Les Mathématiques pour l'Agrégation

C. Antonini
J.-F. Quint
P. Borgnat
J. Bérard
E. Lebeau
E. Souche
A. Chateau
O. Teytaud

14 février 2002

Table des matières

Chapitre 1

Calcul différentiel

Il est recommandé de bien maîtriser la partie**??** avant d'étudier cette partie, et notamment les espaces de Banach.

1.1 Introduction

1.1.1 Généralités

Définition 1 *Soient E et F des espaces vectoriels normés et U un ouvert de E. Soit une application $f : U \to F$, on dit que f est* **différentiable** *(ou* **dérivable***) en $x \in U$ s'il existe une application linéaire continue ϕ de E dans F telle que*

$$lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \phi(h)}{\parallel h \parallel} = 0$$

On appelle ϕ la **différentielle** *ou* **dérivée** *de f en x, on la note $Df(x)$.*
f est dite **différentiable** *si elle est différentiable en tout point de U.*

Proposition 2 • *Si f est dérivable en x, alors f est continue en x.*
• *La dérivée de f est unique et*

$$Df(x)(h) = lim_{t \to 0} \frac{f(x+t.h) - f(x)}{t}$$

• *La notion de dérivée ne dépend que des topologies et pas des normes (du moment qu'elles définissent la même topologie) ; si deux normes sont équivalentes, alors une fonction différentiable pour l'une est différentiable pour l'autre, et la différentielle est la même.*
• $D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x)$
• *Si $E = K$ corps associé aux espaces vectoriels E et F, alors la différentiabilité équivaut à l'existence de la limite pour $t \to 0$ de $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$. On note alors cette limite $f'(x)$, et $Df(x)(t) = t.f'(x)$.*
• *L'application qui à une application différentiable en x_0 associe sa différentielle en X_0 est une application linéaire de l'espace vectoriel des applications de E dans F différentiables en x_0 dans l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F.*
• *Une application linéaire continue f est différentiable en tout point x_0 et $Df(x_0)(h) = f(h)$.*

Démonstration : Un peu laborieux mais rien de bien difficile, en notant $\epsilon(x,h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)$, pour h suffisamment petit pour que $x+h$ appartienne à U.□

Définition 3 *Soient E et F des espaces vectoriels normés et U ouvert de E. f de U dans F est* **de classe** C^1 *si elle est différentiable et si l'application qui à x associe la différentielle de f en x est continue (voir* **??** *pour un rappel de la topologie usuelle sur $\mathcal{L}(E, F)$) .*

Proposition 4 • *Si f est constante sa dérivée est nulle partout, f est C^1.*
• *Si ϕ de E dans F est linéaire continue, alors ϕ est C^1 avec $D\phi(x) = \phi$, pour tout x.*
• *Si f de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ dans F est multilinéaire continue, alors f est C^1, et on a*

$$Df(x_1, ..., x_n)(h_1, ..., h_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, ..., x_n)$$

<u>**Démonstration :**</u> pas dur, tout ça !□

Théorème 5 (Différentielle de fonctions composées) *Soit E,F et G des espaces vectoriels normés , et U et V des ouverts de E et F respectivement. Si f de U dans V est différentiable en x et g de V dans G est différentiable en $f(x)$, alors la composée $g \circ f$ est différentiable en x et a pour différentielle*

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

Si g et f sont C^1 alors $g \circ f$ est C^1.

<u>**Démonstration :**</u> on écrit comme pour d'autres preuves $f(x + h) = f(x) + Df(x)(h) + \epsilon(h) \parallel h \parallel$, et de même $g((f(x) + k)$, et on calcule...
Pour voir que la composée est C^1, il suffit de voir que la différentielle est la composée de 3 fonctions continues.□

Définition 6 (Isomorphisme d'espaces normés) *Un* **isomorphisme de l'espace vectoriel normé** E **sur l'espace vectoriel normé** F *est une application $\phi : E \to F$ linéaire continue et bijective d'inverse continue. On note $Isom(E, F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E, F)$ formé des isomorphismes de E dans F.*

Théorème 7 *Soient E et F des espaces de Banach. Le sous-ensemble $Isom(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$. L'application $inv : Isom(E, F) \to Isom(F, E)$ qui à u associe u^{-1} est C^1 avec $Dinv(u)(v) = -u^{-1}.v.u^{-1}$.*

<u>**Démonstration :**</u> Soit u_0 un isomorphisme de E vers F ; alors $u_0 + v = u_0.(Id+$

$u_0^{-1}.v$). Si $\| v \| < \| u_0^{-1} \|^{-1}$, on a $\| u_0^{-1}.v \| v \| < 1$, et donc la série

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (-u_0^{-1}.v)^i$$

est convergente dans $\mathcal{L}(E, F)$ et donne un inverse à $(Id + u_0^{-1}.v)$.
Donc pour $\| v \| < \| u_0^{-1} \|^{-1}$, l'inverse de $u_0 + v$ est $\sum_{i=0}^{+\infty} (-u_0^{-1}.v)^n.u_0^{-1}$.
On a alors $(u_0 + v)^{-1} = u_0^{-1} - u_0^{-1}.v.u_0^{-1} + \sum_{i=2}^{+\infty} (-u_0^{-1}.v)^i.u_0^{-1}$; or la quantité $\frac{(-u_0^{-1}.v)^i.u_0^{-1}}{\|v\|}$ tend vers 0 quand v tend vers 0. L'application $Dinv$ est continue comme composée de fonctions continues, comme on s'en convaincra aisément.$\square$

Proposition 8 (Liens entre différentiabilité Banach sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$) *Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel peut aussi être considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; il suffit de restreindre le produit par un scalaire à un produit par un scalaire réel. En remplaçant E et F en tant que $\mathbb{C}$-espaces vectoriels par E et F en tant que $\mathbb{R}$-espaces vectoriels , une fonction différentiable pour $\mathbb{C}$ est différentiable pour $\mathbb{R}$; par contre la réciproque n'est pas garantie dans le cas général ; il faut que la différentielle sur $\mathbb{R}$ soit définie et que la différentielle sur $\mathbb{R}$ soit linéaire et continue en tant qu'application entre $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (c'est à dire appartienne à $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E, F)$).*

Démonstration : Sans grande difficulté, et laissée au lecteur.$\square$

1.1.2 Applications à valeurs dans un produit d'espaces vectoriels normés

Proposition 9 *Soit f une application de E dans $F_1 \times F_2$, avec E, F_1 et F_2 des espaces vectoriels normés , et soient f_1 et f_2 ses composantes. Alors f est différentiable en x si et seulement si f_1 et f_2 sont différentiables en x, et $Df(x)(h) = (Df_1(x)(h), Df_2(x)(h))$.*
En outre, f est C^1 si et seulement si f_1 et f_2 sont C^1.

Démonstration : Il suffit de voir que les projections canoniques de F sur F_1 et F_2 sont C^1 car linéaires et continues, et que l'injection canonique de F_1 dans F ou de F_2 dans F sont linéaires continues, donc elles aussi C^1.$\square$

Corollaire 10 (Formule de Leibnitz) *Si $f_1 : U \to F_1$ et $f_2 : U \to F_2$ sont différentiables en x et $B : F_1 \times F_2 \to G$ et B de $F_1 \times F_2$ dans G est bilinéaire continue, alors $B(f_1, f_2) : x \mapsto B(f_1(x), f_2(x))$ est différentiable en x et*

$$DB(f_1, f_2)(x)(h) = B(f_1(x), Df_2(x)(h)) + B(Df_1(x)(h), f_2(x))$$

En outre si f_1 et f_2 sont C_1 alors $B(f_1, f_2)$ est C^1.

1.1.3 Applications de plusieurs variables et dérivées partielles

Proposition 11 (Définition des dérivées partielles) *Soit U un ouvert du produit $E_1 \times E_2$ de deux espaces vectoriels normés , soit $f : U \to F$, avec F espace vectoriel normé , et f différentiable en $a = (a_1, a_2)$. Alors les deux applications partielles $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ et $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$ sont différentiables respectivement en a_1 et a_2. On note les deux différentielles obtenues respectivement $D_1 f(a_1, a_2)$ et $D_2 f(a_1, a_2)$, ou bien $\frac{\delta f}{\delta x_1}$ et $\frac{\delta f}{\delta x_2}$, et on les appelles respectivement* **première dérivée partielle** *et* **deuxième dérivée partielle**. *On a alors*

$$Df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = D_1 f(a_1, a_2)(h_1) + D_2 f(a_1, a_2)(h_2)$$

On peut généraliser de même à un produit fini d'espaces vectoriels normés ; si f est différentiable en $(a_1, a_2, ..., a_n)$, alors pour tout i dans $[1, n]$ $x \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n)$ est différentiable en a_i, sa différentielle en a_i est noté $\frac{\delta f}{\delta x_i}(a)$, et

$$Df(a_1, ..., a_n)(h_1, ..., h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(a)(h_i)$$

Démonstration : Facile !□

Il n'y a pas de réciproque dans le cas général ! Même si toutes les dérivées partielles sont définies la différentielle n'est pas nécéssairement définie. Par contre si les différentielles partielles sont continues alors on peut conclure que f est différentiable et même C^1 (voir partie 1.2.3).

Théorème 12 *Soit E un espace de Banach , U un ouvert de E et $F_1, ..., F_n$ des espaces de Banach . Soit f de U dans $F_1 \times ... \times F_n$.*
On note $p_i(x_1, ..., x_n) = x_i$.
Alors f est différentiable en x si et seulement si chacune des application f_i de E dans F_i $y \mapsto p_i(f(x))$ est différentiable en x et on a alors

$$Df(x)(h) = (Df_1(x)(h_1), Df_2(x)(h_2), ..., Df_n(x)(h_n))$$

Démonstration : • Le sens "seulement si" est clair ; une composée d'applications différentiables est différentiable.
• Le sens "si" et l'égalité annoncée s'obtiennent simplement en considérant

$$f = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ f_i$$

avec $u_i(x) = (0, ..., 0, x, 0, , , 0)$.□

Définition 13 *Eventuellement on peut avoir U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$; on peut alors noter la différentielle sous forme matricielle ; cette matrice est appelée* **matrice jacobienne**. *Elle est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_2}{\delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} & \frac{\delta f_m}{\delta x_2} & \cdots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n} \end{pmatrix}$$

Si $n = m$, la matrice jacobienne est carrée, on peut donc considérer son déterminant, appelé **jacobien** *de f.*

1.2 Le théorème des accroissements finis

1.2.1 Résultats principaux

Définition 14 *Soient a et b dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$, et F un espace vectoriel normé . Une application f de $[a, b]$ dans F est dite* **dérivable** *à droite en x appartenant à $[a, b[$ si la limite à droite $lim_{h \to 0, h > 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ existe ; on l'appelle alors* **dérivée à droite** *de f en x.*

Théorème 15 (Théorème des accroissements finis) *Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, et F un espace vectoriel normé . On suppose que les deux fonctions $f : [a, b] \to F$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues sur $[a, b]$ et dérivables à droite sur $[a, b] \setminus D$ avec D au plus dénombrable. Si, pour tout $t \in [a, b] \setminus D$ on a $\| f'_d(t) \| \leq g'_d(t)$, alors $\| f(b) - f(a) \| \leq g(b) - g(a)$.*

<u>Démonstration :</u> • On note $D = \{d_1, d_2, d_3, ...\}$ avec $d_i < d_{i+1}$
• On se donne $\epsilon > 0$.
• On considère E l'ensemble des x tels que

$$\|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \epsilon.(x - a) + \epsilon. \sum_{d_i < x} \frac{1}{2^i} \tag{1.1}$$

• E est ouvert
• Soit x_0 la borne inf de E
• $x_0 > a$, car pour x assez petit, l'inégalité 1.1 est fausse
• $x_0 \notin E$, car E est ouvert ; donc

$$\|f(x_0) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \epsilon.(x - a) + \epsilon. \sum_{d_i < x} \frac{1}{2^i} \tag{1.2}$$

• $x_0 \neq b$, car E est ouvert et n'est donc pas réduit à un singleton

• On va maintenant distinguer deux cas, selon que c appartienne à D ou non.
- Si $x_0 \in D$, alors $x_0 = d_{i_0}$ pour un certain i_0. Alors par continuité pour $x > x_0$ suffisamment proche de x_0, on a

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq g(x) - g(a) + \epsilon.(x-c) + \epsilon.2^{-i_0} \tag{1.3}$$

(par continuité). Or pour $x > x_0$ on a

$$\sum_{d_i<x} \frac{\epsilon}{2^i} \geq \epsilon.2^{-i_0} + \epsilon \sum_{d_i<x_0} 2^{-i} \tag{1.4}$$

. En sommant 1.2, 1.4 et 1.3, on obtient que x ne vérifie par 1.1 pour x assez proche de x_0 suffisamment proche de x_0 ; ce qui est contradictoire avec E ouvert.
- Si $x_0 \notin D$, par hypothèse $\|f'_d(x_0)\| \leq g'_d(x_0)$. Donc pour x suffisamment proche de x_0 et $x > x_0$ on a

$$\frac{1}{x-x_0}\|f(x) - f(x_0)\| \leq \frac{1}{x-x_0} g(x) - g(x_0) + \epsilon$$

et donc

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq g(x) - g(x_0) + \epsilon.(x - x_0)$$

en additionnant avec 1.2 on obtient alors que $x \notin E$ pour x suffisamment proche de x_0 et $x > x_0$; ce qui est contradictoire puisque E est ouvert.
• On a alors montré que E est vide, et donc il suffit de faire tendre ϵ vers 0 pour avoir le résultat désiré.□

Corollaire 16 *On a le même résultat en remplaçant les dérivées à droite par les dérivées à gauche.*

Démonstration : Facile, en remplaçant x par $-x$!□

Corollaire 17 *Une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel normé dont la dérivée existe et est nulle sauf sur un ensemble au plus dénombrable est constante.*

Démonstration : Facile !□

on utilise le théorème des accroissements finis pour les théorèmes 39, 28, 35, **??**, **??**, **??**.

