_n défini par

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k \cdot v_{n-k}$$

Proposition 62 Si deux séries sont absolument convergentes, alors le produit de leurs sommes est égal à la somme de leur produit de convolution (qui est une série absolument convergente).

Démonstration : • On suppose tout d'abord les séries à termes positifs.

En notant U_n, V_n et W_n les sommes partielles des séries de termes généraux u_n, v_n, w_n , on constate facilement que

$$W_n \leq U_n \cdot V_n \leq W_{2n}$$

(on peut voir ça facilement en cochant sur le plan quadrillé les coordonnées (a, b) telles que $u_a \cdot v_b$ intervienne dans les différentes sommes ci-dessus, on obtient un carré et deux triangles imbriqués les uns dans les autres : voir figure 1.3...)

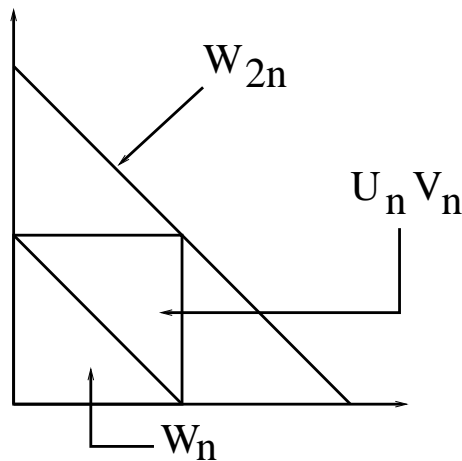


FIG. 1.3 – Produit de convolution

• Le cas général est un peu plus prise de tête.

On reprend les mêmes notations, et on ajoute les notations $|U|_n, |V|_n$ et $|W|_n$ pour les sommes partielles des séries de termes généraux $|u_n|, |v_n|$ et $|w_n|$.

La convergence absolue du produit de convolution découle trivialement du cas positif. La convergence de W_n vers $(\lim U_n \cdot \lim V_n)$, elle, vient du fait que

$$|U_n \cdot V_n - W_n| \leq |U|_n \cdot |V|_n - |W|_n$$

☐ **Pour les pros : Cauchy-Mertens**

On peut en fait affaiblir les hypothèses (le résultat étant à peine affaibli) :

Théorème 63 (Cauchy-Mertens) *On se donne deux séries de termes généraux (u_n) et (v_n) , la série de terme général (u_n) étant supposé absolument convergente, et la série de terme général v_n étant convergente. Alors le produit de convolution de ces deux séries est convergent, et la somme du produit de convolution est égale au produit des sommes de ces deux séries.*

Démonstration : On utilise les notations usuelles pour U_n, V_n, W_n ; on introduit aussi les quantités U, V et W , égales respectivement à la somme des u_n , à la somme des v_n et à la somme des w_n .

- On remplace v_0 par $v_0 - V$. En changeant cela on ne change pas la nature de la série de terme général v_n . La somme U n'est pas changée, et la somme W est diminuée de $V.U$, et V est remplacé par 0 ; donc il n'y a pas de perte de généralité.

- On suppose donc que $V = 0$. Par un raisonnement analogue à celui illustré sur la figure 1.3, on constate que

$$W_n = \sum_{k=0}^n u_k \cdot V_{n-k}$$

On se donne M un majorant de $|V_n|$.

On se donne alors $\epsilon > 0$, et N tel que la somme des $|u_i|$ pour $i > N$ soit inférieure à ϵ .

On décompose alors W_n en deux sommes :

$$|W_n| \leq \sum_{k=0}^N |u_k \cdot V_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^n |u_k \cdot V_{n-k}|$$

or :

$$- \sum_{k=0}^N |u_k \cdot V_{n-k}| \leq (N + 1) \cdot (\max_{k \in [0, N]} |u_k|) \cdot (\max_{k \in [0, N]} |V_{n-k}|)$$

et par ailleurs

$$- \sum_{k=N+1}^n |u_k \cdot V_{n-k}| \leq M \sum_{k=N+1}^n |u_k| \leq \epsilon M$$

d'où

$$\begin{aligned} &\leq (N + 1) \cdot (\max_{k \in [0, N]} |u_k|) \cdot (\max_{k \in [0, N]} |V_{n-k}|) + \epsilon M \\ &\leq \epsilon M + \epsilon \text{ pour } n \text{ assez grand} \end{aligned}$$

D'où le résultat. ☐


Et si c'est le produit qui converge ?

On se donne deux série de terme général u_n et v_n , et on définit w_n le terme général de la série produit de convolution de ces deux séries.

On suppose que $\sum w_n$ converge. Alors les séries de termes généraux (u_n) et (v_n) convergent. Ce résultat est cité dans [15], avec un embryon de démonstration (il s'agit d'utiliser Césaro).

1.12.7 Transformation de Toeplitz

Définition 64 Etant donnée une famille $(c_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ de coefficients complexes, on définit la **transformation de Toeplitz** associée à cette famille comme étant l'application qui à une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la suite $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $Tu_n = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} \cdot u_i$.
On dit que T est régulière si et seulement si pour toute suite u_n convergente, Tu_n est définie pour tout n et la suite (Tu_n) converge vers la même limite que (u_n) .

 Il s'agit de convergence de suites et non de séries ; seuls les termes des Tu_n sont définis par des séries.

Proposition 65 La transformation de Toeplitz T associée à $c_{n,m}$ est régulière si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour tout j , $c_{i,j} \rightarrow 0$ comme i tend vers $+\infty$.
- $\sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j}$ tend vers 1 comme $i \rightarrow \infty$
- $\sum_{j=0}^{\infty} |c_{i,j}|$ est défini pour tout i et est borné par une constante M indépendante de i

Démonstration :

- Supposons que la transformation T soit régulière.
 - le premier • exprime simplement le fait que T est régulière appliqué à la suite $u_n = \delta_{n,j}$.
 - Le second • exprime simplement le fait que T est régulière appliqué à la suite constante égale à 1.
 - Le troisième • se montre facilement en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus. On définit :

$$T_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} x_j$$

définie pour x une suite convergente ; T_i est bornée indépendamment de i .

Chaque T_i est une application linéaire continue de l'espace de Banach des suites convergentes de \mathbb{C} (pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$) dans \mathbb{C} .

Par le théorème de Banach-Steinhaus (théorème ??), on peut donc trouver M tel que pour toute suite x ,

$$|T_i(x)| \leq M \cdot \|x\|_{\infty}$$

On considère alors, pour i donné et m quelconque, la suite $x^{(m)}$ définie par :

$$x_j = \bar{c}_{i,j} / |c_{i,j}| \text{ si } j < m \text{ et } c_{i,j} \neq 0$$

$$x_j = 0 \text{ sinon}$$

$x^{(m)}$ est convergente, de limite 0, bornée par 1.

