Cours de Mathématiques 2
première partie : Analyse 2

DEUG MIAS 1^e année, 2^e semestre.

Maximilian F. Hasler

Département Scientifique Interfacultaire

B.P. 7209 — F–97275 SCHOELCHER CEDEX

Fax : 0596 72 73 62 — e-mail : `mhasler@univ-ag.fr`

version du 21 avril 2002

Table des matières

1 Fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^2$: courbes paramétrées

Définition 1 (et interprétation géométrique) *Soit $\mathcal{D}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.*
- *Une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2$ est appelée* **application vectorielle** *à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*
- *Les deux fonctions $x : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $y : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\forall t \in \mathcal{D} : f(t) = (x(t), y(t))$$

  sont appelées les applications **composantes** *de (ou : associées à) f.*
- *Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note $M(t)$ le point dont les coordonnées sont $f(t) = (x(t), y(t))$. Lorsque le* **paramètre** *t parcourt $\mathcal{D}$, le point $M(t)$ décrit un sous-ensemble du plan, appelé la* **courbe** *$\mathcal{C}$ de (ou : associée à) f.*
- *Le système d'équations*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathcal{D}$$

  est appelé une **représentation paramétrique** *de $\mathcal{C}$.*
  On dit alors que $\mathcal{C}$ est une courbe paramétrée.

1.1 Plan d'étude d'une courbe parametrée

On procède en 6 étapes, précisées ci-dessous :

1) Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}$ c'est à dire l'ensemble des points en lesquel les **deux** applications composantes x et y sont définis.

2) Recherche de périodes et symétries

1. Si $\exists T > 0 : \forall t \in \mathcal{D}, x(t) = x(t+T)$ et $y(t+T) = y(t)$, la fonction est t–périodique : on peut alors restreindre l'étude à l'intersection de $\mathcal{D}$ avec un intervalle de longueur T, et on obtient ainsi toute la courbe.
2. Si $\mathcal{D}$ est symétrique et on a une des symétries suivantes :
   (i) $\forall t \in \mathcal{D} : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x et y fcts paires de t),
   (ii) $\forall t \in \mathcal{D} : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ (x impaire et y paire),
   (iii) $\forall t \in \mathcal{D} : x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x paire et y impaire),
   (iv) $\forall t \in \mathcal{D} : x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ (x et y impaires),

   alors on restreint l'étude à $t \in \mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$, et on obtient toute la courbe
   (i) qui est parcourue 2 fois
   (ii) en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe y

(iii) en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'axe x
(iv) en complétant l'arc par une symétrie par rapport à l'origine O.

3) Rechercher les eventuelles branches infinies : voir chapitre 1.2

4) Faire un tableau de variations pour x et y, en étudiant les signes de x' et y'.

5) Etudier les points particuliers tels que points stationnaires (= singuliers), points doubles : voir chapitre 1.3

6) Tracer la courbe en s'aidant des résultats précédants, notamment en reportant aussi les points singuliers, tangentes et asymptotes.

1.2 Etude des branches infinies

Définition 2 *La courbe $\mathcal{C}$ présente une branche infinie (ou : un arc infini), si au moins une des coordonnées tend vers l'infini, pour $t \to t_0$, avec $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Les cas suivants sont possibles :

1. $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$: $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x = \ell$ comme asymptote verticale
2. $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \ell \in \mathbb{R}$: $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale
3. $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$: On étudie $\lim\limits_{t \to t_0} y(t)/x(t)$:
   (a) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, alors $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dans la direction $0y$

   (b) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, alors $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dans la direction $0x$

   (c) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a \neq 0$, on étudie la fonction $y - a.x$:
   - Si $\lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - a.x(t)) = b \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = a.x + b$ comme asymptote, et la position de $\mathcal{C}/\Delta$ dépend du signe de $y - a.x - b$. (On peut utiliser un $DL(t_0)$ pour le trouver.)
   - Si $\lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - a.x(t)) = \pm\infty$ alors $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = a.x$.
   - Si $y - a.x$ n'admet pas de limite, on ne sait pas conclure.