On l'utilise aussi pour montrer qu'une fonction dérivable à dérivée bornée est lipschitzienne, ou bien qu'une fonction C^1 est localement lipschitzienne $\rightarrow$ applications aux équations différentielles.

Proposition 18 *Une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée existe et est positive sauf sur un ensemble au plus dénombrable est croissante.*

Démonstration : L'astuce réside dans le fait que la fonction f dont il est question ici doit jouer le rôle de la fonction g du théorème des accroissements finis ! On utilise pour f une fonction nulle, donc de dérivée nulle ; on considère une fonction g de dérivée positive, et le tour est joué !$\square$

Corollaire 19 Inégalité des accroissements finis *f définie de l'ouvert U de l'espace vectoriel normé E et à valeurs dans l'espace vectoriel normé F. Si f est dérivable et si le segment $[x,y]$ est inclus dans U, alors*

$$\| f(y) - f(x) \| \leq \| y - x \| .sup_{z\in[x,y]} \| Df(z) \|$$

Démonstration : Si le sup est infini il n'y a rien à prouver. Sinon on considère la fonction θ qui à un réel t compris entre 0 et 1 associe $\|y-x\|.(sup_{z\in[x,y]}\|Df(z)\|).t$; θ est dérivable, en tout point, de dérivée constante égale à $\|y-x\|.(sup_{z\in[x,y]}\|Df(z)\|)$, que l'on va noter C. L'application ϕ qui à $t \in [0,1]$ associe $f((1-t).x+t.y)$ est dérivable en tout point de $[0,1]$, de dérivée $Df((1-t).x+t.y)(y-x)$. La norme de cette dérivée est majorée par θ', donc par C. On peut donc majorer $\|\phi(1)-\phi(0)\|$ par $\theta(1)-\theta(0)$.$\square$

Corollaire 20 *Une application définie sur un ouvert U de l'espace vectoriel normé E à valeurs dans l'espace vectoriel normé F dérivable et de dérivée nulle est localement constante. Si U est connexe, f est constante.*

Trois corollaires (pour le deuxième il faut un peu y réfléchir, pour le troisième c'est une conséquence du second) :

Corollaire 21 *En définissant la distance entre deux points d'un ouvert connexe comme la longueur inf d'une ligne brisée entre ces deux points (voir la partie topologie pour vérifier qu'un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs et que toute paire de points dans un tel ensemble peut être reliée par une ligne brisée), et en supposant que f est une application de cet ouvert dans un espace vectoriel normé différentiable telle que pour tout x $\|f'(x)\| \leq k$, alors $\|f(b)-f(a)\|$ est inférieur ou égal à k fois la distance de a à b.*

Définition 22 *Une application* **localement lipschitzienne** *est une application entre espaces métriques telle que pour tout x il existe un voisinage de x sur lequel la restriction de f est lipschitzienne.*

Corollaire 23 *Une application de classe C^1 est localement lipschitzienne.*

1.2.2 Applications : interversion de limite et de dérivation

Définition 24 (Convergence uniforme, rappel) *Une suite d'applications f_n de X dans Y avec X et Y espaces métriques converge uniformément vers f application de X dans Y si*

$$lim_{n\to+\infty} sup_{x\in X} d(f_n(x), f(x)) = 0$$

Proposition 25 *Si les f_n sont continues et convergent uniformément vers f alors f est continue.*

Démonstration :

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y) - f(y)$$

Etant donné ϵ l suffit alors de prendre n assez grand et x et y assez proches pour que $f(x) - f(y) \leq \epsilon$.$\square$

Ce résultat servira par exemple pour le théorème **??**, ou le théorème 47.

Théorème 26 *On suppose E et F des espaces vectoriels normés , U ouvert de E, f_n une suite d'applications de U dans F différentiables, f_n convergeant simplement vers f, les Df_n convergeant uniformément vers une certaine application g de U dans $\mathcal{L}(E, F)$,*
alors :
• f est différentiable et $Df = g$
• Pour tout C convexe et borné inclus dans U la convergence de $f_{n|C}$ vers $f_{|C}$ est uniforme
• Si les f_n sont C^1 alors f est C^1.

Démonstration : laborieuse, mais pas vraiment difficile ; il suffit d'écrire $\epsilon_n = sup_{x\in U}\|Df_n(x) - g(x)\|$, avec ϵ_n tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et de montrer que $sup_{y\in C}\|f(y) - f_n(y)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \epsilon_n.D$ avec D le diamètre de C pour voir la deuxième propriété ; la première propriété se montre facilement à partir de là, et la troisième est un corollaire de la proposition 25.$\square$

Corollaire 27 *On suppose U connexe ouvert de E et f_n de U dans F dérivable ; E et F sont des espaces vectoriels normés , et F est complet (donc F est un Banach). On suppose qu'il existe x_0 tel que $f_n(x_0)$ converge, et que pour tout x il existe V_x voisinage de x tel que la suite des $Df_{n|V_x}$ soit de Cauchy pour la métrique d définie par*

$$d(f,g) = sup_{z \in V_x} \|f(z) - g(z)\|$$

(c'est à dire que la suite des Df_n converge normalement sur un certain voisinage de tout point)
Alors il existe f de U dans F tel que :
- *f est dérivable en tout point*
- *la suite des f_n converge vers f (simplement)*
- *tout x possède un voisinage V_x tel que les convergences de f_n et Df_n restreints à V_x soient uniformes.*
- *Si les f_n sont C^1, f l'est aussi.*

Démonstration : On définit l'ensemble A des z tels que $f_n(z)$ converge. Etant donné x on considère un voisinage V_x de x convexe et vérifiant l'hypothèse sur le critère de Cauchy (on peut toujours imposer V_x convexe en le restreignant à une boule). On définit alors $\alpha_{n,m} = sup_{z \in V_x} \|Df_n(z) - Df_m(z)\|$; par hypothèse, $\alpha_{n,m}$ tend vers 0 quand n et m tendent vers l'infini. Si $V_x \cap A \neq \emptyset$, alors soit x' dans $V_x \cap A$. Par convexité de V_x, on peut écrire pour tout y dans V_x :

$$\|[f_m(y) - f_n(y)] - [f_m(x) - f_n(x)]\| \leq \alpha_{n,m}.\|y - x'\|$$

or $f_n(x')$ est une suite de Cauchy (comme toute suite convergente dans un métrique), donc $f_n(y)$ est une suite de Cauchy, et donc converge. Donc si $V_x \cap A \neq \emptyset$, $V_x \subset A$. Donc soit $V_x \subset A$, soit $V_x \subset A^c$, donc A et A^c sont ouverts. A étant non vide et U étant connexe, $A = U$. On a donc montré la deuxième assertion.
$\mathcal{L}(E,F)$ est complet pour la norme uniforme puisque F l'est ; donc la suite des dérivées sur V_x converge uniformément. En appliquant le théorème précédent, on voit que f est dérivable de dérivée la limite des dérivées ; en supposant V_x borné on a alors $f_{n|V_n} \to f_{|V_x}$ uniformément, toujours par le théorème précédent.$\square$

1.2.3 Applications : dérivées partielles et dérivées

Proposition 28 *E_1, E_2, ... , E_n et F des espaces vectoriels normés ; U un ouvert de $E = \Pi_i E_i$, f une application de U dans F ; alors si les $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ existent sur un voisinage de x et sont continues en x, alors f est différentiable en x.*

Démonstration : • Il est suffisant de montrer que

$$\|f(x_1,...,x_n) - f(a_1,...,a_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(a).(x_i - a)\| = o(\|x - a\|)$$

pour tout $(a_1, ..., a_n)$ de U.

• Pour cela on décompose $f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta f}{\delta x_i}(a).(x_i - a)$ en

$$f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, x_2, ..., x_n) - \frac{\delta f}{\delta x_1}(a).(x_1 - a_1)$$

$$+f(a_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, x_3, ..., x_n) - \frac{\delta f}{\delta x_2}(a).(x_2 - a_2)$$

$$+...$$

$$+f(a_1, a_2, ..., a_i, x_{i+1}, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_n) - \frac{\delta f}{\delta x_{i+1}}(a).(x_{i+1} - a_{i+1})$$

$$+...$$

$$+f(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x_n) - f(a_1, ..., a_n) - \frac{\delta f}{\delta x_n}(a).(x_n - a_n)$$

• Il suffit ensuite de montrer que pour x_i tendant vers a_i, $f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_i, x_{i+1}, ..., x_n) - \frac{\delta f}{\delta x_i}(a).(x_i - a_i)$ est un $o(x_i - a_i)$. (ensuite il suffira de sommer)

• Le fait ci-dessus provient des accroissements finis ET de la continuité de la i-ième dérivée partielle (en effet une application directe des accroissements finis donnent un $o(x_i - a_i)$ pour

$$f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_i, x_{i+1}, ..., x_n) - \frac{\delta f}{\delta x_i}(a_1, ..., a_i, x_{i+1}, ..., x_n).(x_i - a_i)$$

(la différentielle n'est pas prise là où il faudrait qu'elle le soit) $\square$

Théorème 29 *E_1, E_2, ... , E_n et F des espaces vectoriels normés ; U un ouvert de $E = \Pi E_i$, alors f application de U dans F est C^1 si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ de f existent et sont continues sur U.*

Démonstration : Il est clair que si f est C^1, alors les dérivées partielles existent et sont continues. La réciproque, utilisant la proposition précédente, ne présente pas de difficulté majeure.$\square$

On pourra par exemple trouver une application dans la partie**??**.

1.3 Théorème d'inversion locale et fonctions implicites

1.3.1 Théorème d'inversion globale

Définition 30 *On appelle* **application contractante** *ou* **contraction** *une application lipschitzienne dont le coefficient de Lipschitz est* < 1.

Théorème 31 (Théorème de Banach du point fixe) *Soit X un espace métrique complet et h une contraction de X dans X. Alors :*
• *h admet un unique point fixe x_0*
• $\forall x \; d(x, x_0) \leq \frac{1}{1-Lip(h)} d(x, h(x))$

Démonstration : Unicité :
• Supposons x_1 et x_2 deux points fixes.
• $d(x_1, x_2) = d(h(x_1), h(x_2)) \leq Lip(h).d(x_1, x_2)$; donc $x_1 = x_2$
Existence :
• Considérons x quelconque dans X, on va travailler sur la suite des $h^n(x)$.
• Supposons $n \leq m$, alors

$$d(h^m(x), h^n(x)) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(h^i(x), h^{i+1}(x))$$

$$\leq \sum_{i=m}^{+\infty} Lip(h)^i.d(x, h(x)) \leq \frac{Lip(h)^m}{1 - Lip(h)}.d(x, h(x))$$

On en déduit facilement les deux résultats annoncés.□

Il faut que f soit une contraction, c'est à dire une application lischitzienne de constante de Lipschitz < 1 ; avec un rapport 1 cela ne marche pas, ni même avec $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Par exemple, $x \mapsto x + e^{-x}$ définit une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+$ est bien complet, et on a bien $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, et pourtant f n'admet pas de point fixe.

théorème d'inversion locale 35, théorème de Cauchy-Lipschitz 72, la résolution de l'équation de Volterra (voir [6]).

D'autres théorèmes de points fixes existent : par exemple le théorème du point fixe de Brouwer **??** (avec pour application le corollaire **??**), le théorème de Kakutani , le théorème de Schauder , et même pour ceux qui connaissent un peu la calculabilité un théorème de point fixe que l'on trouvera dans le livre "Théorie de la récursion pour la métamathématique", de R. Smullyan (Masson, 1995), avec pour application le théorème de Rice et ses multiples conséquences (attention, il faut connaître un peu le domaine pour pouvoir se lancer dans ce genre d'originalités...).

Lemme 32 *Soient U et V des ouverts des espaces normés E et F. On se donne h de U dans V, h bijective, dérivable en x_0. Alors h^{-1} est dérivable en $h(x_0)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
• $Dh(x_0)$ est un isomorphisme de E sur F
• Il existe $K \geq 0$ et un voisinage W de $h(x_0)$ dans F tels que

$$\forall y \in W \|h^{-1}(y) - x_0\| \leq K\|y - h(x_0)\|$$

Démonstration : Tout d'abord montrons que ces deux conditions sont nécéssaires. Pour cela on suppose qu'effectivement h^{-1} est dérivable en $h(x_0)$, et on procède comme suit :
• On dérive les deux expressions

$$h^{-1} \circ h = Id_E$$

et

$$h \circ h^{-1} = Id_E$$

et on montre bien que $Dh(x_0)$ est un isomorphisme.
• Par définition de la dérivée, la quantité ci-dessous tend vers 0 pour $y \to h(x_0)$:

$$\frac{\|h^{-1}(y) - h^{-1}(h(x_0)) - D(h^{-1})(h(x_0))(y - h(x_0))\|}{\|y - h(x_0)\|}$$

Donc pour y dans un certain W cette quantité est plus petite que 1, et donc pour $y \in W$ on a

$$\|h^{-1}(y) - h^{-1}(h(x_0))\| \leq K\|y - h(x_0)\|$$

avec $K = 1 + \|D(h^{-1})(h(x_0))$.