En calculant $T_i(x^{(m)})$, on constate que la somme des $|c_{i,j}(x)|$ est bornée par M .
D'où le point • .

• Il reste à voir la réciproque, c'est à dire que l'on suppose les trois points réalisés, et on cherche à montrer que T est régulière.

- On se donne (u_n) une suite convergente.

- La suite $\sum_j c_{i,j} u_j$ est évidemment convergente car $c_{i,j} u_j = O(c_{i,j})$ avec $\sum_j c_{i,j}$ absolument convergente. Donc Tu_n est bien défini pour tout n .

- Il reste à montrer que pour toute suite (u_n) la suite de terme général $Tu_n = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} u_i$ converge vers la même limite que (u_n)

- dans le cas général, on se ramène facilement au cas d'une limite nulle 0, en remplaçant u_n de limite l par $u_n - l$ (rappelons que par hypothèse $\sum_j c_{i,j} \rightarrow 1$ quand $i \rightarrow \infty$).

- On se donne donc une suite u_n de limite nulle.

- On se donne N tel que $|u_n| < \frac{\epsilon}{M}$ pour $n \geq N$.

$$|Tu_i| = \sum_{j=0}^N c_{i,j} \cdot u_j + \sum_{j=N+1}^{\infty} c_{i,j} \cdot u_j$$

- Le terme $\sum_{j=0}^N c_{i,j} \cdot u_j$ tend vers 0 pour i tendant vers $+\infty$, puisque par hypothèse $c_{i,j} \rightarrow 0$ pour tout j quand $i \rightarrow +\infty$.

- Le terme $\sum_{j=N+1}^{\infty} c_{i,j} \cdot u_j$ est borné par ϵ , par définition de M et N .
- On a donc bien le résultat souhaité. \square

Corollaire 66 *Ce résultat montre facilement que la moyenne de Césaro est une transformation de Toeplitz régulière ; $c_{n,m} = 1/(n+1)$ si $m \leq n$ et 0 sinon.*

Si u_n , suite à valeurs complexes, converge vers l , alors $Tu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n u_i$ converge aussi vers l .

Chapitre 2

Développements limités - comparaison de fonctions


2.1 Définitions de base


Définition 67 On se donne a un point d'un espace topologique X , et on note $\mathcal{V}'(A)$ l'ensemble des voisinages de a privés de a , et $U \in \mathcal{V}'(A)$.

Etant données deux applications f et g , f de U dans un espace vectoriel normé et g de U dans \mathbb{R} , on dit que f est **dominée** par g , noté $f = O(g)$, si il existe une constante M telle que $\|f\| \leq M \cdot |g|$ sur un certain $V \in \mathcal{V}'(A)$.

Etant données deux applications f et g , f de U dans un espace vectoriel normé et g de U dans \mathbb{R} , on dit que f est **négligeable** devant g , noté $f = o(g)$, si pour tout ϵ il existe $V \in \mathcal{V}'$ tel que $\|f\| \leq \epsilon \cdot |g|$ sur un certain $V \in \mathcal{V}'(A)$.

Etant données deux applications f et g de U dans \mathbb{R} , on dit que f est **équivalente** à g et on note $f \simeq g$ si $f - g = o(g)$.

 Ces notions sont locales ; $o(f)$ est lié, implicitement, à a ; la notation, dépourvue de la mention de a , est légèrement abusive car dépendant du contexte.

 La notation est doublement abusive ; $f = o(g)$ signifie en fait que f appartient à l'ensemble des fonctions négligeables devant g – il ne s'agit pas d'égalité mais d'appartenance.

Proposition 68 • $f = o(1)$ si et seulement si f tend vers 0 en a .

• $f = O(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a .

• \simeq est une relation d'équivalence.

• f admet une limite non nulle en a et $f \equiv g$ implique que g admet la même limite en a .

• $f = o(g)$ équivaut à l'existence de V dans \mathcal{V}' et d'une fonction ϵ de V dans \mathbb{R} tendant vers 0 en a telle que

$$\forall x \in V \|f(x)\| \leq \epsilon(x) \cdot |g(x)|$$

• $f \simeq g$ équivaut à l'existence de V dans \mathcal{V}' et d'une fonction ϵ de V dans \mathbb{R} tendant vers 0 en a telle que

$$\forall x \in V f(x) = (1 + \epsilon(x)) \cdot g(x)$$

• $f \simeq g$ implique que f et g ont même signe au voisinage de a

• $f \simeq 0$ implique que f est nulle au voisinage de a (\triangleleft et pas seulement que f tend vers 0 !)

• En $+\infty$ $x \mapsto \ln(x^a)$ est négligeable devant $x \mapsto x^b$ qui est négligeable devant $x \mapsto e^{cx}$ pour a, b et $c > 0$.

Ces notations sont appelées notations de Landau.



Voir par exemple ??.

Définition 69 On dit que f de \mathbb{R} dans \mathbb{C} admet un **développement limité** en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre n s'il existe une fonction polynôme P de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que au voisinage de a $f(x) = P(x) + o((x - a)^n)$.

Bien que peu utilisé dans la pratique, il existe une autre définition, plus générale, utilisant les polynômes à coefficients dans un espace vectoriel normé :

Définition 70 (Généralisation) On dit que f de \mathbb{R} dans un espace vectoriel normé E admet un **développement limité** en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre n s'il existe un polynôme P à coefficients dans E telle que au voisinage de a $f(x) = P(x) + o((x - a)^n)$.


Je n'étudierai pas ce cas, pour lequel on se référera au livre [3].