   (d) Si $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}$ n'admet pas de limite, on ne peut conclure sur la nature de l'arc infini.

1.3 Etude de points particuliers

Définition 3 *On suppose que $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont dérivables en t_0. Le vecteur $\vec{V}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t))$ est appelé le vecteur dérivée de f en t_0. On note aussi $\vec{V}'(t_0)$ par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM}(t_0)$.*

• *Si $\vec{V}'(t_0) \neq \vec{o}$, c'est à dire $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$, le point $M(t_0)$ est dit* **point ordinaire**. *La droite (T) de vecteur directeur $\vec{V}'(t_0)$ et passant par $M(t_0)$ est appelée tangente à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$.*
Une représentation paramétrique de T est donc donnée par

$$T : \begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0).(t - t_0) \\ y = y(t_0) + y'(t_0).(t - t_0) \end{cases} \quad t \in \mathcal{D} .$$

et on peut en déduire facilement une équation de la forme $y = m\,x + b$ (ou $x = x(t_0)$ si $x'(t_0) = 0$) en exprimant $(t - t_0)$ dans la deuxième équation en terme de x à l'aide de la première équation :

$$y = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) .$$

• *Si $\vec{V}'(t_0) = \vec{o}$, c'est à dire $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, alors le point $M(t_0)$ est dit* **stationnaire** *ou* **singulier**.

1.3.1 Etude en un point stationnaire $M(t_0)$.

On suppose que les fonctions x et y sont au plusieurs fois dérivables.

1. Si $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ et $(x''(t_0), y''(t_0)) \neq (0, 0)$: Dans ce cas, la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ est la droite qui passe par $M(t_0)$ de vecteur directeur le vecteur $\vec{V}''(t_0) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}M(t_0)$ de composantes $(x''(t_0), y''(t_0))$.
2. Si $\vec{V}'(t_0) = \vec{V}''(t_0) = \ldots = \vec{o}$, $\vec{V}^{(p)}(t_0) \neq \vec{o}$: On généralise le cas précédent. La tangente T à $\mathcal{C}$ en $M(t_0)$ est la droite qui passe par $M(t_0)$ et qui a comme vecteur directeur $\vec{V}^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$.

1.3.2 Position de $\mathcal{C}$ par rapport à T en un point $M(t_0)$

On designe par p le premier entier ≥ 0 tel que $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0)) \neq (0, 0)$:

$$p = \min\left\{p \in \mathbb{N}^* \mid \vec{V}^{(p)} \neq \vec{o}\right\}$$

et par q le premier entier strictement supérieur à p tel que les vecteurs $\vec{V}^{(p)}$ et $\vec{V}^{(q)}$ ne soient pas colinéaires. (On peut écrire

$$q = \min \left\{ q \in \mathbb{N}^* \mid \vec{V}^{(q)} \neq \lambda\, \vec{V}^{(p)}\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

car pour $q \leq p$ la dernière relation n'est pas satisfaite non plus.

Ecrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre q, c'est-à-dire le $DL_q(t_0)$:

$$(S)\ \begin{cases} x(t) = x(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\, x^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\, x^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\, \varepsilon_1(t) \\ y(t) = y(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\, y^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\, y^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\, \varepsilon_2(t) \end{cases}$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon_1(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon_2(t) = 0$.
En écrivant (S) sous forme vectorielle, il vient :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\, \vec{V}^{(p)}(t_0) + ... + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\, \vec{V}^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\, \vec{\varepsilon}(t)$$