Il reste à prouver la réciproque, c'est à dire que les conditions sont suffisantes.
• Par définition, on a

$$h(x) - h(x_0) = Dh(x_0)(x - x_0) + \|x - x_0\|\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x)$ tendant vers 0 pour $x \to x_0$.
En composant avec $Dh(x_0)^{-1}$ (dont les hypothèses garantissent l'existence), on obtient

$$x - x_0 = Dh(x_0)^{-1}(h(x) - h(x_0)) - \|x - x_0\|.(Dh(x_0)^{-1}(\epsilon(x)))$$

avec $y = h(x)$ (tout y de V peut s'écrire ainsi) et $y_0 = h(x_0)$, on obtient alors

$$h^{-1}(y) - h^{-1}(y_0) - Dh(x_0)^{-1}(y - y_0) = -Dh(x_0)^{-1}.\epsilon(h^{-1}(y)).\|h^{-1}(y) - h^{-1}(y_0)\|$$

On sait par hypothèse que pour y assez proche de y_0 on a $\|h^{-1}(y) - h^{-1}(y_0)\| \leq K.\|y - y_0\|$, donc

$$\frac{Dh(x_0)^{-1}.\epsilon(h^{-1}(y)).\|h^{-1}(y) - h^{-1}(y_0)\|}{\|y - y_0\|} \leq K.\|Dh(x_0)^{-1}\|.\|\epsilon(h^{-1}(y))\|$$

or $h^{-1}(y)$ tend vers x_0 quand $y \to y_0$ donc cette quantité tend vers 0 ; ce qui permet de conclure.□

Théorème 33 (Théorème d'inversion globale) *Soit A une application linéaire continue de E dans F, avec E un espace de Banach et F un espace normé, telle que A^{-1} existe et est continue (A est un homéomorphisme linéaire). Soit ϕ une application lipschitzienne de E dans F telle que $Lip(\phi) < \|A^{-1}\|^{-1}$. Alors :*
• $h = A + \phi$ est inversible
• h^{-1} est lipschitzienne, avec $Lip(h^{-1}) \leq \frac{\|A^{-1}\|}{[1-\|A^{-1}\|.Lip(\phi)]}$
• Si h est C^1 sur U ouvert de E, et si $\forall x \in U$ $Dh(x) \in Isom(E, F)$, alors h^{-1} est C^1 sur l'ouvert $h(U)$, et pour tout $x \in U$ la différentielle de h^{-1} est donnée par

$$D(h^{-1})(h(x)) = (Dh(x))^{-1}$$

Démonstration : Raisonnement en plusieurs étapes :
• Etant donné y dans F, et on considère l'équation

$$h(x) = y$$

équivalente à

$$x = A^{-1}.y - A^{-1}(\phi(x))$$

L'application $x \mapsto A^{-1}(\phi(x))$ est Lipschitzienne de rapport < 1, et donc l'application $x \mapsto A^{-1}(Y) - A^{-1}(\phi(x))$ aussi. Donc par le théorème du point fixe de Banach, cette équation a une solution unique x.
h est donc inversible.
• Avec $y = h(x)$ et $y' = h(x')$, on peut écrire

$$x = A^{-1}(y) - A^{-1}(\phi(x))$$

$$x' = A^{-1}(y') - A^{-1}(\phi(x'))$$

et en déduire

$$\|x - x'\| \leq \|A^{-1}\|.\|y - y'\| + \|A^{-1}\|.Lip(\phi).\|x - x'\|$$

en utilisant l'hypothèse sur $Lip(\phi)$, on a alors

$$\|x - x'\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|.Lip(\phi)}\|y - y'\|$$

D'où le résultat sur la constante de Lipschitz de h^{-1}.
• Supposons maintenant h C^1 sur U ouvert de E. $h(U)$ est un ouvert puisque h est un homéomorphisme. Par le lemme précédent, h^{-1} est dérivable sur U. En dérivant

$$h^{-1} \circ h = Id_E$$

et

$$h \circ h^{-1} = Id_E$$

on obtient que $D(h^{-1})(h(x)) = (Dh(x))^{-1}$. En écrivant

$$D(h^{-1})(y) = Dh(h^{-1}(y))^{-1}$$

et en rappelant que $Inv : Isom(E,F) \to Isom(F,E), h \mapsto h^{-1}$ est continue on constate qu'en outre $D(h^{-1})$ est continue.

1.3.2 Théorème d'inversion locale

Définition 34 (Difféomorphisme C^1) *Une application h de U dans V avec U ouvert d'un espace vectoriel normé et V ouvert d'un espace vectoriel normé est un* **difféomorphisme** *C^1 si h est bijective et de classe C^1 et de réciproque de classe C^1. Plus généralement, avec $k \geq 1$, une application h de U dans V avec U ouvert d'un espace vectoriel normé et V ouvert d'un espace vectoriel normé est un* **difféomorphisme** *C^k si h est bijective et de classe C^k et de réciproque de classe C^k.*

Une application bijective et C^1 n'est pas un difféomorphisme C^1 ; il faut aussi que la réciproque soit C^1 !

Théorème 35 (Théorème d'inversion locale) *Soit h de U dans F une application C^1, avec U ouvert de E, et E et F des espaces de Banach. Si la différentielle $Dh(x_0)$ est bijective de E dans F pour un certain x_0 de U, alors il existe U_0 voisinage de x_0 dans E et un voisinage ouvert V_0 de $f(x_0)$ dans F tels que h induit un difféomorphisme C^1 de U_0 dans V_0. On a alors*

$$D(h^{-1})(h(x)) = (Dh(x))^{-1}$$

pour tout x dans U_0.

Voir le théorème 37 et le corollaire 36. Le théorème d'inversion locale permettra aussi de montrer l'équivalence des différentes définitions des variétés de $\mathbb{R}^n$, voir définition 50.

Démonstration : On pourra se référer par exemple à [13].

Dans le cas de la dimension finie, le fait que la différentielle soit bijective implique que les dimensions des espaces soient les mêmes, et que le jacobien (défini puisque les dimensions sont les mêmes) est non nul.

Corollaire 36 *Soit f une application C^1 d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F ; si f injective et si sa différentielle $f'(x)$ est un isomorphisme en tout $x \in U$, alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$, qui est alors un ouvert de F.*

Modulo le résultat selon lequel l'application qui à f dans $Isom(E,F)$ associe

f^{-1} est C^∞ (que l'on trouvera par exemple dans [3]), on montre que si f est un C^1-difféomorphisme de classe C^n, alors f est un C^n difféomorphisme.

1.3.3 Théorème des fonctions implicites

Théorème 37 *f application C^1 de U un ouvert de $E_1 \times E_2$ dans F, avec E_1, E_2 et F des Banach. Si f est différentiable par rapport à la deuxième variable en (a,b) et si cette différentielle est un isomorphisme alors il existe ϕ C^1 définie sur un ouvert U_1 de E_1 contenant a_1 et à valeurs dans un ouvert U_2 de E_2 contenant a_2 telle que pour tout (y_1, y_2) dans $U_1 \times U_2$ on ait*

$$f(y_1, y_2) = f(a,b) \iff y_2 = \phi(y_1)$$

et pour tout x dans U_1 on a

$$D\phi(x) = -[D_2 f(x, \phi(x))]^{-1} \circ D_1 f(x, \phi(x))$$

FLEMMARD

Démonstration : • On va chercher à utiliser le théorème d'inversion locale. Pour cela il faut construire une application différentiable C^1, de différentielle bijective.

• On définit l'application μ de U dans $E_1 \times E_2$ dans $E_1 \times G$, définie par $\mu(y_1, y_2) = (y_1, f(y_1, y_2))$.

• $D\mu(a,b)(h,k) = (h, D_1 f(a,b).h + D_2 f(a,b).k)$

• $D\mu(a,b)$ est bijective (facile), μ est C^1

• On applique le théorème d'inversion locale à μ en (a,b).

• La fonction réciproque associe clairement à un couple (q,r) un couple $(q, \phi(q,r))$, et en fixant r on en déduit ce que l'on veut...$\square$

La figure 1.1 illustre ce théorème.

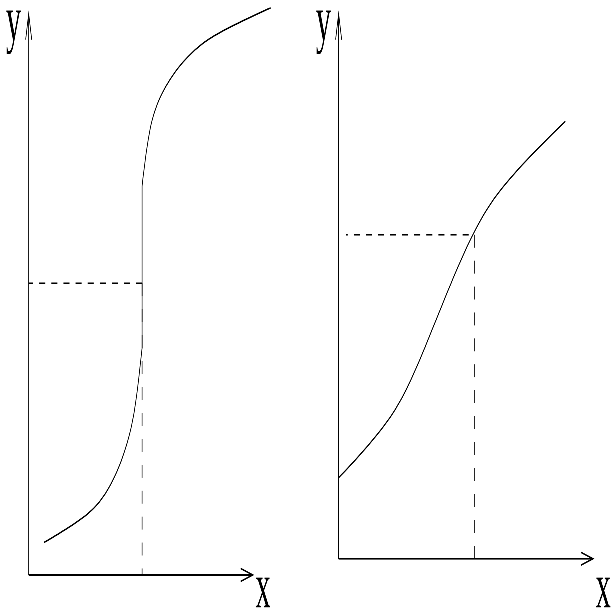

FIG. 1.1 – Illustration du théorème des fonctions implicites dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La courbe est une courbe de niveau. A gauche la différentielle par rapport à y n'est pas un isomorphisme ; on comprend intuitivement qu'on ne peut pas donner y en fonction de x sur un voisinage. A droite c'est un isomorphisme ; donc on peut.

1.4 Dérivées d'ordre supérieur

1.4.1 Généralités

Définition 38 *Etant donnée une application f d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F, on dit que f est* **de classe** C^n *(on dit aussi n* **fois continûment différentiable***) si f est différentiable et si sa différentielle est de classe C^{n-1}. L'application est dite C^∞ si elle est C^n pour tout n ; on dit alors qu'elle est* **indéfiniment différentiable**.
On note alors $f^{(1)}(a)$ l'application $Df(a)(x)$, et par récurrence $f^{(n)}(a)$ l'application $Df^{(n-1)}(a)$.
Etant donnée une application f d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F, on dit que f est n fois différentiable en x appartenant à U si et seulement si f est de classe C^{n-1} sur un voisinage de x et si la n-ième différentielle de f sur ce voisinage est différentiable en a.
Etant donnée f application d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F, on note $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}$ l'application $\frac{\delta \frac{\delta f}{\delta x_j}}{\delta x_i}$.

1.4.2 Dérivées secondes

Théorème 39 *Soit f une application de U, ouvert d'un espace de Banach , dans F, espace de Banach . Si f est deux fois différentiable en x_0, alors $f''(a)(h)(k) = f''(a)(k)(h)$. Via l'identification du théorème* **??** *$f''(a)$ est une forme bilinéaire symétrique.*

Démonstration : • Il s'agit donc de montrer que $f''(a)(h)(k) = f''(a)(k)(h)$.

• On introduit la fonction $\mu(h,k) = f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a)$

• $\mu(h,k) = \mu(k,h)$ clairement

• On montre maintenant que $\mu(h,k)$ approxime $f''(a)(h)(k)$ (on pourra plus loin en déduire le résultat souhaité, car $f''(a)(h)(k)$ approximera alors $f''(a)(k)(h)$)

• $\|\mu(h,k) - f''(a)(h)(k)\| \leq \|\mu(h,k) - f'(a+k)(h) + f'(a)(h)\| + \|f'(a+k)(h) - f'(a)(h) - (f''(a).k).h\|$

• Le second terme est petit par la définition de la différentielle $f''(a)$, le premier est petit par définition de la différentielle de $f'(a)$, et par utilisation des accroissements finis.

• On arrive ainsi à montrer que $\mu(h,k) - f''(a)(k)(h)$ est un $o(\|h\|^2 + \|k\|^2)$; par symétrie on a aussi le fait que $\mu(h,k) - f''(a)(k)(h)$ est un $o(\|h\|^2 + \|k\|^2)$; on en déduit $\|f''(a)(k)(h) - f''(a)(h)(k)\| = o(\|h\|^2 + \|k\|^2)$.

• $\|f''(a)(\lambda.k)(\lambda.h) - f''(a)(\lambda.h)(\lambda.k)\| \leq \epsilon.(\|\lambda.h\|^2 + \|\lambda.k\|^2)$ pour tout ϵ, pour λ suffisamment petit

• $\lambda^2\|f''(a)(k)(h) - f''(a)(h)(k)\| \leq \epsilon.\lambda^2(\|h\|^2 + \|k\|^2)$ pour tout ϵ et pour λ assez petit

• $\|f''(a)(k)(h) - f''(a)(h)(k)\| \leq \epsilon(\|h\|^2 + \|k\|^2)$ pour tout ϵ !

• $f''(a)(k)(h) = f''(a)(h)(k) = 0$ d'où le résultat.□

Théorème 40 *Soit f deux fois différentiables en $a \in U$, avec f définie de U ouvert de $E = E_1 \times E_2 ... \times E_n$ (des espaces de Banach) dans F (un espace de Banach). Alors*

$$(f''(a)(h_1,...,h_n))(k_1,...,k_n) = \sum_{i,j}(\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(a).h_i).k_j$$

Démonstration : On utilise simplement deux fois la proposition 11, à f et f'.□

Corollaire 41 *Soit f deux fois différentiables en $a \in U$, avec f définie de U ouvert de $E = E_1 \times E_2 ... \times E_n$ (des espaces de Banach) dans F (un espace de Banach). Alors*

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(a)(h)(k) = \frac{\delta^2 f}{\delta x_j \delta x_i}(a)(k)(h)$$

Démonstration : Il s'agit simplement du théorème 39 après quelques manipulations...□

Corollaire 42 (Théorème de Schwartz) *Soit f application de $\mathbb{R}^n$ dans F (F espace de Banach) deux fois différentiables en x, alors $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}(x) = \frac{d^2 f}{\delta x_j \delta x_i}$*

Démonstration : Il s'agit d'une reformulation dans le cas de $E_i = \mathbb{R}$ du corollaire précédent !□

Proposition 43 (Existence de la dérivée seconde) *Soi f une application de U ouvert de $E = E_1 \times E_2 ... \times E_n$ (des espaces de Banach) dans F (un espace de Banach). Alors si les $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ existent et sont continues sur un voisinage de x, et si les $\frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}$ existent sur un voisinage de x et sont continues en x, alors f est deux fois différentiable en x.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer deux fois la proposition 28.□

1.4.3 Généralisations à la dérivée n-ième

On pourra réviser la partie **??**.