On définit parfois la notion de développement limité au sens fort :

Définition 71 *On dit que f de \mathbb{R} dans un espace vectoriel normé E admet un **développement limité au sens fort** en $a \in \mathbb{R}$ à l'ordre n s'il existe un polynôme P à coefficients dans E telle que au voisinage de a $f(x) = P(x) + O((x - a)^{n+1})$.*

Proposition 72 • *S'il existe un polynôme P à coefficients dans E telle que au voisinage de a , $f(x) = P(x) + O((x - a)^{n+1})$, on peut toujours imposer que P soit de degré $\leq n$. En effet il suffit de prendre le reste dans la division euclidienne de P par $(x - a)^{n+1}$; le quotient multiplié par $(x - a)^n$ sera un négligeable devant $(x - a)^{n+1}$. Ceci a pour conséquence l'unicité du développement limité.*

- *Si f est continue en a , alors elle admet un développement limité en a d'ordre 0.*
- *Si f est dérivable en a , alors elle admet un développement limité en a d'ordre 1.*
- *Si f admet un développement limité à l'ordre 0 en a , alors elle est continue en a ou admet un prolongement par continuité en a .*
- *Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a , alors elle est dérivable en a ou est prolongeable en une fonction dérivable en a .*
- *si f est n fois dérivable en a , alors elle admet un développement limité en a d'ordre n (voir le théorème 38).*

 Il n'y a pas de réciproque au dernier • ! Une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n sans être dérivable plus d'une fois ! On donnera un exemple dans la partie 2.2

2.2 Opérations sur les équivalents et les développements limités

Proposition 73 On suppose f, g, h et $k > 0$ au voisinage de a ; x est un réel.

- $f \simeq g$ et $h \simeq k \Rightarrow fh \simeq gk$
- $f \simeq g \Rightarrow f^x \simeq g^x$

⚠ Par contre on n'a PAS la possibilité d'additionner des équivalents, même positifs.

Exemples : (fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 sans être 2 fois dérivable :

Considérons la fonction f :

$$t \mapsto t^3 \cdot \sin(1/t)$$

prolongée par continuité en 0 ($f(0) = 0$).

On considère son développement limité en 0.

Il est clair que $f(t) = O(t^3)$ car \sin est bornée.

Pourtant, en faisant le calcul, on constatera que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Proposition 74 (Unicité du développement limité) Si f admet un développement limité en a à l'ordre n , ce développement limité est unique.

Démonstration : Ecrire la différence entre deux polynômes de degré n comme un $o((x - a)^n)$; puis considérer le premier coefficient sur lequel ils diffèrent. □

NB : On peut définir les développements limités sur des intervalles de \mathbb{R} ; dans ce cas on note que le développement limité en a ou en b pour un développement limité sur $]a, b[$ est unique.

Proposition 75 (Troncature des développements limités) Si $f(t) = P(t) + o((t - a)^n)$ alors a fortiori $f(t) = P(t) + o((t - a)^p)$ pour $p < n$.

Proposition 76 Si $f(t) = P(t)(t - a)^k + o((t - a)^n)$ avec $k < n$ alors g définie par $g(t) = f(t)/(t - a)^k$ est prolongeable par continuité en a et $g(t) = P(t) + o((t - a)^{n-k})$.

Proposition 77 (Intégration d'un développement limité) Supposons f dérivable au voisinage de a , et

$$f'(t) = a_0 + a_1(t - a) + a_2(t - a)^2 + \dots + a_n(t - a)^n + o((t - a)^n)$$

Alors

$$f(t) = f(a) + a_0(t - a) + \frac{a_1}{2}(t - a)^2 + \frac{a_2}{3}(t - a)^3 + \dots + \frac{a_n}{n + 1}(t - a)^{n+1} + o((t - a)^{n+1})$$

Démonstration : On suppose donc

$$f(t) = P(t) + \epsilon(t)(t - a)^n$$

On se ramène par translation à $a = 0$ et on écrit

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + \int_0^t P(u) du + \int_0^t \epsilon(u) du \\ \left| f(t) - f(0) - \int_0^t P(u) du \right| &= \left| \int_0^t \epsilon(u) du \right| \\ &\leq \sup_{u \in [0, t]} |\epsilon(u)| \int_0^t |u^n| \cdot du \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

On a un résultat similaire avec des développements limités au sens fort.

Proposition 78 (Intégration d'un développement limité au sens fort)


Supposons f dérivable au voisinage de a , et

$$f'(t) = a_0 + a_1(t - a) + a_2(t - a)^2 + \dots + a_n(t - a)^n + O((t - a)^{n+1})$$

Alors

$$f(t) = f(a) + a_0(t - a) + \frac{a_1}{2}(t - a)^2 + \frac{a_2}{3}(t - a)^3 + \dots + \frac{a_n}{n + 1}(t - a)^{n+1} + O((t - a)^{n+2})$$

Démonstration : Tout à fait similaire à la preuve précédente. \square

 On NE PEUT PAS, dans le cas général, dériver terme à terme un développement limité ! Toutefois, c'est possible pour une fonction de classe C^∞ par exemple.

Par simplicité, on va maintenant supposer que $a = 0$. On en déduit bien évidemment le cas général.

Définition 79 On définit la relation suivante sur l'ensemble des fonctions continues en 0 :

$$f \equiv^n g \text{ si } f - g = o(x^n)$$

On dit que f est **tangente** à g à l'ordre n .

Proposition 80 • Tout d'abord une évidence :

$$f \equiv^n g$$

si et seulement si

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-n}(f(t) - g(t)) = 0$$

- $f \equiv^n g$ et $h \equiv^n k$ impliquent $f + h \equiv^n g + k$
- $f \equiv^n g$ et $h \equiv^n k$ impliquent $f \cdot h \equiv^n g \cdot k$
- $f \equiv^n g$ et $f(0) \neq 0$ implique $1/f \equiv^n 1/g$
- $f \equiv^n g$ et P polynôme implique $P \circ f \equiv^n P \circ g$
- $f \equiv^n g$ et $h(x) = O(x^p)$ impliquent $f \circ h \equiv^{np} g \circ h$

Démonstration : Seuls les trois derniers points méritent notre attention, les autres étant clairs.

- Supposons donc $f \equiv^n g$ et $f(0) \neq 0$.

$$x^{-n}(1/f(x) - 1/g(x)) = \frac{g(x) - f(x)}{x^n f(x)g(x)}$$

Or f et g ont une limite non nulle en 0. Donc $\frac{g(x) - f(x)}{x^n f(x)g(x)}$ tend vers 0 en 0 ; d'où le résultat.

- Il est suffisant de le montrer avec P un monôme ; et ce résultat découle de

$$f^p(x) - g^p(x) = (f(x) - g(x)) \sum_{k=0}^{p-1} f(x)^k g(x)^{p-1-k}$$

(le terme en \sum étant borné)

- On procède comme suit :

- Ecrivons $f(x) - g(x) = \epsilon(x)x^n$, avec $\epsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$

- Ecrivons $h(x) = M(x)x^p$, avec M bornée au voisinage de 0

- Alors $f \circ h(x) - g \circ h(x) = \epsilon(M(x)x^p)M(x)^n x^{np}$

Le résultat est alors acquis ; on note l'efficacité de la méthode consistant à écrire explicitement les $o(\cdot)$ avec des $\epsilon(\cdot)$ et des $M(\cdot)$. \square

Ces résultats vont permettre de combiner des développements limités de la manière expliquée ci-dessous.