Or, $\vec{V}^{(p+1)}(t_0), ..., \vec{V}^{(q-1)}(t_0)$ sont colinéaires à $\vec{V}^{(p)}(t_0)$, donc

$$\begin{aligned} f(t) =& f(t_0) + (t-t_0)^p \left[\frac{1}{p!} + \lambda_{p+1} \frac{t-t_0}{(p+1)!} + ... + \lambda_{q-1} \frac{(t-t_0)^{q-p-1}}{(q-1)!} \right] \vec{V}^{(p)}(t_0) \\ &+ \frac{(t-t_0)^q}{q!}\, \vec{V}^{(q)}(t_0) + (t-t_0)^q\, \vec{\varepsilon}(t) \end{aligned}$$

Etudions le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)\, M(t)}$ dans le repère $(M(t_0), \vec{V}^{(p)}(t_0), \vec{V}^{(q)}(t_0))$. Si $x_1(t)$ et $y_1(t)$ designent ses composantes dans cette base, on a les équivalences (au voisinage de t_0)

$$x_1(t) \underset{(t_0)}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \quad \text{et} \quad y_1(t) \underset{(t_0)}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

Selon la parité de p et de q, on a les résultats suivants :

Définition 4

1. *p pair et q impair : au voisinage de t_0, $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t)$ a le signe de $(t-t_0)$: $\mathcal{C}$ traverse la tangente T en $M(t_0)$, qui est un* **point de rebroussement de 1^e espèce**.
2. *p pair et q pair : au voisinage de t_0, $x_1(t) \geq 0$ et $y_1(t) \geq 0$, indépendamment du signe de $(t-t_0)$: $\mathcal{C}$ ne traverse pas la tangente T ; $M(t_0)$ est un point de rebroussement de 2^e espèce.*
3. *p impair et q pair : au voisinage de t_0, $x_1(t)$ change de signe et $y_1(t) \geq 0$: $\mathcal{C}$ touche la tangente T ; $M(t_0)$ est appele "méplat".*
4. *p impair et q impair : au voisinage de t_0, $x_1(t)$ et $y_1(t)$ changent de signe : $\mathcal{C}$ traverse la tangente T en $M(t_0)$, qui est appelé* **point d'inflexion**.

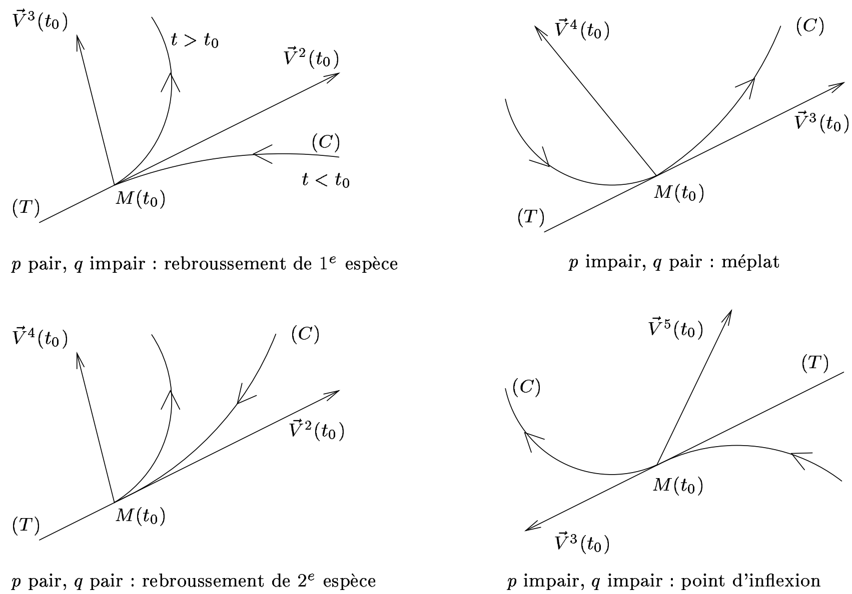

FIG. 2 – Exemples type des quatre natures de points (singuliers) possibles

1.3.3 Points doubles (ou multiples)

Définition 5 *S'il existe $t' \neq t$ tels que $M(t') = M(t)$, on dit que $M(t)$ est un point double (ou multiple).*

Pour trouver les points doubles, il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases}$$

avec $t' \neq t$. (C'est en général un calcul assez lourd... !)