Théorème 44 (Généralisation du théorème 39) *Si f est une application de E dans F avec E et F des espaces de Banach n fois différentiable en x, alors $f^{(n)}(x)$ appartient à $\mathcal{L}_n(E; F)$ et est une application n-linéaire symétrique.*

Démonstration : On procède par récurrence. Pour $n = 1$, c'est clair. Pour $n = 2$, c'est le théorème 39. Supposons maintenant le résultat prouvé jusqu'au rang $n - 1$, et montrons le pour le rang n, avec $n \geq 3$.
• Il suffit de montrer que si l'on permute deux variables consécutives parmi les h_i on ne change pas la valeur $f^{(n)}(x)(h_1, ..., h_n)$.
• $f^{(n-1)}$ est symétrique, donc on peut permuter sans rien changer h_i et h_{i+1} pour $i > 1$
• Pour $i = 1$ il suffit de rappeler que $f^{(n)} = (f^{(n-2)})''$ et d'utiliser 39.□

1.5 Zoologie du calcul différentiel

1.5.1 Fonctions convexes

Définition 45 *Une fonction f définie sur un convexe U d'un espace vectoriel à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite* **convexe** *(resp.* **strictement convexe***) si*

$$\forall (u,v,t) \in U^2 \times [0,1] f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$

(resp.)$\forall (u,v,t) \in U^2 \times]0,1[u \neq v \Rightarrow f(tu+(1-t)v) < tf(u)+(1-t)f(v)$

Dans la suite de cette section, on suppose que U est un convexe d'un espace vectoriel , et que f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, avec Ω ouvert contenant U. Les liens entre dérivabilité et convexité sont les suivants :

Théorème 46 *f C^1 est convexe (resp. strictement convexe) sur U si et seulement si*

$$\forall (u,v) \in U^2 f(v) \geq f(u) + f'(u)(v-u)$$

$$\textit{(resp.)} \forall (u,v) \in U^2 u \neq v \Rightarrow f(v) > f(u) + f'(u)(v-u)$$

f C^2 est convexe si et seulement si

$$\forall (u,v) \in U^2 f'(u)(v-u, v-u) \geq 0$$

Si

$$\forall (u,v) \in U^2 u \neq v \Rightarrow f''(u)(v-u, v-u) > 0$$

On pourra voir 2.4 pour les applications de la convexité à la recherche d'extréma, **??** pour les applications de l'inégalité de Jensen, le lemme **??** (et par suite l'inégalité de Hölder), l'inégalité de Minkovski.

1.5.2 Fonction continue partout dérivable nulle part

Cet exemple, élaboré par Van der Waerden, est extrait du livre [20].

Théorème 47 *Soit T la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $T(x) = min(x - E(x), E(x) + 1 - x)$ (c'est à dire que $T(x)$ est la distance de x à l'entier le plus proche de x).*
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T(10^n x)}{10^n}$ est continue partout dérivable nulle part.

Démonstration :

• Bonne définition, continuité de f : facile, f est limite uniforme d'une suite de fonctions continues (voir proposition 25).

• La non dérivabilité, c'est plus dur.

- T, et donc f, est périodique, de période 1.
- On se limite donc à montrer la non-dérivabilité sur $[0, 1[$
- On note les développements décimaux en excluant les développements illimités ne comportant que des 9 [1]
- Soit donc $x \in [0, 1[$, on montre la non-dérivabilité de f en x.
- Soit x_n la n-ième décimale de x.
- définissons $h_m = -10^{-m}$ si $x_m = 4$ ou $x_m = 9$, $h_m = 10^{-m}$ sinon.
- Calculons maintenant

$$\frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m}$$

$$= 10^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n (T(10^n(x + \epsilon'_m 10^{-m})) - T(10^n x))}{10^n}$$

- Raisonnons un petit peu maintenant, sur un cas particulier pour mieux visualiser ($x = 0.33333333$...) :

n	$10^n x$	$10^n(x + h_m)$	$T(10^n(x + h_m)) - T(10^n x)$	$\times 10^{m-n}$
0	$0, 333333\ldots$	$0, 33\ldots333433\ldots$	$0, 000\ldots001$	1
1	$3, 33333\ldots$	$3, 33\ldots334333\ldots$	$0, 000\ldots01$	1
2	$33, 3333\ldots$	$33, 3\ldots343333\ldots$	$0, 000\ldots1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$333\ldots3, 33\ldots$	$333\ldots4, 333\ldots$	1	1
$m + 1$	$3333\ldots3, 33\ldots$	$333\ldots43, 333\ldots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Il faut bien noter que dans le cas général le chiffre de la dernière colonne peut être 1 ou -1 ; quoi qu'il en soit $\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m}$ est un entier de parité variant avec m et ne peut donc pas converger.$\square$

On en profite pour montrer ce dont est capable Maple. Le dessin se trouve en figure 1.2.

Exemple Maple

$> T := x \to \min(x - \text{floor}(x), \text{floor}(x) + 1 - x)$

$$T := x \to \min(x - \text{floor}(x), \text{floor}(x) + 1 - x)$$

$> g := x- > sum(T(2^n * x)/2^n, n = 0..17);$

$$g := x \to \sum_{n=0}^{17} \frac{\mathrm{T}(2^n\, x)}{2^n}$$

[1]Au profit de l'équivalent obtenu en remplaçant ...243999999999... par ...2449999999999....

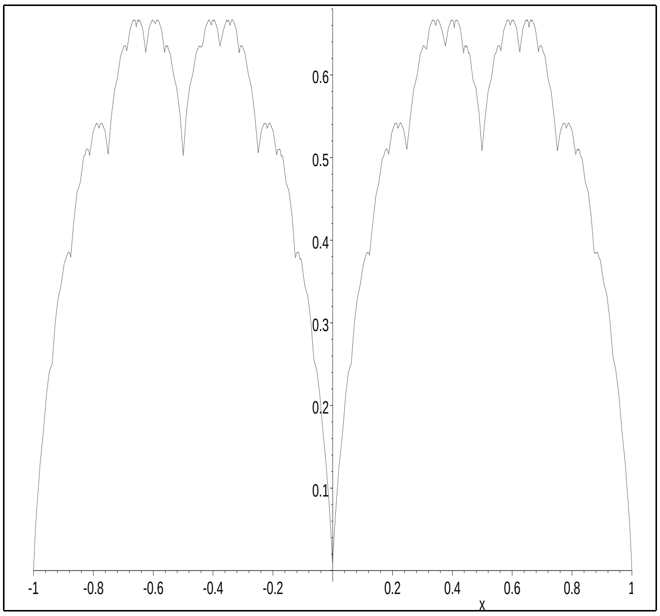

FIG. 1.2 – Tracé d'une courbe continue dérivable nulle part, établie par Van der Waerden

1.5.3 Fonction dérivable dans toutes les directions mais non continue

Définition 48 *Soit f une application d'un ouvert U d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F, alors f est dite* **différentiable en $x \in U$ suivant la direction** *$e \in E$ si l'application $g : \mathbb{R} \to F$ $t \mapsto f(x + tu)$ est différentiable en 0. La différentielle de g en 0 est alors appelée* **différentielle de f en x suivant** *u.*

Proposition 49 *Il existe une application f différentiable dans toutes les directions en x et qui n'est pas continue en x.*

Démonstration : Le livre [20] propose la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$, avec $f(0, 0) = 0$. On constate la non continuité de f en regardant la limite de $x \mapsto f(x, x^2)$ en 0. La différentiabilité suivant toutes les directions est vite vue (distinguer différents cas, suivant $u = (a, b)$, cas a et b non nuls, cas a nul, ou cas b nul).

On peut aussi regarder la fonction définie par ses coordonnées polaires par

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = e^{-\frac{(\theta-r)^2}{r^4}}$$

Avec $f(0, 0) = 0$, on a bien une fonction différentiable dans toutes les directions (avec des différentielles nulles !), et on constate sans le moindre calcul que $f(xcos(x), xsin(x))$ est constant égal à 1 pour $x \neq 0$.$\square$

1.5.4 Variétés de $\mathbb{R}^n$, théorème de Jordan

Définition 50 - **Proposition**[*Variété de $\mathbb{R}^n$*] *Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$, x un point de M. Soit p un entier > 0 et k un entier > 0.*
M est par définition une **variété de dimension p et de classe C^k au voisinage de** *x si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*
(i) Il existe V voisinage ouvert de x tel qu'il existe un C^k difféomorphisme de V sur $W \subset \mathbb{R}^n$ tel que $g(x) = 0$ et $g(M \cap V) = W \cap P$, avec P l'ensemble des $(y_1, ..., y_n)$ tels que $y_{p+1} = 0$, $y_{p+2} = 0$, ... , $y_n = 0$.
(ii) Après une permutation pertinente des coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, il existe V voisinage ouvert de x et ϕ application C^k de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tel que pour tout y dans V

$$y \in M \iff \phi(y_1, ..., y_p) = (y_{p+1}, ..., y_n)$$

(iii) Il existe un voisinage V ouvert de x, Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$, f une application C^k de Ω dans $\mathbb{R}^n$, tels que f induise un homéomorphisme de Ω sur $M \cap V$, $f(0) = x$ et $f'(0)$ de rang p [a].
(iv) Il existe un voisinage V ouvert de x, Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$, f une application C^k de Ω dans $\mathbb{R}^n$, tels que f induise un homéomorphisme de Ω sur $M \cap V$, $f(0) = x$ et $f'(y)$ de rang p pour tout y dans Ω [b].

[a] Il s'agit d'un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
[b] Il s'agit d'un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration :

On notera pendant cette preuve $x_{|I}$, avec $I = \{i_1, ..., i_m\}$ et $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ un sous-ensemble de $[1, n]$ et x un élément de $\mathbb{R}^n$, $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$.

• L'équivalence entre (iii) et (iv) est claire ; bien sûr (iv) implique (iii), et réciproquement en supposant (iii) par continuité de la différentielle et continuité du déterminant d'une matrice extraite, on peut trouver un voisinage de 0 dans lequel la différentielle a le même rang. Il suffit alors de se restreindre à ce voisinage.

• Voyons maintenant que (iii) implique (ii).

Supposons (iii). La matrice de la différentielle de f en 0 est de rang p ; modulo une bonne permutation des coordonnées, on peut donc supposer que la matrice extraite de la différentielle pour les indices en ligne et en colonne inférieurs ou égaux à p est inversible.

En se restreignant aux p première coordonnées, f est alors C^k, de différentielle en 0 de rang plein. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale 35, et f ainsi restreint est donc un C^k difféomorphisme au voisinage de 0. En prenant ϕ la composée de f et de l'inverse de la restriction de f aux p-premières coordonnées, on obtient une fonction satisfaisant (ii).

• Voyons maintenant (ii) implique (iii).

Supposons (ii) vérifiée. Définissons alors $f(y) = (y + x_{|[1,p]}, \phi(y + x_{|[1,p]})$[2]. f convient...

• Montrons maintenant que (iii) implique (i).

Supposons (iii) vérifiée.

Définissons alors $g(y) = (y_{|[1,p]} - x_{|[1,p]}, y_{|[p+1,n]} - \phi(y_{|[1,p]})$... g convient pour (i).

[2] Je "recolle" ainsi un élément de $\mathbb{R}^p$ et un élément de $\mathbb{R}^{n-p}$ pour obtenir un élément de $\mathbb{R}^n$

• Il ne reste plus qu'à vérifier que (i) implique (iii).

Supposons donc (i) vérifiée.

Alors soit $f(y) = g^{-1}(y_{|[1,p]}, 0, \ldots, 0)$.

La différentielle de g est injective, donc la restriction à $\mathbb{R}^p$ est injective aussi. Donc f vérifie bien (iii).$\square$

Théorème 51 (Théorème de Jordan) *Toute hypersurface M (i.e. variété de dimension $n-1$) de $\mathbb{R}^n$ C^∞*
• est le noyau d'une application C^∞ dont la différentielle ne s'annule pas sur M.
• est orientable (c'est à dire qu'il existe un champ de vecteur ne s'annulant pas, continu, défini sur M, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$)
• partage le plan en deux domaines[a] (l'un borné l'autre non) dont elle est la frontière commune.

[a]Rappelons qu'un domaine est un ouvert connexe.

Démonstration :

Ce théorème, long et loin d'être trivial, nécéssitera différents lemmes. Cette preuve est largement inspiré de la note "Le théorème de Jordan pour les hypersurfaces C^∞", de D. Leborgne, paru dans la Revue de Maths Spé numéro 104, 1993-1994, lui-même inspiré de l'article "Orientability of smooth hypersurfaces and the Jordan Brouwer separation theorem", Expo. Math. 5 (1987), p 283-286.

Lemme 52 *Soit X un espace topologique connexe, et f et g continues de X dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont localement égales ou opposées, et si l'intérieur de $f^{-1}(0)$ est réduit à l'ensemble vide, alors f et g sont égales ou opposées.*

Démonstration :

• Définissons :

$$Egales = \{x/f(x) = g(x)\}$$
$$Oppos = \{x/f(x) = -g(x)\}$$

Et notons Ω l'intérieur de $Egales$.

• Supposons tout d'abord Ω non vide, et montrons que $\Omega = X$. Si on a un tel résultat, alors on saura que soit $Egales$ est d'intérieur vide, soit il est égal à tout l'espace. Si $Egales$ est égal à tout l'espace, alors on a bien le résultat souhaité. Si $Egales$ est d'intérieur vide, alors l'ensemble des x tels que $f(x) = g(x) \neq 0$ (inclus dans l'intérieur d'$Egales$) est vide, et donc $Oppos = X$, d'où le résultat souhaité. Donc montrer que si $\Omega \neq \emptyset$ alors $\Omega = X$ est suffisant pour le résultat souhaité.

• Donc, on suppose Ω vide.

• Soit x appartenant à la frontière de Ω.

• Par hypothèse, il existe U ouvert contenant x sur lequel f et g sont égales ou opposées, puisque f et g sont localement égales ou opposées.

• L'intersection de U et Ω est non vide (puisque x est sur la frontière de Ω), et contient un point sur lequel f et g sont non nulles, puisque $f^{-1}(x)$ est d'intérieur vide. Donc f et g sont égales sur U (rappelons que Ω est inclus dans $Egales$).