Proposition 81 (Somme, produit, quotient, composé) Soient f et g admettant des développements limités en 0 à l'ordre n . Alors $f + g$ et fg admettent des développements limités en 0 à l'ordre n , et f/g aussi si $g(0) \neq 0$.

- Le développement limité de $f + g$ est la somme des développements limités de f et g .
- Le développement limité de fg est le produit des développements limités de f et g (on peut tronquer les termes d'ordre $> n$).
- Le développement limité du composé $g \circ f$, si $f(0) = 0$, si $f \equiv^n P$ et si $g \equiv^n Q$, est $Q \circ P$, valable à l'ordre n (on peut tronquer les termes d'ordre supérieur à n).
- Le développement limité de f/g est égal au développement limité du quotient des développements limités de f et g .

Démonstration : • Le cas de l'addition, du produit découlent immédiatement des résultats précédents.

• En reprenant les notations de l'énoncé, on écrit

$$g \circ f(x) = Q(f(x)) + \epsilon(f(x))f(x)^n$$

On sait ensuite que $Q(f(x))$ est équivalent à $Q(P(x))$ à l'ordre n (résultat de la proposition précédente). Et on sait que $f(x)^n$ est équivalent à $Q(x)^n$ à l'ordre n , toujours par la proposition précédente. D'où le résultat.


• Pour le quotient, il suffit, en vertu du résultat sur le produit, d'étudier le développement limité de l'inverse d'une fonction g donnée.

Or si P est le développement limité de g à l'ordre n , alors $1/g \equiv^n 1/P$ (résultat prouvé un peu plus haut).

Il suffit donc de calculer le développement limité de l'inverse. D'où le résultat (on verra un peu plus loin comment déterminer le développement limité en question). \square

Proposition 82 Les résultats précédents restent vrais si l'on travaille avec des développements limités au sens fort.

Démonstration : Les preuves sont les mêmes à peu de choses près. \square

 Dans la pratique du calcul des développements limités, bien penser à ne PAS calculer les termes de degré trop élevés, qui devront de toute façon être oubliés.

Proposition 83 *Le développement limité du quotient de P par Q est donné par la division suivant les puissances croissantes (voir théorème ??). C'est-à-dire :*

Avec $Q(0) \neq 0$, P/Q est équivalent en 0 à T , avec

$$P = TQ + X^{n+1}R$$

Démonstration : Le résultat découle immédiatement de la formule $P = TQ + X^{n+1}R$, en calculant $X^{-n-1} \cdot (P/Q - T)$. \square

2.3 Développements asymptotiques

La plupart des résultats de cette partie étant relativement faciles à établir à partir des résultats précédents ou par des méthodes similaires, les théorèmes seront généralement énoncés sans preuve.

Les développements limités sont limités au cas de fonctions admettant une limite en a ; on aimerait pouvoir manier des fonctions tendant vers l'infini, en les approchant par des fractions rationnelles au lieu de les approcher par des polynômes, par exemple.

Pour cela on étend les notations o , O et \simeq à des fonctions non nécessairement définies continues en a , et a peut désormais être $+\infty$ ou $-\infty$.

On dira que $f = O(g)$, si f est inférieure en module à Cg pour C une certaine constante et sur un certain voisinage de a .

On dira que $f = o(g)$ si pour tout ϵ positif, f est inférieure en module à $\epsilon \cdot g$ sur un certain voisinage V_ϵ (dépendant de ϵ bien sûr) de a .

On dira que $f \simeq g$ si $f - g = o(f)$.

De nombreuses propriétés restent valables ou s'étendent :

- $f \simeq g$ et $h \simeq k$ impliquent $fh \simeq gk$
- $f \simeq g$ et $1/f$ non nul au voisinage impliquent $1/f \simeq 1/g$
- si $h(b) = a$ et si h est continue en b , alors $f \simeq g$ implique $f \circ h \simeq g \circ h$.

Définition 84 On appelle **échelle de comparaison au voisinage de a^a** une famille d'applications définies au voisinage de a , non équivalentes à 0, et totalement ordonné par $\cdot = o(\cdot)$.

^aQui peut être fini ou non !

Exemples : • Les monômes x^k pour $k \in \mathbb{Z}$ constituent une échelle de comparaison au voisinage de l'infini.

• Les monômes x^k pour $k \in \mathbb{Z}$ constituent une échelle de comparaison au voisinage de zéro.

Mais on peut faire plus fin :

• Les monômes x^r pour $r \in \mathbb{R}$ constituent une échelle de comparaison au voisinage de l'infini.

• Les monômes x^r pour $k \in \mathbb{R}$ constituent une échelle de comparaison au voisinage de zéro.

• Les $x \mapsto x^\alpha \ln(x)^\beta$ constituent une échelle de comparaison (ordonnée par l'ordre lexicographique sur (α, β)) au voisinage de $+\infty$

• Les $x \mapsto x^\alpha \ln(x)^\beta$ ne constituent PAS une échelle de comparaison, car par exemple $\ln(x^2) (= 2\ln(x) !)$ et $\ln(x)$ ne sont pas ordonné pour $\cdot = o(\cdot) !$

• Les $x \mapsto x^\alpha e^{xP(x)}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$ constituent une échelle de comparaison, ordonnée par l'ordre lexicographique sur les coefficients de P par ordre décroissant puis le coefficient α (attention, il s'agit d'un ordre lexicographique sur des suites pouvant avoir un nombre de termes arbitrairement grand...) au voisinage de $+\infty$.

• Avec $\ln_n(x) = \underbrace{\ln \circ \ln \circ \ln \circ \dots \circ \ln}_{n \text{ fois}}(x)$, les $x \mapsto x^\alpha \prod_{i=1}^n \ln_i^{\beta_i}(x)$ ¹ forment une échelle de comparaison au voisinage de $+\infty$.

• Toujours au voisinage de $+\infty$, la famille des $\pi_{i=1}^n \ln_i^{\beta_i}(x) x^\alpha \pi_{j=1}^p e^{\lambda_j x^{\mu_j}}$ forme aussi une échelle de comparaison. L'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur les logarithmes.

¹pour α dans \mathbb{R} , n dans \mathbb{N} et les β_i dans \mathbb{R}

Définition 85 On se donne f une application d'une partie X de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et a appartenant à l'adhérence de X dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on se donne \mathcal{E} une échelle de comparaison au voisinage de a .