1.4 Etude d'un exemple

Etudions la courbe $\mathcal{C}$ définie par $\begin{cases} x = t^2 + \frac{2}{t} \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

1. Domaine de définition : x et y sont définis sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. Recherche de symétries : il n'y a pas de symétries évidentes. (y est paire mais x n'a pas de parité définie.)

3. Etude de branches infinies.
   (a) $t \to \pm\infty$: On a $x \to +\infty$ et $y \to +\infty$, il faut donc étudier $\frac{y}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$, et $y(t) - 1.x(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} = 0$: La droite d'équation $\Delta : y = x$ est asymptote à la courbe pour les deux arcs infinis $t \to \pm\infty$.
   (b) $t \to 0$: On a $y \sim \frac{1}{t^2} \to +\infty$ et $x \sim \frac{2}{t} \underset{t\to 0\pm}{\longrightarrow} \pm\infty$ (selon la signe de t). On étudie donc $\frac{y}{x} \sim_0 \frac{t}{2t^2} = \frac{1}{2t} \to \pm\infty$, on a donc deux branches parabolique de direction (Oy) en $t = 0$
4. étude du signe de x' et y' :

$$\begin{cases} x'(t) = 2\,t - \frac{2}{t^2} = \frac{2}{t^2}\left(t^3 - 1\right) = \frac{2}{t^2}\,(t-1)\left(t^2+t+1\right) \\ y'(t) = 2\,t - \frac{2}{t^3} = \frac{2}{t^3}\left(t^4 - 1\right) = \frac{2}{t^3}\left(t^2+1\right)(t-1)\,(t+1) \end{cases}$$

   donc x' a le signe de $t-1$ et y' a le signe de $t(t^2-1)$:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	$\Vert$		$-$ 0 $+$		
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

5. étude en $t = 1$
   $x'(1) = y'(1) = 0 \Longrightarrow M(1) : (3,2)$ est un point stationnaire.
   Calculons les derivées successives de x et y en $t = 1$ pour connaître le vecteur directeur de la tangente et la nature du point :

$$\begin{cases} x''(t) = 2 + \frac{4}{t^3} \\ y''(t) = 2 + \frac{6}{t^4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x''(1) = 6 \\ y''(1) = 8 \end{cases}$$

   Donc $\vec{V}''(1) = (6,8) \neq \vec{0} \Longrightarrow \mathcal{C}$ admet une tangente en $M(1) : (3,2)$ de vecteur directeur $\vec{V}''(1) = (6,8)$.
   (Son équation est donc $T : y = \frac{8}{6}(x-3) + 2 = \frac{4}{3}x - 2$.)
   Nature du point :

$$\begin{cases} x'''(t) = -\frac{12}{t^4} \\ y'''(t) = -\frac{24}{t^5} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'''(1) = -12 \\ y'''(1) = -24 \end{cases}$$

   $\vec{V}'''(1) = (-12,-24)$ est non colinéaire à $\vec{V}''(1) = (6,8)$, on est donc dans le cas $p = 2, q = 3$, c'est-à-dire le point $M(1) : (3,2)$ est un pt de rebroussement de 1^e espèce.
6. recherche de points doubles :
   cherchons $t' \neq t$ tel que $M(t') = M(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x(t') = x(t) \\ y(t') = y(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} {t'}^2 + \frac{2}{t'} = t^2 + \frac{2}{t} \\ {t'}^2 + \frac{2}{t'^2} = t^2 + \frac{2}{t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} {t'}^2 - t^2 = \frac{2}{t} - \frac{2}{t'} = 2\frac{t'-t}{t\,t'} \\ {t'}^2 - t^2 = \frac{2}{t^2} - \frac{2}{{t'}^2} = 2\frac{{t'}^2-t^2}{{t'}^2\,t^2} \end{cases} \iff \begin{cases} t' + t = \frac{2}{t\,t'} \\ 1 = \frac{1}{t^2\,{t'}^2} \end{cases}$$

car $t \neq t'$. Donc

$$\begin{cases} t\,t' = \pm 1 \\ t + t' = \pm 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = \pm\frac{1}{t} \\ t^2 \mp 2t \pm 1 = 0 \end{cases}$$