• On en déduit que x appartient à $Egales$.

• On a donc montré que la frontière de Ω est incluse dans Ω.
• Ω est donc fermé et ouvert.
• Ω est donc égal à X, puisque <u> X est connexe</u>. D'où le résultat.□
Nous avons encore besoin d'un lemme de topologie :

> **Lemme 53** *Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts recouvrant $\mathbb{R}^n$, et pour i dans I, f_i application C^∞ de Ω_i dans $\mathbb{R}$, telle que l'intérieur de $f_i^{-1}(0)$ soit d'intérieur vide.*
> *Supposons que lorsque Ω_i et Ω_j s'intersectent, alors f_i et f_j soient égales ou opposées localement sur $\Omega_i \cap \Omega_j$.*
> *Alors il existe une unique fonction f, au signe près, dont la restriction pour tout i à Ω_i soit f_i.*

Bien voir que l'on n'a pas supposé que les Ω_i soient connexes.

<u>Démonstration :</u>

• On considère la famille $(B_j)_{j\in J}$ des boules B telles qu'il existe un certain i tel que $B \subset \Omega_i$. On définit f'_j la restriction de Ω_i à B_j, lorsque B_j est inclus dans Ω_i.

• Supposons qu'on ait construit une fonction f localement égale ou opposé à f'_j sur B_j pour tout j dans J.

• Alors f, pour tout j dans J, est égale à $\epsilon'_j f'_j$ sur B_j, avec $\epsilon'_j \in \{-1, 1\}$, par connexité de B_j et application du lemme précédent 52.

• Alors f, pour tout i dans I, est égale à $\epsilon_i f_i$ sur Ω_i, avec $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$. En effet, donnons-nous x et y dans Ω_i, avec $f_i(x)$ et $f_i(y)$ tous deux non nuls, et montrons que nécéssairement f et f_i égales (resp. opposées) en x implique f et f_i égales (resp. opposées) en y.

- le segment $[x, y]$ est recouvert par un nombre fini de boules B_j
- chacune des intersections de ces boules est connexe, et chaque boule est connexe.
- on peut donc appliquer sur chacun de ces connexes le lemme 52, d'où le résultat.

• Il reste donc simplement à construire une fonction f convenable sur les B_j.

• On montre tout d'abord le résultat en dimension 1, sur un segment fermé. Cela se fait en recouvrant le segment en question par un nombre fini de boules ouvertes B_j, en définissant f sur cette réunion finie de proche en proche. Le fait que l'on soit en dimension 1 rend cela facile ; il suffit de choisir des ouverts consécutifs, non inclus les uns dans les autres. Par le lemme 52, on a une solution et une seule, au signe près.

• On procède maintenant par récurrence sur la dimension i, pour montrer l'existence et l'unicité au signe près d'une telle fonction sur un pavé $[-m, m]^i$.

• Pour cela on considère ce pavé comme le produit $[-m, m] \times [-m, m]^{i-1}$.

• On définit une fonction f_t pour t dans $[-m, m]$, définie sur $[-m, m]^{i-1}$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, f_t égale à FLEMMARD ça marche pas parce qu'on n'est pas sur que l'intersection d'un ensemble d'intérieur vide avec un ensemble de dimension inférieure est d'intersection vide.

•

1.5.5 Espaces vectoriels normés de dimension finie

⊡ Propriétés topologiques

La boule unité fermée d'un espace vectoriel normé est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie (théorème de Riesz **??**).

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (voir théorème **??**). En particulier, les espaces vectoriels normés réels de dimension finie sont tous isomorphes à $\mathbb{R}^n$ pour un certain n, tous les espaces vectoriels normés complexes de dimension finie sont isomorphes à $\mathbb{C}^n$ pour un certain n. Les compacts d'un espace vectoriel de dimension finie sont donc exactement les fermés bornés. Cela implique notamment que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé (qu'il s'agisse d'un espace vectoriel normé de dimension finie ou non).

⊡ **Propriétés géométriques**

Définition 54 *Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite* **équilibrée** *si elle contient ax pour tout a de module 1 et tout x de A.*

Théorème 55 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, soit $B \subset E$, B est la boule unité pour une certaine norme si et seulement si B est convexe équilibré compact ayant 0 comme point intérieur. La norme correspondante est alors unique.*

Démonstration : Cette preuve, utilisant la notion de jauge, est détaillée dans [22, p236].□

Définition 56 *On définit ici la notion de* **séparation au sens large (resp. strict)** *: On dit qu'un hyperplan H* sépare au sens large *deux parties A et B (resp.* sépare au sens strict*) si A et B sont inclus dans l'un et l'autre des demi-espaces fermés (resp. ouverts) délimités par H.*

Théorème 57 (Forme géométrique de Hahn-Banach en dim. finie) *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors :*
• Soit A ouvert convexe non vide, L sous-espace vectoriel de E de dimension finie n'intersectant pas A. Alors il existe un hyperplan H tel que $L \subset H$ et $A \cap H = \emptyset$.
• Soient A et B des convexes non vides et disjoints de E. Alors
- Si A est ouvert, il existe un hyperplan séparant A et B au sens large.
- Si A et B sont ouverts, il existe un hyperplan séparant A et B au sens strict.
- Si A est compact et B fermé, il existe un hyperplan séparant A et B au sens strict.
- Si A et B sont fermés, alors il existe un hyperplan séparant A et B.

Démonstration : Voir [19, p347] pour une preuve complète ; les points sont à démontrer dans cet ordre pour simplifier la preuve.□

Chapitre 2

Extrema

Une référence claire et complète est [7]. En outre on y trouve des algorithmes justifiés rigoureusement.

2.1 Cadre et définitions

Pour ce chapître, on travaillera sur une application f continue d'un ouvert U d'un espace de Banach E dans $\mathbb{R}$.

Définition 58 *On dit que f admet un* **minimum relatif** *ou* **minimum local** *en $x \in U$ si il existe un voisinage V de x tel que pour tout v dans V $f(x) \leq f(v)$.*
On dit que f admet un **minimum relatif strict** *ou* **minimum local strict** *en $x \in U$ si il existe un voisinage V de x tel que pour tout $v \neq x$ dans V $f(x) < f(v)$.*
On dit que f admet un **minimum global** *en $x \in U$ si pour tout v dans U $f(x) \leq f(v)$.*
On dit que f admet un **minimum global strict** *en $x \in U$ si pour tout $v \neq x$ dans U $f(x) < f(v)$.*
On définit de même les notions de **maximum relatif**, **maximum relatif strict**, **maximum global**, **maximum global strict**, *en remplaçant les $\leq$ par des $\geq$ et les $<$ par des $>$.*

2.2 Résultats liés à la compacité

Proposition 59 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et f C^0 de E dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$$

Alors f est minorée et atteint son minimum.

Démonstration : On se donne $A > 0$ tel que $\|x\| > A$ implique $f(x) > f(0)$. On considère alors $K = \overline{B}(0, A)$. K est fermé car on est en dimension finie (les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les fermés bornés). f atteint donc sa borne inf (voir corollaire **??**).□

Corollaire 60 (Quelques applications) • *La distance d'un point à un fermé non vide est minorée et le minimum est atteint.*
• *Aussi les trois applications suivantes, empruntées à [15] :*
- étant donnée une application f C^0 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un polynôme P minimisant $\|f-P\|_\infty$ parmi les polynômes de degré $\leq n$.
- le **théorème de D'Alembert-Gauss**, *stipulant que tout polynôme à coefficients complexes et de degré ≥ 1 admet une racine, en considérant $z \mapsto |P(z)|$ (corollaire : tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$).*

Voir le corollaire **??** sur la trigonalisation de matrices complexes, ou la partie **??** sur les suites récurrentes linéaires.

2.3 Résultats de calcul différentiel

2.3.1 Résultats au premier ordre

Théorème 61 (Condition nécessaire du premier ordre) *Si x est un minimum relatif de f et si f est différentiable en x, alors la différentielle de f en x est nulle.*

<u>Démonstration :</u>
$df(x)(h) \geq 0$ car $\frac{f(x+th)-f(x)}{t} \geq 0$ si $t \geq 0$
$df(x)(h) \leq 0$ car $\frac{f(x+th)-f(x)}{t} \leq 0$ si $t \leq 0$□

Pas de réciproque ; par exemple $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a une différentielle nulle en 0 et n'a ni maximum ni minimum en zéro.

Définition 62 *Si $df(x) = 0$, on dit que x est un point critique.*

Pour aller plus loin on peut s'intéresser aux extréma liés ; voir pour cela [7].

2.3.2 Résultats du second ordre

Théorème 63 (Condition nécessaire du second ordre) *Soit f deux fois différentiable en x.*
Alors si f admet un minimum local en x, $f''(x)$ est positive.

<u>Démonstration :</u>
Supposons $f''(x)$ non positive ; alors il existe v tel que $f''(x)(v,v)$ soit < 0. On se donne un voisinage V de x sur lequel $f \leq f(x)$ et sur lequel la formule de Taylor-Young **??** donne

$$f(x+t.v) \leq f(x) + \frac{1}{4} f''(x)(tv,tv)$$

(rappelons que par le résultat précédent $f'(x)$ est nul)

on peut toujours choisir un tel voisinage V car

$$f(x+t.v) = f(x) + \frac{1}{2} f''(x)(tv,tv) + o(t^2)$$

pour t assez petit

et donc $f(x+tv) - f(x)$ est alors négatif pour ces valeurs de t (à part pour $t = 0$).$\square$

Théorème 64 (Condition suffisante du second ordre) *Supposons E de dimension finie. Soit f deux fois différentiables en x, $f'(x) = 0$, et $f''(x)$ définie positive. Alors f admet un minimum relatif strict en x.*

Démonstration : On considère simplement un minimum de $f''(x)(u,u)$ pour $\|u\| = 1$ et la conclusion vient rapidement.$\square$

On peut se passer d'hypothèse de dimension finie à condition d'imposer que $f''(x)$ vérifie $\exists \alpha > 0 / f''(x)(u,u) > \alpha \|u\|^2$.

2.4 La convexité

Pour une introduction à la convexité, voir la partie 1.5.1.

Les résultats liés à la convexité sont très intuitifs, et se justifient rigoureusement sans trop de difficulté : on pourra consulter [7] pour moultes développements.

Théorème 65 *Un minimum local d'une fonction convexe définie sur une partie convexe est en fait un minimum global.*
Une fonction strictement convexe définie sur une partie convexe admet au plus un minimum et si un tel minimum existe il est strict.

2.5 Pour aller plus loin

On trouvera dans [7] des études des cas particuliers des formes quadratiques, et une justification rigoureuse de la méthode de Newton.

Chapitre 3

Equations différentielles

Une référence appréciable pour sa clarté et son souci d'illustration et d'utilisation pratique des résultats (notamment informatique) est le livre "Analyse numérique et équations différentielles" de J.-P. Demailly ([9]). Je traite ici exclusivement le cas de la dimension finie, largement suffisant pour la plupart des problèmes ; pour une analyse plus générale, on pourra consulter [3].

3.1 Lemmes préliminaires

Lemme 66 (Lemme de Gronwall) *Soit ϕ une fonction C^0 de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$. Soit $c \in [a,b]$, soient A, B des réels positifs.*
Supposons que pour tout t dans $[a,b]$, on ait

$$\phi(t) \leq A + B \left| \int_c^t \phi(u).du \right|$$

Alors pour tout t dans $[a,b]$

$$\phi(t) \leq A\ e^{B|t-c|}$$

Démonstration :

Pour $t \geq c$, on définit $F(t) = A + B \int_C^t \phi(s).ds$. F est C^1. Calculons la dérivée de $t \mapsto e^{-Bt}.F(t)$; cette dérivée est

$$e^{-Bt}(-B\ F(t) + B\phi(t))$$

donc est ≤ 0 sur $[c,b]$. Le résultat en découle immédiatement pour $t \geq c$.

Pour le cas restant, $t \leq c$, on définit $F(t) = A + B \int_t^c \phi(u)du$; F est C^1. Calculons la dérivée de $t \mapsto e^{Bt}.F(t)$; cette dérivée est

$$e^{Bt}(B\ F(t) - B\phi(t))$$

donc est ≥ 0 sur $[a,c]$. Le résultat en découle immédiatement pour $t \leq c$.$\square$

3.2 Equations différentielles d'ordre 1

Définition 67 *On appelle* **équation différentielle du premier ordre** *une équation de la forme*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

*avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie m, U une partie (*non nécessairement ouverte ! *) de $\mathbb{R} \times E$, et f une application de U dans E, avec f continue.*

On appelle **solution** *de cette équation une application ϕ dérivable de I dans E avec I un connexe de $\mathbb{R}$ (i.e. un intervalle) telle que $\{(t, \phi(t))/t \in I\} \subset U$ et $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$ pour tout t dans I.*

Proposition 68 *Une solution d'une équation différentielle est nécessairement C^1.*

Démonstration : L'équation exprime notamment le fait que la dérivée de sa solution est C^0.$\square$

Remarque (forme intégrale) : $\phi : I \to E$ est une solution de $\frac{\delta x}{\delta t} = f(t,x)$ de donnée initiale $\phi(c) = x_0$ si et seulement si pour tout t dans I, $\phi(t) = \phi(c) + \int_c^t f(u, \phi(u))du$.

3.2.1 Avec des hypothèses sympathiques sur f

Définition 69 *Une fonction de deux variables $(x,y) \in X \times Y \mapsto f(x,y)$ est dite* **localement lipschitzienne en** *y si pour tout (x,y) il existe un scalaire k et V un voisinage de (x,y) dans $X \times Y$ tel que pour tous x', y_1, y_2 tel que $(x', y_1) \in V$ et $(x', y_2) \in V$ on ait*

$$\|f(x', y_1) - f(x', y_2)\| \leq k.\|y_1 - y_2\|$$

Lemme 70 (Unicité) *Si f est localement lipschitzienne en x, alors si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux solutions sur un même intervalle ayant même valeur en un certain t, alors $\phi_1 = \phi_2$.*

Démonstration : Donnons nous ϕ_1 et ϕ_2 deux solutions, égales en t.