On dit que f admet un développement asymptotique pour l'échelle \mathcal{E} à la précision ϕ avec ϕ un élément de \mathcal{E} s'il existe une famille de réels presque tous nuls^a $(\lambda_\psi)_{\psi \in \mathcal{E}}$ tels que

$$f(x) = \sum_{\psi \in \mathcal{E}} \lambda_\psi \psi(x) + o(\phi)$$

^aC'est à dire que seul un nombre fini de ces réels sont non nuls.

2.4 Zoologie des comparaisons de séries, de fonctions

2.4.1 Equivalent de la suite des sommes partielles $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$

Citons un résultat facile :

Théorème 86 Etant donnée une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit la suite des sommes partielles associée $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$; lorsque (U_n) est une suite convergente, on définit aussi la somme $U = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$, et le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = U - U_n$. On définit de même, avec (v_n) une suite réelle, la série $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$, et si $V_n \rightarrow V$, $R'_n = V - V_n$. Alors :

Hypothèses	Conclusions
$u_n > 0$ pour $n \geq n_0$ $u_n \simeq v_n$ U_n converge	V_n converge $R_n \simeq R'_n$
$v_n > 0, u_n > 0$ $v_n = o(u_n)$ V_n diverge	U_n diverge $U_n \simeq V_n$

2.4.2 Equivalent de $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Théorème 87 On se donne désormais deux fonctions f et g définies sur $]a, +\infty[$ intégrables sur $]a, x[$ pour tout $x > a$.

ON SUPPOSE QUE f EST POSITIVE sur $]b, \infty[$ avec $b \geq a$

On définit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Si F a une limite en $+\infty$ on définit $R_f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$, et si G a une limite en $+\infty$ on définit $R_g(x) = \int_x^\infty g(t)dt$.

Alors on a les résultats suivant au voisinage de $+\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^x f(t)dt = +\infty \\ \int_a^x f(t)dt < +\infty \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} g = o(f) \Rightarrow \begin{cases} G = o(F) \\ R_g = o(R_f) \end{cases} \\ g = O(f) \Rightarrow \begin{cases} G = O(F) \\ R_g = O(R_f) \end{cases} \\ g \simeq f \Rightarrow \begin{cases} F \simeq G \\ R_g \simeq R_f \end{cases} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \int_a^\infty g(t)dt < +\infty \\ R_g = o(R_f) \\ \int_a^\infty g(t)dt < +\infty \\ R_g = O(R_f) \\ \int_a^\infty g(t)dt < +\infty \\ R_g \simeq R_f \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} g \geq 0 \text{ sur }]c, \infty[\text{ avec } c \geq a \end{array} \right.$$

Démonstration : Certaines preuves se trouvent un peu plus haut ; les autres sont faciles. \square

2.4.3 Comparaison séries-intégrales, cas $\frac{f'}{f}$ convergent

Théorème 88 On se donne une fonction f strictement positive et de classe C^1 au voisinage de $+\infty$.

On considère d'une part la série $\sum f(n)$, et d'autre part l'intégrale $\int_a^\infty f$.

On définit $S_n = \sum_{i=0}^n f(i)$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ (avec a suffisamment grand).

Soit $K(r) = \frac{r}{1-e^{-r}}$, prolongé par continuité en 0 par $K(0) = 1$.

Si la somme converge, on définit $R_n = \sum_{i=n+1}^\infty f(i)$.

Si l'intégrale converge, on définit $R_f(x) = \int_x^\infty f(t)dt$ (pour x assez grand).

On suppose $\frac{f'}{f} = r + o(1)$ alors

l'intégrale converge \iff la série converge, on a alors $R_n \simeq K(r)F(n)$.

l'intégrale diverge \iff la série diverge, on a alors $S_n \simeq K(r)F(n)$.

\triangle Voir le théorème 48 pour plus d'informations sur le cas $a = 0$.

Démonstration : On définit $g(t) = e^{-rt}f(t)$.

Alors on a $\frac{g'}{g} = o(1)$.

Donc on peut trouver un certain η tel que sur $] \eta, \infty[$ $|\frac{g'}{g}| \leq \epsilon$. Donc pour x appartenant à $[n-1, n]$ et pour $x > \eta$,

$$\left| \ln\left(\frac{g(x)}{g(n)}\right) \right| \leq \epsilon$$

et donc

$$\frac{g(x)}{g(n)} \leq e^\epsilon \text{ et } \frac{g(n)}{g(x)} \leq e^\epsilon$$

$$(e^{-\epsilon} - 1) f(n) \leq f(x) - f(n) \leq (e^\epsilon - 1) f(n)$$

Alors

$$\int_{n-1}^n f(t) dt = \int_{n-1}^n e^{rt}(f(t) - f(n)) dt + \int_{n-1}^n e^{rt} f(n) dt$$

Si $r = 0$ l'intégrale tout à droite est simplement $f(n)$, et le résultat en découle ; si $r \neq 0$, on réécrit cette expression sous la forme

$$\left| \int_{n-1}^n f(t) dt - K(r)f(n) \right| \leq e^{rn}(e^\epsilon - 1)g(n) = (e^\epsilon - 1)f(n)$$

Et on a le résultat souhaité. \square

2.5 Zoologie des développements limités

C'est en développant qu'on devient un bon développeur... On trouve la liste des résultats classiques dans le formulaire ??.

Le développement asymptotique de $x^{\frac{1}{x}}$ est :

$$x^{\frac{1}{x}}$$

$$= \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

$$= 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^3\right)$$

$$= 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On trouvera de nombreux exemples (méthode de Laplace, méthode du col...) dans le livre "Calcul infinitésimal", de Dieudonné.

Chapitre 3

Interversions

La hantise classique du mathématicien est de justifier les permutations entre sommes, intégrales, limites, dérivation. L'objectif de cette partie est de fournir tous les outils pour affronter cette tâche...

3.1 Intersion de limites et de dérivation

Pour cela, on consultera la partie??.

3.2 Intersion de limites et de limites

Il s'agit bien sûr d'invertir une limite au sens d'un espace de fonctions avec une limite au sens de l'espace sur lequel sont définies ces fonctions... Formellement ça donne ça :

Théorème 89 Soit X un espace topologique, A une partie de X , a un point de l'adhérence de A .

Soit (E, d) un espace métrique, et enfin soit f_n une suite d'applications de A dans E , et f une application de A de E .

Supposons que :

- $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = e_n$
- f_n converge uniformément vers f sur A
- E est **COMPLET**

Alors il existe un certain e limite de e_n et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = e$

Démonstration :

• On considère \tilde{f}_n la fonction égale à f_n sur A et prolongée par continuité en a en posant $\tilde{f}_n(a) = e_n$; \tilde{f}_n est donc continue en a .