Le premier choix de signes est à exclure car il correspond à $(t-1)^2 = 0$, soit $t = 1 = t'$. Donc t, t' sont les solutions à $t^2 + 2t - 1 = 0$, soit $t = -1 + \sqrt{2}$ et $t' = -1 - \sqrt{2}$.

Le point double est donc $M(t) = M(t') = (5, 6)$.

7. Tracé de la courbe : (cf. figure ci-dessous)
on reporte les asymptotes, le pt. stationnaire avec sa tangente. En partant de $-\infty$, au dessus de l'asymptote, on rejoint le pt. $(-1, 2)$ avec une tangente horizontale, puis on repart pour $t \to 0-$ vers $x = -\infty$, $y = +\infty$ (brache parabolique de direction Oy) (pour $x = -10, y \approx 25$).

   Pour t au voisinage de $+\infty$, on vient de en-dessous de l'asymptote $y = x$, et on rejoint le pt. singulier $(3, 2)$ avec la tangente de vecteur directeur $(6, 8)$, puis on repart de l'autre coté de cette tangente, en passant par le pt. double (5,6), pour la branche parabolique de direction Oy, quand $t \to 0+$ (pour $x = 10, y \approx 25$).

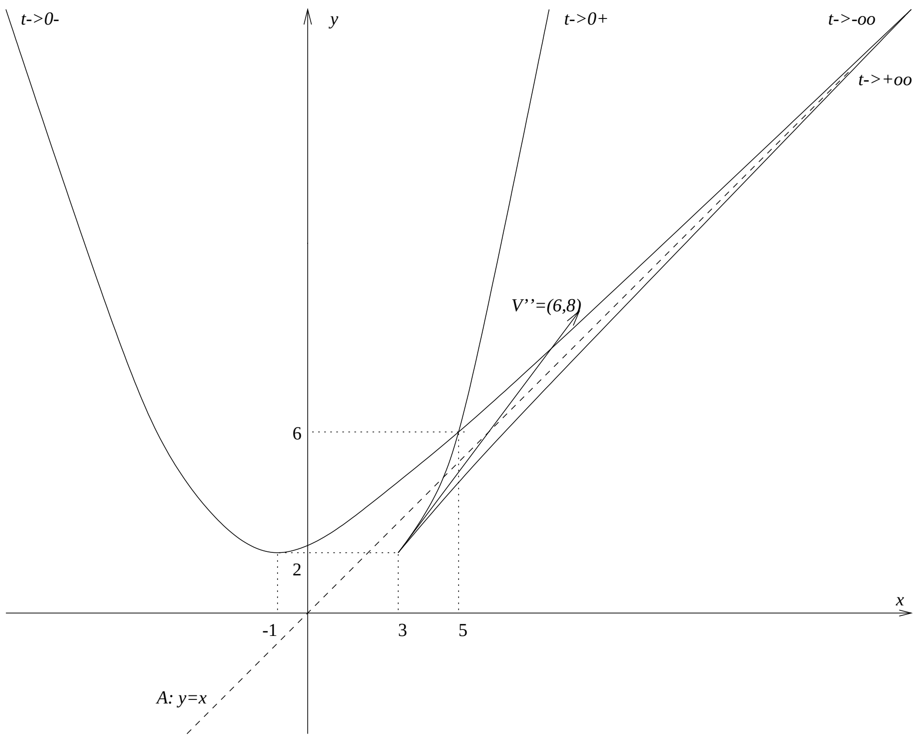

FIG. 1 – Graphe de la courbe étudiée, avec l'asymptote $y = x$ et le vecteur directeur de la tangente en le point de rebroussement.