Pour simplifier le raisonnement on va supposer qu'il existe $t'' > t$ tel que $\phi_1(t'') \neq \phi_2(t'')$. En cas contraire, on raisonnerait de même en considérant $t'' < t$ vérifiant cette propriété.

Soit t' l'inf de ces t''. Par continuité, $\phi_2(t') = \phi_1(t')$.

Soit V l'intersection de $[t', \infty[$ et d'un voisinage de t' tel que $\{(t, \phi_1(t))/t \in V\}$ et $\{(t, \phi_2(t))/t \in V$ restent dans un voisinage de $(t', \phi'(t'))$ sur lequel f est C-lipschitzienne en y.

Pour v dans V, on a $\phi_i'(v) = f(v, \phi_i(v))$, et donc

$$\phi_1(v) - \phi_2(v) = \int_0^t f(u, \phi_1(u)) - f(u, \phi_2(u))du$$

$$|\phi_1(v) - \phi_2(v)| \leq C \int_0^v |\phi_1(u) - \phi_2(u)|du$$

Donc par le lemme de Gronwall on conclut que ϕ_1 et ϕ_2 sont égales sur V, ce qui est contradictoire avec la définition de t'. $\square$

Lemme 71 (Existence) *On se donne une fonction f C^0 de $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b) \times \overline{B}(\lambda_0, c)$ dans $\mathbb{R}^n$, la boule $\overline{B}(x_0, b)$ étant une boule de $\mathbb{R}^n$, et la boule $\overline{B}(\lambda_0, c)$ étant une boule compacte ou un seul point d'un espace métrique.*
On suppose qu'il existe C tel que $\|f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$, et on se donne M tel que $|f(t, x)|$ est borné par M sur $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b) \times \overline{B}(\lambda_0, c)$ (un tel M existe nécessairement par continuité de f sur $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b) \times \overline{B}(\lambda_0, c)$ qui est compact).
Alors il existe une fonction $\phi(., \lambda)$ telle que $\frac{\delta\phi(t,\lambda)}{\delta t} = f(t, \phi(t, \lambda), \lambda)$, définie sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(\lambda_0, c)$, avec T le min de a et b/M, et telle que pour tout λ $\phi(t_0, \lambda) = x_0$; en outre cette fonction est continue par rappport à t et λ.

Le paramètre t de la fonction $f(t, x, \lambda)$ peut être vu comme le paramètre temporel ; c'est une fonction de t que l'on cherche comme solution. ϕ est la fonction solution, dépendant de t. Quant à λ, c'est un paramètre désignant les conditions initiales. Le lemme est directement donné sous-une forme très générale ; mais le cas d'une boule $\overline{B}(\lambda_0, c)$ compacte réduite à un point n'est pas à négliger ; il s'agit en fait du cas le plus courant, l'intérêt d'introduire une boule étant simplement de montrer la continuité par rapport aux conditions initiales.

L'hypothèse de l'existence de C sera notamment vérifiée si les dérivées partielles de f par rapport aux n composantes de ϕ existent et sont continues.

<u>Démonstration :</u>

- On pose $x_0(t, \lambda) = x_0$
- On définit par récurrence $x_{k+1}(t, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^t f(u, x_k(u, \lambda))du$
- Il est clair par récurrence que $|x_k(t, \lambda) - x_0| \leq b$
- x_k est C^0 en t clairement
- x_k est C^0 en λ par continuité sous le signe intégral (théorème **??**)
- On montre maintenant par récurrence que pour tout k

$$|x_{k+1}(t, \lambda) - x_k(t, \lambda)| \leq \frac{MC^k|t - t_0|^{k+1}}{(k + 1)!}$$

- Le cas $k = 0$ est immédiat

- $|(x_{k+1} - x_k)(t,\lambda)| = |\int_{t_0}^{t} f(u, x_k(u,\lambda),\lambda) - f(u, x_{k-1}(u,\lambda),\lambda).du| \leq C|t - t_0| \int_{t_0}^{t} MC^{k-1}\frac{|u-t_0|^k}{k!}du \leq \frac{MC^k|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$

- $t - t_0$ étant borné sur l'ensemble qu'on s'est donné, la suite des x_k converge uniformément. Du coup la limite est continue par rapport à (t, d). Le fait que la limite vérifie l'équation est conséquence du passage à la limite.□

Théorème 72 (Cauchy-Lipschitz) *Si f est localement lipschitzienne en x, étant donné (t_0, x_0), il existe une et une seule solution maximale (i.e. sur un intervalle maximal) de l'équation différentielle.*
En outre, cette fonction maximale n'admet pas de limite au bord de l'intervalle où elle est définie, si ce bord est fini et n'est pas le bord de l'intervalle de définition de f.

Démonstration : L'existence et l'unicité découlent des lemmes ci-dessus. Lorsque la solution ne tend pas vers l'infini au bord du domaine ($\neq \infty$ et $\neq$ du bord de l'intervalle de définition de f), on peut prolonger par le lemme d'existence.□

Théorème 73 (Existence de solutions globales) *On suppose désormais U de la forme $I \times E$, avec I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose en outre qu'il existe une fonction k continue de I dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(t, .)$ est k-lipschitzienne de rapport de Lipschitz $<\ k(t)$ sur E. Alors, toute solution maximale est une solution globale (sur I).*

Démonstration : Donnons-nous un intervalle compact K inclus dans J. Il est suffisant de montrer qu'il existe une solution définie sur K. Il suffit donc d'appliquer le lemme 71, k étant majorée sur K par une certaine constante C.□

Théorème 74 (Equadif dépendante d'un paramètre) *On remplace $f(t, x)$ par $f(t, x, \lambda)$; on suppose que f est continue lipschitzienne en x, de constante de Lipschitz indépendante de t et λ, avec λ appartenant à un espace topologique L, t dans un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $x \in B(x_0, r) \subset E$ avec E un Banach. En outre, f est bornée par M.*
Alors étant donné $t_0 \in \mathbb{R}$ on peut à λ associer une solution ϕ_λ sur $J = I \cap [t_0 - r/M, t_0 + r/M]$, et $(t, \lambda) \mapsto \phi_\lambda(t)$ est continue.

Démonstration : La démonstration utilise le théorème du point fixe de Banach ; pour plus de précisions, on consultera [9].□

3.2.2 Sans hypothèse sympathique sur f

f sera ici simplement supposée C^0.

Définition 75 *On dira que ϕ est une* **solution ϵ-approchée** *de l'équation différentielle $\frac{\delta x}{\delta t} = f(t,x)$ si ϕ est définie continue C^1 par morceaux sur un intervalle J, si $\phi(t_0) = x_0$ et si pour tout t dans J $(t,\phi(t))$ est bien dans U, avec $\|\phi'(t) - f(t,\phi(t))\| \leq \epsilon$, à part aux points de discontinuité, auxquels on doit avoir $\|\phi'_d(t) - f(t,\phi(t))\|$ et $\|\phi'_g(t) - f(t,\phi(t))\|$ tous deux $\leq \epsilon$, avec ϕ'_d et ϕ'_g les dérivées à droites et à gauche.*

Théorème 76 *Supposons f C^0, définie sur $I \times B(x_0,r)$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E. Supposons $|f| \leq M$. Alors avec $J = I \cap [t_0 - r/M, t_0 + r/M]$, $\forall \epsilon > 0$, l'équation $\frac{\delta x}{\delta t} = f(x,t)$ a une solution ϵ-approchée affine par morceaux telle que $\phi(t_0) = x_0$.*

Démonstration :

• On montre qu'on peut construire une telle solution sur $J^+ = J \cap [t_0, \infty[$, le résultat s'obtenant de même sur $J^- = J \cap] - \infty, t_0]$.

• Définissons tout d'abord ϕ_0 affine, définie par $\phi_0(t_0) = x_0$, et $\phi_0'(t_0) = f(t_0,x_0)$.

• On note que ϕ_0 est bien telle que $(t,\phi(t))$ soit dans le domaine de définition de f pour t dans J^+.

• Par continuité de f, ϕ_0 est une solution ϵ-approchée sur $[t_0,t]$, pour t suffisamment petit. En considérant t_1 le sup de ces t, on obtient t_1 [1], et par continuité ϕ_0 est une solution ϵ-approchée sur $[t_0,t_1]$.

• Si t_1 est différent de $sup\ J$, alors on recommence le même processus, en remplaçant x_0 par $x_1 = f(t_1)$, et t_0 par t_1, et r par $r - \|x_1 - x_0\|$ (> 0 par définition de J) ; on nomme ϕ_1 la nouvelle application obtenue. Puis t_2, puis t_3, et ainsi de suite, jusqu'à ce que t_i soit le sup de J, auquel cas la preuve est terminée.

• Supposons maintenant que la suite des t_i croît sans jamais atteindre la borne sup de J ; notons T le sup des t_i.

• Remarquons que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq M|t_{n+1} - t_n|$ et que donc $\| \sum_{m=n}^{n+p} x_{n+1} - x_n\| \leq M(T - t_n)$; donc par le critère de Cauchy (rappelons que E est un Banach), la suite (x_n) tend vers une certaine limite x.

• Considérons maintenant

$$\|f(t_n,x_n) - f(t,\phi_n(t))\|$$

pour $T \geq t \geq t_n$, et examinons ce qu'il se passe pour $n \to \infty$.

Cette quantité est inférieure ou égale à

$$\|f(\underbrace{t_n}_{\to T}, \underbrace{x_n}_{\to x}) - f(T,x)\| + \|f(T,x) - f(\underbrace{t}_{\to T}, \underbrace{\phi_n(t)}_{\to x \text{ car } \|\phi_n(t) - x_n\| \leq (t-t_n)M})\|$$

[1] Je passe sous silence le cas $t_1 = \infty$, qui termine la preuve immédiatement.

et donc tend vers 0 en l'infini, et donc finit par être inférieure à ϵ à un certain rang n ; donc $t_{n+1} \geq T$, d'où la contradiction.$\square$

Corollaire 77 *Supposons E de dimension finie. f étant toujours bornée dans un voisinage de (t_0, x_0), on peut toujours trouver un voisinage de t_0 sur lequel l'équation admet des solutions ϵ-approchées pour tout ϵ.*

On utilise le fait que dans le théorème précédent, le voisinage obtenu est indépendant de ϵ.

3.3 Equation différentielle d'ordre n

Etant donnée une équation de la forme

$$\frac{d^n x}{dt} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}})$$

où f est supposée localement lipschitzienne en x, $\frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$, avec $U \subset \mathbb{R} \times E^n$, f de U dans E continue à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, on se ramène à

$$\frac{dx}{dt} = x_1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\cdots$$

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}$$

$$\frac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, ..., x_{n-1})$$

Ces équations différentielles correspondent donc à une équation d'ordre 1 dans l'espace E^n.

Il reste à reformuler les différents résultats sur les équations différentielles d'ordre 1 au cas de l'ordre n :

Etant donnés t_0 et x_0, x_1, ... , x_{n-1}, il existe (au moins) une solution maximale x définie sur un intervalle ouvert contenant t_0 telle que $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, ... $x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$ (rappelons que l'on a supposé f continue). f étant localement lipschitzienne en x, $\frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}$, alors il y a unicité. Pour l'existence sans l'unicité, le théorème de Cauchy-Péano permet de se passer du caractère localement lipschitzien.

Si U est de la forme $I \times E^n$, et s'il existe une fonction continue dépendant seulement de t majorant le coefficient de lipschitz, alors les solutions maximales sont définies sur I tout entier.

Ces résultats découlent immédiatement des résultats à l'ordre 1, grâce à la transformation décrite ci-dessus.

3.4 Zoologie des équations différentielles

3.4.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 78 *Une* **équation différentielle linéaire du premier ordre** *est une équation différentielle du premier ordre avec*

$$\frac{dx}{dt} = A(t).x + B(t)$$

avec $A(t)$ une application linéaire continue de E dans E et $B(t) \in E$, pour tout t dans I intervalle de $\mathbb{R}$.
E est toujours un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , A est continue, B est continue.
*L'***équation différentielle homogène associée** *est*

$$\frac{dx}{dt} = A(t).x$$

Théorème 79 (Théorème de Cauchy) *Si A est continue de I dans $\mathcal{L}(E)$[a], alors l'équation différentielle linéaire du premier ordre admet une solution ϕ telle que $\phi(t_0) = x_0$ définie sur tout I.*
Il existe une unique solution définie sur tout I.

[a] Ensemble des applications linéaires continues de E dans E.

Démonstration : Il s'agit directement d'une application du théorème 73. □

Théorème 80 *En notant cette solution ϕ_{x_0} (à t_0 fixé) la solution de l'équation linéaire homogène associée, l'application qui à x_0 associe ϕ_{x_0} est linéaire bijective de E dans l'ensemble des solutions de l'équation homogène.*

Démonstration :
• L'injectivité est claire, si deux fonctions sont différentes en t_0 alors elles sont différentes tout court.
• La surjectivité est non moins claire, par définition de ϕ_{x_0}.
• La linéarité, enfin est immédiate ; il suffit de voir que si x et y sont solutions, alors $\lambda.x + \mu.y$ est aussi solution.□

Corollaire 81 (Cas de la dimension finie) *On en déduit au passage que la dimension de l'espace des solutions d'une équation diférentielle est finie et égale à la dimension de E, lorsque la dimension de E est finie.*

⊡ **Cas général, dimension non nécessairement finie**

Dans cette partie, et seulement celle-ci, on traitera un cadre plus général. L'intérêt est seulement de donner un exemple d'utilisation en dimension non finie. On admettra le fait que le théorème de Cauchy-Lipschitz est aussi valable dans le cas d'un espace de Banach, même s'il n'est pas de dimension finie (la démonstration est d'ailleurs la même).