• On se donne $\epsilon > 0$.

• La convergence des f_n étant uniforme, on peut trouver N tel que

$$n, m > N \Rightarrow \forall x, d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$$

• On passe à la limite pour $x \rightarrow a$ et on obtient

$$n, m > N \Rightarrow d(e_n, e_m) \leq \epsilon$$

(ceci implique que la suite (e_n) est de Cauchy, donc par complétude de E qu'elle a une certaine limite e)

• La convergence de \tilde{f}_n est donc uniforme (par le critère de Cauchy pour la norme uniforme) (voir ??)

• Les \tilde{f}_n étant continues en a , leur limite (uniforme) est donc continue en a (voir proposition ??); d'où le résultat. \square


Corollaire 90 Soit f_n des fonctions continues admettant une limite e_n en $a \in \bar{A}$, à valeurs dans E espace de Banach, telles que la série des f_n converge normalement (pour la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$) vers f .

Alors la série de terme général e_n converge vers un certain e , et f tend vers e en a .

Démonstration : C'est exactement la même propriété, dans le cas des séries... \square

3.3 Interverson d'une limite et d'une intégrale

Définition 91 (Application réglée) Une application de \mathbb{R} dans un espace topologique est dite **régulée** si et seulement si elle admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point.

 On ne demande pas du tout que la limite à droite soit égale à la limite à gauche, ni qu'aucune de ces deux limites soit égale à la valeur de l'application en ce point.



Les applications réglées ont été définies en parties 1.3 (sur l'intégrale de Riemann) comme les éléments de l'adhérence de l'ensemble des fonction en escalier (adhérence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). Ces deux définitions sont équivalentes pour peu que

X soit métrique.

Théorème 92 *On se donne E un espace de Banach, et f_n une suite d'applications réglées du segment $[a, b]$ de \mathbb{R} dans E convergeant uniformément vers f .
Alors f est réglée et $\int_{[a,b]} f = \lim \int_{[a,b]} f_n$.*

Démonstration : Le fait que f soit réglée est un corollaire immédiat du théorème 89 (intersion des limites de suites et de fonctions sous certaines hypothèses).

Pour conclure il suffit d'observer que $|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b]} f_n| \leq \int_{[a,b]} |f - f_n| \leq (b - a) \|f - f_n\|_\infty$. \square

Corollaire 93 *Si $\sum f_n$ converge normalement (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$), de $[a, b]$ segment de \mathbb{R} dans un espace de Banach E , et si les f_n sont réglées, alors la somme des f_n est une fonction f réglée, d'intégrale la somme des intégrales des f_n .*

Démonstration : C'est exactement la même propriété, dans le cas des séries. \square

Chapitre 4

Séries entières

4.1 Définitions

Définition 94 On appelle **série entière** une série de fonctions de terme général $z \mapsto (a_n) \cdot z^n$, avec la suite (a_n) une suite de nombres complexes. On la note $\sum_n a_n \cdot z^n$.
La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **suite des coefficients de la série entière**.
On appelle **domaine de convergence** d'une série entière l'ensemble des z tels que la somme $\sum a_n \cdot z^n$ est bien définie.

4.2 L'indispensable : le lemme d'Abel

Le lemme d'Abel doit être présent en mémoire en toute circonstance et doit pouvoir être exhibé sans la moindre hésitation si un jour quelqu'un vous aborde, pointe un révolver sur vous et vous dit "Le lemme d'Abel ou la vie !".

Lemme 95 (Lemme d'Abel) Soit z un nombre complexe tel que la suite $a_n \cdot z^n$ soit bornée. Alors pour tout z' tel que $|z'| \leq |z|$, la série $\sum a_n \cdot z'^n$ est absolument convergente.

Démonstration : $|a_n \cdot z'^n| = |a_n \cdot z^n| \cdot |z'/z|^n \leq M \left(\frac{|z'|}{|z|}\right)^n$, et $\frac{|z'|}{|z|} < 1$... Le résultat en découle. \square

Maintenant que me voilà rassuré quant à votre avenir au cas où vous fassiez agresser par un mathématicien amateur désireux (à juste titre) d'apprendre ce résultat fondamental, le lemme d'Abel permet d'introduire une notion fondamentale en matière de séries entières : le rayon de convergence.

Définition 96 Le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n.z^n$ est le sup des réels $r > 0$ tel que $a_n.z^n$ soit bornée. Le rayon de convergence peut éventuellement être infini.

Théorème 97 (conséquence du lemme d'Abel) Si la série $\sum a_n.z^n$ est de rayon de convergence R , alors :

- pour tout z de module $< R$ la série de terme général $\sum a_n.z^n$ est absolument convergente.
- pour tout z de module $> R$ la série de terme général $\sum a_n.z^n$ diverge, et en fait la suite $a_n.z^n$ n'est pas même bornée.

Démonstration : Il suffit de regarder le lemme d'Abel dans le blanc des yeux.□

Le disque ouvert de centre 0 et de rayon R s'appelle le **disque de convergence**. Lorsque $R = +\infty$, on appelle \mathbb{C} tout entier le **disque de convergence**.

Le théorème que l'on vient de voir permet donc de classer les nombres complexes en deux catégories, l'une où la somme est convergente, avec plein de belles propriétés que l'on va voir, et un ensemble où il n'y a pas convergente ; toutefois, il reste une zone limite, sur laquelle nous n'avons pas de résultat, et sur laquelle nous en aurons bien peu ; le cercle de rayon le rayon de convergence, lorsque celui-ci est fini.

4.3 A l'intérieur du disque de convergence

Ah, joie du matheux : on va avoir des choses faciles et élégantes à dire.

Théorème 98 (Fondamental) Si $\sum a_n.z^n$ a pour rayon de convergence R , la série de terme général $\sum a_n.z^n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout compact contenu dans le disque de centre 0 et de rayon R .

Démonstration : Soit K un tel compact, qu'on va supposer non vide. Alors K est nécessairement inclus dans un disque fermé de rayon r inférieur à R (en cas contraire considérer une suite x_n dans K tels que $R - |x_n| < 1/n$, et considérer sa limite, qui doit appartenir à K - tout compact étant fermé).

$|a_n.z^n|$ est donc majoré par $a_n.r^n$, lequel est absolument convergent. D'où la convergence normale.□

Ce théorème va nous permettre de déduire pas mal de petites choses fondamentales :

- La somme d'une série entière est continue sur le disque ouvert de convergence (preuve facile : la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue, donc pour prouver la continuité en x on considère un compact contenant x et inclus dans le disque de convergence ; il y a convergence normale, donc uniforme, sur ce compact)

⚠ Même s'il y a convergence sur un disque FERMÉ on ne peut pas en déduire que la somme est continue sur le disque FERMÉ !

- la somme f de la série entière $\sum a_n.z^n$ admet pour développement limité à l'ordre n en 0 $f(z) = \sum_{k=0}^n a^k.z^k + o(z^n)$ (en fait, plus précisément, $O(z^{n+1})$) (preuve en écrivant $f(z) - \sum_{k=0}^n a^k.z^k$, et en factorisant par z^{n+1} ; le quotient est une série entière convergente, donc continue en 0).

- la somme f de la série entière $\sum a_n.z^n$ peut s'approximer uniformément par une suite de polynôme sur le disque fermé de centre 0 et de rayon r pour tout r STRICTEMENT inférieur au rayon de convergence. ⚠ ATTENTION il ne s'agit pas d'un corollaire du théorème de Weierstrass d'approximation de fonctions continues uniformément par des polynômes car ici les fonctions vont de \mathbb{C} dans \mathbb{C} ! (la preuve est en fait claire par les résultats précédents ; un disque fermé est compact, donc on applique le dernier théorème).

On a un résultat parfois utile à souligner aussi :

Théorème 99 Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence R . Alors f admet un prolongement continu sur le disque FERMÉ de rayon R si et seulement si f est limite uniforme de polynômes sur le disque ouvert.

Démonstration : Il est clair que si f est limite uniforme d'une suite de polynômes sur le disque ouvert, alors

Réciproquement, supposons f prolongée par continuité sur le disque fermé.

- Soit $\epsilon > 0$.
- f est uniformément continue sur ce disque, par le théorème ??.
- On peut donc déterminer $\alpha > 0$ tel que $|z - z'| \leq R.\alpha \Rightarrow |f(z) - f(z')| \leq \epsilon$.
- On peut développer en série entière $z \mapsto f(\frac{z}{1+\alpha})$ sur le disque ouvert de rayon $R.(1+\alpha)$. On peut donc approximer cette fonction sur le disque fermé de rayon R .
- Soit donc un polynôme P tel que $|P(z) - f(\frac{z}{1+\alpha})| \leq \epsilon$ pour tout z de module $\leq R$.

- On constate alors que z et $z/(1 + \alpha)$ sont à une distance $\leq R \cdot \alpha$; donc par définition de α trois lignes plus haut, on peut écrire que $|f(z) - f(\frac{z}{1+\alpha})| \leq \epsilon$.

- On a donc bien approximé f par P à 2ϵ près sur le disque fermé. \square

\triangle Bien noter que l'on a écrit que f était limite uniforme d'une suite de polynômes, mais pas que cette suite de polynômes était la série $\sum_{k=0}^n a_n \cdot z^n$! Il se peut que ce ne soit pas le cas...

4.4 A la limite du disque de convergence

On va juste présenter quelques cas, pour montrer que tout est possible ; soit convergence sur tout le cercle limite, soit divergence sur tout le cercle limite, soit tantôt convergence tantôt divergence...

- $\sum z^n/n$ a clairement pour rayon de convergence 1. En 1, il est clair que la série diverge. Pour z de module 1 et différent de 1, alors la somme des z^k entre 0 et n est bornée (ça fait $\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$).

- $\sum z^n$ a clairement pour rayon de convergence 1. Et il est non moins clair que sur tout le cercle de rayon 1 la somme diverge.

- $\sum z^n/n^2$ a toujours aussi clairement un rayon de convergence 1, et il est non moins clair que sur tout le cercle de rayon 1 la somme converge.

4.5 Comment déterminer un rayon de convergence ?

4.5.1 Formule d'Hadamard

Théorème 100 (Formule d'Hadamard) On se donne $\sum a_n \cdot z^n$ une série entière. Soit $L = \limsup |a_n|^{1/n}$, alors $R = 1/L$ (avec $1/0 = +\infty$ et $1/+\infty = 0$).

Démonstration :

- Cas $0 < L < +\infty$: soit $R = 1/L$, montrons que R est rayon de convergence.

- si $|z| < R$, $a_n \cdot z^n = O((L \cdot |z|)^n)$, or $L \cdot |z|$ est plus petit que 1 ; donc notre série est un $O()$ d'une série absolument convergente, donc elle converge absolument.

- si $|z| > R$, $a_n \cdot z^n$ ne tend pas vers 0, car son \limsup ne tend pas vers 0.

- Les autres cas se déduisent facilement de celui-ci... \square

Théorème 101 (Règle de D'Alembert) On se donne $\sum a_n \cdot z^n$ une série entière. On suppose que les a_n sont non nuls, au moins à partir d'un certain rang, et on suppose que a_{n+1}/a_n tend vers L . Alors $R = 1/L$.

Démonstration :

Ce théorème est une conséquence immédiate du critère de D'Alembert 27 dans le détermination de la convergence de séries. \square

4.6 Dérivation des séries entières

Définition 102 On se donne $\sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n$ une série entière ; on appelle **série dérivée d'ordre p** la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} \cdot z^n$.

On appelle **série dérivée** (tout court!) d'une série entière la série dérivée d'ordre 1.

Théorème 103 La série dérivée $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} \cdot z^n$ de la série $\sum a_n \cdot z^n$ une série entière de rayon de convergence R a le même rayon de convergence R .

Démonstration :

- On procède par récurrence, la série dérivée d'ordre p étant la dérivée d'ordre 1 de la dérivée d'ordre $p - 1$; il suffit de montrer le résultat pour $p = 1$.

- On suppose donc $p = 1$.

- La série dérivée est donc une série de terme général $(n/z) \cdot a_n \cdot z^n$. Donc en valeur absolue pour $n \geq z$, le terme général est supérieur en module à celui de la série $\sum a_n \cdot z^n$. Donc le rayon de convergence est inférieur ou égal à R .

- Montrons maintenant qu'il est supérieur ou égal à R . On se donne z de module $< R$, et un réel $r < R$ tel que $|z| < r < R$.

- $(n + 1) \cdot |a_{n+1}| \cdot |z|^n \leq ((\frac{|z|}{r})^{n+1} \cdot (n + 1)/z) \cdot |a_{n+1}| \cdot |r|^{n+1}$

- Le terme ci-dessus est plus petit que $|a_{n+1}| \cdot |r|^{n+1}$ pour n assez grand. \square

Un corollaire immédiat :

Corollaire 104 Si f est une somme de série entière, alors $f^{(n)}(0)$ est égal à $n!.a_n$ avec $f = \sum a_n.z^n$.