⋄ A **non constant**

Définition 82 *On appelle* **équation résolvante** *de l'équation différentielle linéaire de la définition 78 l'équation à paramètre dans l'ensemble des applications C^1 de I dans $\mathcal{L}(E)$:*

$$U'(t) = A(t) \circ U(t)$$

Afin de pouvoir travailler sur cette équation, nous aurons besoin du théorème de Cauchy ; aussi devons nous bien voir :

- que $\mathcal{L}(E)$ est un Banach (de manière générale l'ensemble des applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un Banach est un Banach)

- que l'application $t \mapsto (\phi \mapsto A(t) \circ \phi)$ est continue de I (pour la topologie usuelle) dans $\mathcal{L}(E)^{\mathcal{L}(E)}$ (pour la topologie produit)

Le deuxième point découle facilement de la continuité de A.

On peut donc appliquer le théorème de Cauchy, et exhiber pour tout t_0 dans I une solution unique $Resolvant_{t_0}$ sur tout I de l'équation résolvante vérifiant

$$Resolvant_{t_0}(t_0) = Id_E.$$

Définition 83 *La solution $Resolvant_{t_0}(t_0)$ est appelée* **résolvante d'origine** t_0.

Voyons maintenant les propriétés sympathiques de la résolvante, qui découlent des résultats ci-dessus.

Proposition 84 • *Pour tous a, b et c dans I, $Resolvant_a(b).Resolvant_b(c) = Resolvant_a(c)$.*
• *Pour tout a et tout b $Resolvant_a(b)$ est dans $GL(E)$.*

__**Démonstration :**__
• Il suffit de dériver tout ça, et d'utiliser l'unicité donnée par le théorème de Cauchy.
• C'est une conséquence évidente du fait que $Resolvant_a(b).Resolvant_b(a) =$

$Resolvant_b(a).Resolvant_a(b) = Resolvant_a(a) = Resolvant_b(b) = Id_E.\square$

Théorème 85 • *La solution x de l'équation homogène associée vérifiant $x(t_0) = x_0$ est l'application $t \mapsto Resolvant_{t_0}(t).x_0$.*
• *Une solution particulière x de l'équation générale de la définition 78 vérifiant $x(t_0) = x_0$ est donnée par*

$$x(t) = Resolvant_{t_0}(x_0) + \int_{t_0}^{t} Resolvant_u(t)B(u)du$$

Démonstration :
• La résolvante est construite pour ça. Il suffit d'écrire la dérivée de

$$t \mapsto Resolvant_{t_0}(t).y_0$$

pour avoir la résultat souhaité.

• Il suffit d'écrire que x peut s'exprimer sous la forme $x(t) = Resolvant_{t_0}(t)(C(t))$; ensuite, par une méthode bien similaire à la méthode de variation des constantes, on écrit

$$x'(t) = \frac{(\delta((x,y) \mapsto Resolvant_{t_0}(x)(y)) \circ (t \mapsto (t, C(t))))}{\delta t}$$

$$= (\ ((\frac{\delta Resolvant_{t_0}(x)}{\delta x})(y)dx + (Resolvant_{t_0}(x)dy)) \circ (t, C(t))).(1, C'(t))$$

$$= A(t)Resolvant_{t_0}(t)C(t) + Resolvant_{t_0}(t)C'(t)$$

Donc x sera solution si $B(t) = Resolvant_{t_0}(t)C'(t)$, c'est à dire si $C(t) = Resolvant_{t_0,t}^{-1}(x_0) + \int_{t_0}^{t} Resolvant_{t_0}^{-1}(u)B(u)du$, donc si $x(t) = Resolvant_{t_0}(x_0) + Resolvant_{t_0}(t). \int_{t_0}^{t} Resolvant_u(t_0)B(u)du$.

Donc on a bien

$$x(t) = Resolvant_{t_0}(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} Resolvant_u(t)B(u)du$$

D'où le résultat. $\square$

⋄ **A constant**

Théorème 86 *Si $A(t) = A$ est constant, alors l'équation différentielle linéaire définie en 78 admet pour unique solution x vérifiant $x(t_0) = x_0$ l'application*

$$x : t \mapsto exp((t - t_0)A)(x_0)$$

Pour se rappeler de ce qu'est l'exponentielle d'un endormophisme continu d'un Banach on pourra consulter **??**.

Démonstration : Le théorème de Cauchy nous donne l'unicité, et il est immédiat que cette fonction convient, par le théorème donnant la dérivée de l'application $t \mapsto exp(t\ f)$ (voir partie **??**).$\square$

On note que $t \mapsto exp((t-t_0)A)(x_0)$ est le résolvant de l'équation différentielle.

Théorème 87 *Une solution particulière x de l'équation différentielle générale définie en 78 dans le cas où $A(t) = A$ est constant et vérifiant $x(t_0) = x_0$ est donnée par*

$$x(t) = exp((t-t_0)A).x_0 + \int_{t_0}^{t} exp((t-u)A)B(u)du$$

Démonstration : On peut simplement argumenter en utilisant le fait signalé ci-dessus, ie que $t \mapsto exp((t-t_0)A)$ est le résolvant (d'origine t_0) de l'équation différentielle, mais on peut aussi faire le calcul directement en cherchant des solutions de la forme $t \mapsto exp(tA)C(t)$.$\square$

Remarque : tout comme lorsque A est constant on a $Resolvant_{t_0}(t) = exp((t-t_0)A)$, on a $Resolvant_{t_0}(t) = exp(\int_{t_0}^{t} A(u)du$ LORSQUE pour tous t et s dans I $A(t)$ et $A(s)$ commutent ($A(t)A(s) = A(s)A(t)$).

⊡ Cas de la dimension finie

◇ $A(t)$ non constant

Si E est de dimension finie n, alors l'espace des solutions de l'équation homogène associée est de dimension finie n, comme on le souligne dans le corollaire 81. Pour simplifier les notations, on identifie E et $\mathbb{R}^n$, sans perte de généralité.

Proposition 88 *On se donne une famille $x_1, ..., x_m$ de solutions de l'équation différentielle homogène. Alors ces solutions sont libres si et seulement si l'ensemble des $x_i(t)$ est libre pour un certain t, si et seulement si l'ensemble des $x_i(t)$ est libre pour tout t.*

Démonstration :

Il est clair que si les $x_i(t)$ forment une famille libre pour un certain t, alors les x_i forment une famille libre.

Il est clair que si pour tout t, les $x_i(t)$ forment une famille libre, il en est de même.

Il reste donc juste à voir que si les x_i forment une famille libre, alors les $x_i(t)$ forment une famille libre, quel que soit t. Cela découle simplement du théorème 80.$\square$

Il n'est par contre pas vrai que dans le cas général, (x_i) famille libre $\rightarrow$ $(x_i(t))$ famille libre (par exemple n'importe quelle famille libre de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Ainsi lorsque l'on aura obtenu une famille libre de n solutions de l'équation différentielle homogène et une solution de l'équation générale, alors on pourra en déduire toutes les solutions de l'équation différentielle, en considérant la somme de la solution de l'équation générale plus une combinaison linéaire quelconque des n solutions libres de l'équation homogène associée.

Généralement, le problème ne sera pas d'obtenir les solutions de l'équation homogène, mais plutôt d'obtenir les solutions de l'équation générale.

Pour cela on utilisera notamment la méthode de la **variation des constantes**.

On suppose que $x_1, ..., x_n$ sont des solutions libres de l'équation homogène associée.

On cherche alors x solution particulière de l'équation générale, avec x de la forme

$$x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2(t)x_2(t) + \cdots + \lambda_n(t)x_n(t)$$

On note bien que toute fonction peut s'exprimer de la sorte, puisque pour tout t la famille des $x_i(t)$ est libre.

Faisons maintenant « varier les constantes » :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) = & \qquad \underbrace{\lambda_1 \frac{dx_1}{dt} + \cdots + \lambda_n \frac{dx_n}{dt}} \\ & = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 + ... + \lambda_n A x_n \text{ par définition des } x_i. \\ & + \frac{\delta\lambda_1}{\delta t}(t)x_1(t) + \ldots \frac{\delta\lambda_n}{\delta t}(t)x_n(t) \end{aligned}$$

Donc x vérifie l'équation générale si et seulement si

$$\sum_i \lambda_i'(t)x_i(t) = B(t)$$

En écrivant $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $M(t) = \begin{pmatrix} (x_1)_1 & (x_1)_2 & \ldots & (x_1)_n \\ (x_2)_1 & (x_2)_2 & \ldots & (x_2)_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_n)_1 & (x_n)_2 & \ldots & (x_n)_n \end{pmatrix}$[2]

On obtient l'équation $\Lambda' = M(t)^{-1}B(t)$ (notez que $M(t)$ est inversible, de par la proposition 88).

On peut donc en déduire les Λ, à une constante près. Les constantes en question ne changent de toute façon rien, puisque cela revient à ajouter une combinaison linéaire des solutions de l'équation homogène.

$\diamond$ **Cas $A(t) = A$ constant**

Tout d'abord on peut donner la forme générale des solutions, de manière simple lorsque l'endomorphisme est diagonalisable en dimension finie.

[2] On vérifiera facilement qu'il s'agit du résolvant (voir partie 82).

Théorème 89 *On va supposer ici que $A(t) = A$ est constant, et qu'il s'agit d'un endomorphisme diagonalisable, en dimension finie n. Alors avec (e_i) une base de E dans laquelle A s'identifie à une matrice diagonale, avec $A(e_i) = \lambda_i.e_i$, les solutions de l'équation homogène associée à l'équation différentielle linéaire définie en 78 sont les combinaisons linéaires de fonctions de la forme*

$$f_i : t \mapsto exp(\lambda_i.t)e_i$$

pour $i \in [1, n]$

Démonstration : Il est facile de voir que ces fonctions sont bien dans l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée. En vertu du corollaire diffé81 il suffit donc de vérifier que les solutions en question forment bien une famille libre ; ce fait se déduit immédiatement du fait que la famille des $f_i(0)$ est libre.

3.4.2 Equations différentielles autonomes

Définition 90 *Une équation différentielle est dite* **autonome** *si f ne dépend pas de t.*
On appelle **point d'équilibre** *d'une équation différentielle autonome un point x_0 tel que $f(x_0) = 0$.*
On appelle **point stable** *d'une équation différentielle autonome un point d'équilibre x_0 tel que*
$\forall \epsilon > 0 \exists \eta$ tel que pour tout x solution de l'équation différentielle et tout t_0 tel que $\|x(t_0) - x_0\| \leq \eta$
• *x est définie sur $[t_0, \infty[$*
• *$\|x(t) - x_0\| \leq \epsilon$ pour tout $t \geq t_0$*
On appelle **point asymptotiquement stable** *d'une équation différentielle autonome un point d'équilibre x_0 tel que pour un certain η, pour tout x solution de l'équation différentielle et tout t_0 tel que $\|x(t_0) - x_0\| \leq \eta$,*
• *x est définie sur $[t_0, \infty[$*
• *$lim_{t \to \infty} x(t) = x_0$*

C'est à dire qu'une équation différentielle autonome est de la forme $\frac{\delta x}{\delta t} = f(x)$.
Les résultats d'unicité permettent de dire que si

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \text{ et } x(u) = x_0$$

et

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \text{ et } y(v) = x_0$$

avec I intervalle maximal de définition de x et J intervalle maximal de définition de y, alors $J + u = I + v$ et $y(t + v) = x(t + u)$ pour tout t tel que $t + v \in J$.

Quelques exemples :

• Equation $x' = x$: 0 est l'unique point d'équilibre ; il n'est ni stable ni asymptotiquement stable.

• Equation $x' = -x$: 0 est l'unique point d'équilibre ; il est stable et asymptotiquement stable.

• Equation $x' = M.x$ avec M antisymétrique : 0 est point d'équilibre ; il est stable, mais pas asymptotiquement stable.

• Equation $x' = u$, avec u vecteur non nul : pas de point d'équilibre.

3.4.3 Equation de la chaleur

⊡ Le problème

Définition 91 *On définit* $\Omega =]0,1[\times\mathbb{R}^{+*}$ *;* $\overline{\Omega}$ *désigne l'adhérence de* Ω *dans* $\mathbb{R}^2$*, c'est à dire* $[0,1]\times\mathbb{R}^+$*.*
On cherche u *continue de* $\overline{\Omega}$ *dans* $\mathbb{R}$*, telle que* $u_{|\Omega}$ *soit* C^∞ *et vérifie*

$$\frac{\delta u}{\delta t} - \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0$$

(équation de la chaleur)
avec les conditions aux limites (CLs) :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

et les conditions initiales (CIs) :

$$u(x,0) = h(x)$$

avec h *une certaine fonction continue de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$*,* C^1 *sur* $]0,1[$*, telle que* $h(0) = h(1) = 0$ *(indispensable pour que les CLs puissent être vérifiées).*

⊡ La méthode

Pour attaquer cette équation, comme d'autres équations vérifiant une équation de la même forme (dérivée première en fonction du temps égale à une dérivée seconde (un laplacien) en coordonnées d'espace), on cherche en fait une solution $u(x,t) = f(x)g(t)$ s'exprimant comme produit d'un terme d'espace par un terme de temps. On ne se préoccupera pas pour le moment de la CI.

Une fois des solutions trouvées, on remarquera que les solutions forment un espace vectoriel. On cherchera alors une solution combinaison linéaire vérifiant la CI. Pour cela, puisqu'on aura remarqué que nos solutions en x sont des sinusoïdes (ayant toutes pour fréquence un multiple d'une certaine fréquence fondamentale) on considèrera l'antisymétrisée de la fonction des CI, pour considérer un développement en série de Fourier qui ne comporte que des sinusoïdes (il n'y aura pas de cosinusoïdes puisque l'on considèrera une fonction impaire !).

On obtiendra ainsi une solution. Il existe une preuve d'unicité, qui ne sera pas exposée ici : on la trouvera par exemple dans [22, p103].