4.7 Produit de séries entières

Définition 105 Etant donnée deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$, on définit la **série entière produit** par $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, et la **série entière somme** par $\sum_{n \geq 0} d_n z^n$ avec $d_n = a_n + b_n$.

Il est bien évident que le rayon de convergence de la série entière somme de deux séries entières est au moins le min R des deux rayons de convergence, et que la fonction somme est dans le disque $D(0, R)$ la somme des deux fonctions sommes des deux autres séries.

En appliquant les résultats de la partie 1.12.6 on montre facilement que deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence $\geq R$ ont un produit convergent sur le disque $D(0, R)$ (R toujours le min des deux rayons de convergence) et que la série produit sur $D(0, R)$ a une somme égale au produit des deux fonctions sommes obtenues pour les deux séries entières.

4.8 Développement en série entière

Définition 106 (Développement en série entière) On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Une application f d'un ouvert U de \mathbb{K} dans \mathbb{K} est dite **développable en série entière au voisinage de** $a \in U$ s'il existe $\sum a_n.z^n$ de rayon de convergence $r > 0$ telle que $D(a, r) \subset U$ et $\forall z \in D(a, r)$ on ait $f(z) = \sum a_n.(z - a)^n$.

f est dite **analytique** sur $V \subset U$ avec V un ouvert de \mathbb{K} si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de V .

Théorème 107 Soit $\sum a_n \cdot z^n$ une série entière de rayon de convergence R . La somme f de cette série entière est analytique sur son disque ouvert de convergence.

Le développement en série entière de f en a est donné sur le disque centré sur a et de rayon $R - |a|$ par

$$f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

Démonstration :

$$f^{(p)}(z) = \sum_n \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} z^n$$

et donc

$$|f^{(p)}(z)| \leq \sum_n \frac{(n+p)!}{n!} |a_{n+p}| z^n$$

Pour $z \leq r < R$, on peut donc écrire

$$\sum_n \left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| (r - |z|)^n \leq \sum_{n,p \geq 0} \frac{(n+p)!}{n! p!} |a_{n+p}| \cdot |z|^p (r - |z|)^n$$

Montrons que la série de droite converge ; pour cela on limite la somme à n et p inférieurs à N et on fera tendre ensuite N vers $+\infty$

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq n,p \leq N} C_{n+p}^n |a_{n+p}| z^p (r - |z|)^n \\ & \leq \sum_n |a_n| \left(\sum_{p=0}^n C_n^p |z|^p (r - |z|)^{n-p} \right) \\ & \leq \sum_n |a_n| r^n < \infty \end{aligned}$$

La série étant absolument convergente, on peut permuter les termes comme on le souhaite, et donc

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (z' - z)^n \\ & = \sum_{n,p \geq 0} C_{n+p}^p a_{n+p} z^p (z' - z)^n \\ & = \sum_n a_n \left(\sum_{p=0}^n C_n^p z^p (z' - z)^n \right) \\ & = \sum_n a_n z^n \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Corollaire 108 *L'ensemble des points d'analyticité d'une application est ouvert.*

Démonstration : Evident au vu du résultat ci-dessus.

4.9 Zoologie des séries entières

4.9.1 L'exponentielle complexe

Définition 109 *On appelle **exponentielle** l'application qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$. On la note $x \mapsto e^x$ ou $x \mapsto \exp(x)$.*

NB : Il est à noter que cette série entière est bien définie partout, par le critère de D'Alembert. La convergence de la série est donc uniforme sur tout compact, et \exp est donc holomorphe et entière ¹. La dérivation terme à terme, légitimée par la convergence uniforme des dérivées (voir théorème ??), montre que la dérivée de \exp est \exp .

D'autres propriétés de l'exponentielle sont fondamentales ; on les trouvera dans le formulaire, avec les schémas de preuve, en partie ??.

¹Une fonction entière est une fonction holomorphe sur tout le plan.

4.10 Séries formelles et série génératrice

Définition 110 Etant donné A un anneau, on note $A[[X]]$ et on appelle **ensemble des séries formelles sur A** l'ensemble des suites à valeurs dans A . Une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera notée

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$$

On dit parfois aussi que $\sum a_n X^n$ est la **série génératrice** associée à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On munit $A[[X]]$ d'une structure d'anneau en définissant un produit et une somme par

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n \right)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_k b_{n-k}) X^n$$

Etant donnée V une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , on appelle aussi **série génératrice associée à V** la série $\sum P(V = n) X^n$.

↗ On trouvera une application des séries génératrices aux probabilités dans la partie ?? . Le livre [10] donne aussi une application aux nombres de Catalan (ie c'est un dénombrement basé sur un produit de séries formelles). La proposition ?? est un autre exemple.

Bibliographie

- [1] P. BARBE, M. LEDOUX, *Probabilité*, BELIN, 1998.
- [2] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, 1983.
- [3] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, FLEMMARD.
- [4] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, V. MAILLOT, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, MASSON, 1997.
- [5] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, MASSON, 1995.
- [6] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, MASSON, 1996.
- [7] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, DUNOD, 1998.
- [8] F. COMBES *Algèbre et géométrie*, BRÉAL, 1998. <
- [9] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, PRESSES UNIVERSITAIRES DE GRENOBLE, 1996.
- [10] W. GIORGI, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, MASSON, 1998.
- [11] A. GRAMAIN, *Intégration*, HERMANN 1988, PARIS.
- [12] J.-L. KRIVINE, *Introduction to axiomatic set theory*, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, DORDRECHT-HOLLAND.
- [13] S. LANG, *Real analysis*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1969.
- [14] D. PERRIN, *Cours d'algèbre*, ELLIPSES 1996.
- [15] A. POMMELLET, *Cours d'analyse*, ELLIPSES 1994.
- [16] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, MASSON 1992.
- [17] R. SMULLYAN, *Théorie de la récursion pour la métamathématique*, FLEMMARD.
- [18] Y.G. SINAI *Probability theory - An introduction course*, SPRINGER TEXT-BOOK, 1992.
- [19] P. TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, MASSON, 1997.
- [20] J. VAUTHIER, J.J. PRAT, *Cours d'analyse mathématiques de l'intégration*, MASSON, 1994.
- [21] D. WILLIAMS, *Probability with martingales*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1991.
- [22] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC, *Éléments d'analyse pour l'intégration*, MASSON, 1995.