⊡ **Les calculs**

Ecrivons

$$u(x,t) = f(x)g(t)$$

Alors l'équation de la chaleur s'écrit

$$f(x)g'(t) = f''(x)g(t)$$

$$\frac{g'(t)}{gt} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda$$

Ce terme est indépendant de x (à cause du terme de gauche) et de t (à cause du terme de droite). λ est donc une constante.

Le cas $\lambda > 0$ et le cas $\lambda = 0$ nous amènent, via les CLs, au cas $u = 0$, peu intéressant. Il reste donc seulement le cas $\lambda < 0$.

On a une équation de degré 2, qu'on peut réécrire comme une équation de degré 1,

$$f''(x) = \lambda f(x) \text{ équivaut à } \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

Cette équation est linéaire, et admet donc des solutions sur tout $]0,1[$; il s'agit d'une équation homogène (pas de second membre) elle est dans un espace de dimension 2, donc l'espace des solutions est de dimension 2.

On a deux solutions évidentes : $x \mapsto cos(\omega x)$ et $x \mapsto sin(\omega x)$ (avec $\omega^2 = -\lambda$). La solution cosinusoïde ne satisfait pas les CLs, donc on garde les sinusoïdes. On déduit des CLs que ω doit être de la forme $\omega_n = n\Pi$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour g, l'espace des solutions est de dimension 1, il s'agit d'une exponentielle décroissante, $x \mapsto Ce^{-\omega^2 t}$ (on applique l'équation de la chaleur pour trouver le ω^2, où on remarque et on utilise l'équation $\frac{g'}{g} = \lambda$ de la page précédente).

On a donc des solutions en u : $(x,t) \mapsto e^{-\omega_n^2 t} sin(\omega_n x)$. On note que les solutions sont un espace vectoriel. On a donc pour solution de l'équation de la chaleur et des CLs <u>au moins</u> (on n'a pas prouvé que c'étaient là les seules solutions) les combinaisons linéaires de solutions de cette forme. On va en fait considérer aussi les combinaisons linéaires infinies $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\omega_n^2 t} sin(\omega_n x)$, pourvu que la série $\sum a_n$ soit absolument convergente ; ainsi les théorèmes de dérivation sous le signe intégrale s'appliquent et la combinaison linéaire obtenue est bien une solution de l'équation.

On se préoccupe maintenant des CIs, en cherchant une solution combinaison linéaire des solutions trouvées ci-dessus.

On voudrait donc $h(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \sin(n\Pi x)$. On va donc décomposer h en série de Fourier. Pour cela on va choisir h impaire, pour n'avoir que des sinusoïdes.

Donc on définit h sur $[-1,0]$ par $h(-x) = -h(x)$. Ensuite on prolonge h par 2 périodicité. On a alors $h(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \sin(n\Pi x)$, avec convergence normale de la somme des a_n puisque h est C^1 (pas de problème en 0 ou en 1 car $h(0) = h(1) = 0$).

L'unicité de la solution ainsi obtenue ne sera pas détaillée ici ; voir [22, p103].

3.4.4 Equations à variables séparées

Définition 92 *On appelle* **équation à variables séparée** *une équation différentielle que l'on peut réécrire sous la forme*

$$x' = f(t)g(x)$$

• Si g s'annule en une valeur particulière x_p, alors la fonction constante $x = x_p$ est clairement solution particulière.

• L'équation peut se réécrire $\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$, et donc on obtient en intégrant chaque membre une expression de $\int 1/g$ en fonction de $\int f$. Il est clair que $\int 1/g$ est continue strictement monotone sur les intervalles sur lesquels $g(x)$ ne s'annule pas, et que donc on en déduit x en fonction de t en considérant l'inverse de $\int 1/g$. Par les résultats d'unicité si la condition initiale (t_0, x_0) est telle que $g(x_0) \neq 0$ alors par le lemme 70 (si les fonctions en jeu vérifient bien les conditions énoncées !) on a $\forall t, g(x(t)) \neq 0$ si x est une solution maximale (en effet en cas contraire x serait la fonction constante égale à x_p avec $g(x_p) = 0$), et donc on obtient bien ainsi des solutions maximales.

On trouvera dans [9] un exemple bien détaillé.

3.4.5 Equation de Bernoulli

Définition 93 *On appelle* **équation de Bernoulli** *une équation de la forme*

$$x' = p(t)x + q(t)x^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et p et q continues.

On se place sur les intervalles où x ne s'annule pas. On peut alors diviser par x^α, et poser $z = x^{1-\alpha}$, on obtient alors

$$\frac{dz}{dt} = (1-\alpha)(p(t)z + q(t))$$

équation linéaire en z, que l'on sait donc résoudre.

3.4.6 Equation de Ricatti (polynôme à coefficients dépendant de t de degré 2 en x)

Définition 94 *On appelle* **équation de Riccati** *une équation de la forme*

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

avec a, b et c trois fonctions continues.

N'ayant pas de solution magique, on choisit de supposer que l'on est capable d'exhiber une solution particulière x_p.

On pose alors $z = x - x_p$, et on obtient miraculeusement

$$z'(t) = [2a(t)x_p(t) + b(t)] \times z(t) + a(t)z^2(t)$$

On se ramène donc à un cas particulier d'équation de Bernoulli, que l'on résoud comme expliqué en 3.4.5.

3.4.7 Equations homogènes

Définition 95 *On appelle équation homogène une équation de la forme $x' = f(x/t)$, avec f C^0 d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Une telle équation se résoud classiquement en posant $y = x/t$; on se ramène alors à l'équation à variables séparées $y' = (f(y) - y)/t$, qui se résoud elle-même par la méthode exposée en partie 3.4.4. On a des solutions constantes de la forme $z = a$, soit $y = ax$, pour a vérifiant $f(a) = a$.

On montre facilement que l'image d'une solution par une homothétie est encore une solution (seul comptant le rapport x/t).

3.4.8 Equation de Lagrange

Définition 96 *L'équation de Lagrange est $x(t) = a(x'(t))t + b(x'(t))$, avec a et b des fonctions C^1.*

On la résoud de la manière suivante :

• chercher les solutions à x' constant sur un intervalle ; ce sont les $x' = c$, avec $a(c) = c$. Les solutions sont alors les $x = ct + b(c)$.

• poser $y = x'$, $t = g(x)$, pour chercher d'autres solutions. On obtient

$$\frac{dt}{dy} = \frac{a'(y)t + b'(y)}{y - a(y)}$$

qui est une équation différentielle linéaire en t.

Chapitre 4

Formes différentielles

Ce chapître a seulement pour but de fournir un cadre utile dans la vie de tous les jours, pour maîtriser les outils utiles pour s'attaquer à de nombreux théorèmes. L'intérêt n'étant pas d'épuiser les richesses des formes différentielles, de nombreuses définitions et de nombreux théorèmes seront donnés sans justification, notamment dans les fondements des formes différentielles, au niveau des propriétés d'algèbre multilinéaire.

4.1 Généralités, rappels sur les applications multilinéaires

4.1.1 Définition d'une forme différentielle

Tout de go, définissons tout d'abord ce qu'est une application différentielle :

Définition 97 *Soit U un ouvert de E un $\mathbb{R}$-espace de Banach, soit F un $\mathbb{R}$-espace de Banach.*
On appelle **forme différentielle de degré p sur U à valeurs dans F** *une application de U dans $\mathcal{A}_p(E;F)$* [a]*.*
La forme différentielle est dite de classe C^n si l'application est C_n (pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).
On note $\Omega_p^{(n)}(U,F)$ l'ensemble des p formes différentielles de U dans F de classe C^n.

[a] Espace des applications p-linéaires alternées continues de E dans F. Cet espace est un Banach, car c'est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}_p(E,F)$ (qui est un Banach comme chacun sait).

Exemples :

- Une application C^n de E dans F est une 0-forme différentielle de E dans F, de classe C^n.

- Si $n > 0$, sa différentielle est une forme 1-différentielle de classe C^{n-1}.

Nous allons définir plus loin de nombreuses opérations sur cet outil, mais tout d'abord nous devons rappeler certaines propriétés des applications multilinéaires.

4.1.2 Propriétés des applications multilinéaires

Définition 98 *Etant donnée une application ϕ bilinéaire de $F \times G$ dans H, on définit une* **multiplication d'applications p-linéaires alternées** *par :*

$$\mathcal{A}_p(E,F) \times \mathcal{A}_q(E,G) \to \mathcal{A}_{p+q}(E,H)$$

$$(f,g) \mapsto f \wedge_\phi g$$

définie par

$$(f \wedge_\phi g)(x_1, \dots, x_{p+q}) =$$

$$\sum_\sigma \epsilon(\sigma)\phi(f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}), g(x_{\sigma(p+1)}, x_{\sigma(p+2)}, \dots, x_{\sigma(p+q)}))$$

La sommation étant étendue à l'ensemble des permutations σ de $[1,n]$ telles que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(p+q)$.

Il conviendrait de montrer que $f \wedge_\phi g$ est bien $p+q$ linéaire, continue et alternée.

souvent on s'abstiendra de noter $\wedge_\phi$; on se contentera de $\wedge$. ϕ sera souvent implicitement l'application la plus intuitive ; par exemple si H et G sont égaux et si F est $\mathbb{R}$, on utilisera le produit d'un élément d'un Banach par un réel.

Proposition 99 (Propriété du produit d'applications multilinéaires) $\wedge_\phi$ *est bilinéaire.*

Proposition 100 (Propriétés du produit de formes multilinéaires) • *Si f appartient à $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$ et g appartient à $\mathcal{A}_q(E,\mathbb{R})$, alors $f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$*
• *Si f ppartient à $\mathcal{A}_p(E,\mathbb{R})$, g appartient à $\mathcal{A}_q(E,\mathbb{R})$ et h appartient à $\mathcal{A}_r(E,\mathbb{R})$, alors $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.*
• *Si les f_i sont des formes linéaires continues sur E (dans $\mathbb{R}$), pour $i \in [1,n]$, alors*

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \sigma^n} \epsilon(\sigma) f_i(x_{\sigma(i)}) = det\ (f_i(x_j))_{i,j}$$

Proposition 101 (Propriétés des application p-linéaires avec $\dim E = n$) *E est ici supposé isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*
Toute application p-linéaire de E dans F s'écrit de manière unique

$$x \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} \underbrace{c_{i_1,\ldots,i_p}}_{\in F} e^*_{i_1} \wedge e^*_{i_2} \wedge \ldots e^*_{i_p}$$

avec la famille des e^*_i la base duale de la base des e_i (base canonique de $\mathbb{R}^n$), c'est à dire que les e^*_i sont les formes qui donnent les coordonnées d'un point. En particulier, si $p = n$, l'application s'écrit $x \mapsto (e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge \cdots \wedge e^*_n)(x)c$, avec c un élément de F, et si $p > n$, l'application est nécéssairement nulle.

4.1.3 Application de tout ça aux formes différentielles

Définition 102 (Produit extérieur de formes différentielles) *U désigne un ouvert d'un espace de Banach E. F, G et H sont des espaces de Banach .*
On se donne ϕ une application bilinéaire de $F \times G$ dans H. On suppose que $f \in \Omega^{(n)}_p(U, F)$ et que $g \in \Omega^{(n)}_q(U, G)$.
On définit alors le **produit extérieur des formes différentielles** *f* **et** *g $f \wedge_\phi g \in \Omega^{(n)}_{p+q}(U, H)$ par*

$$f \wedge_\phi g : x \mapsto f(x) \wedge_\phi g(x)$$

La notation est abusive du fait que l'on garde la même notation que pour le produit d'applications multilinéaires. Là aussi on négligera souvent de préciser $\wedge_\phi$, et on gardera $\wedge$.

Exemple :

Si $F = G = H = \mathbb{R}$, ϕ est alors généralement implicitement le produit usuel. Alors le produit de formes différentielle est anticommutatif et associatif, et

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge w_n)(x)(h_1, \ldots, h_n) =$$

$$\sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) w_1(x)(h_{\sigma(1)}) w_2(x)(h_{\sigma(2)}) \ldots w_n(x)(h_{\sigma(n)}) = det\ (\omega_i(e_j)_{i,j})$$

Bibliographie

[1] P. BARBE, M. LEDOUX, *Probabilité*, BELIN, 1998.

[2] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, MASSON, 1983.

[3] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, FLEMMARD.

[4] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, V. MAILLOT, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 1*, MASSON, 1997.

[5] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2*, MASSON, 1995.

[6] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, MASSON, 1996.

[7] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, DUNOD, 1998.

[8] F. COMBES *Algèbre et géométrie*, BRÉAL, 1998. <

[9] J.-P. DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, PRESSES UNIVERSITAIRES DE GRENOBLE, 1996.

[10] W. GIORGI, *Thèmes mathématiques pour l'agrégation*, MASSON, 1998.

[11] A. GRAMAIN, *Intégration*, HERMANN 1988, PARIS.

[12] J.-L. KRIVINE, *Introduction to axiomatic set theory*, D. REIDEL PUBLISHING COMPANY, DORDRECHT-HOLLAND.

[13] S. LANG, *Real analysis*, ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1969.

[14] D. PERRIN, *Cours d'algèbre*, ELLIPSES 1996.

[15] A. POMMELLET, *Cours d'analyse*, ELLIPSES 1994.

[16] W. RUDIN, *Analyse réelle et complexe*, MASSON 1992.

[17] R. SMULLYAN, *Théorie de la récursion pour la métamathématique*, FLEMMARD.

[18] Y.G. SINAI *Probability theory - An introduction course*, SPRINGER TEXTBOOK, 1992.

[19] P. TAUVEL, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, MASSON, 1997.

[20] J. VAUTHIER, J.J. PRAT, *Cours d'analyse mathématiques de l'intégration*, MASSON, 1994.

[21] D. WILLIAMS, *Probability with martingales*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1991.

[22] C. ZUILY, H. QUEFFÉLEC, *Eléments d'analyse pour l'intégration*, MASSON, 1995.