ETUDE SUR LES EQUIPARTITIONS D'UN ENSEMBLE

Guy PHILIPPE

13 septembre 2003

Prérequis :
On suppose connus les résultats basiques de la théorie des ensembles ZFC qui correspondent aux 2 premiers chapitres du livre de J-L Krivine comme la trichotomie des cardinaux, à savoir, pour les cardinaux de 2 ensembles A et B quelconques on a soit $card(A) < card(B)$, soit $card(A) = card(B)$, soit $card(A) > card(B)$ où $card(A) \leqslant card(B)$ veut dire qu'il existe une injection de A dans B. La relation $\leqslant$ dans la collection des cardinaux (ce n'est pas un ensemble) est trivialement réflexive,transitive et elle est antisymétrique grâce au théorème de Cantor-Bernstein (voir la preuve dans la banque d'exercices du site) ; on dira que c'est une relation d'ordre dans la collection des cardinaux et cet ordre est total en vertu de la trichotomie.
Un autre résultat basique (difficile) sera utilisé fréquemment à savoir $card(E^n) = card(E)$ si E est INFINI et n un entier non nul. Penser aux cas particuliers $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ qui est équipotent à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ qui est équipotent à $\mathbb{R}$ que l'on peut prouver directement ou à la courbe de Peano.
On rappelle que l'addition et la multiplication de 2 cardinaux sont ainsi définies : $card(A) + card(B)$ =le cardinal de la réunion de 2 ensembles disjoints équipotents respectivement à A et B par exemple $card(\{0\}\text{x}A \bigcup \{1\}\text{x}B)$ et $card(A)\text{x}card(B) = card(A\text{x}B)$.

définition : on appellera équipartition d'un ensemble $E \neq \emptyset$ toute partition en parties de même cardinal ; si ce cardinal est c on dira que c'est une c-équipartition.
Il est clair que si E est fini de cardinal n les seules c-équipartitions π possibles sont celles où c divise n et alors on a $card(\pi).c = card(E)$ i.e. "nombre d'éléments d'une partie multiplié par nombre de parties est égal au nombre d'éléments de E". On verra dans la suite que cette égalité sera encore vraie si E est un ensemble infini, on dira que c'est le **principe des équipartitions**.

Théorème 1

Pour tout ensemble infini E et tout cardinal non nul $c \leqslant card(E)$, E admet une c-équipartition.
Dans la suite **le signe + entre 2 ensembles désignera la réunion disjointe** et on utilisera **le principe de trichotomie** qui est une conséquence de la théorie des ordinaux.
Remarquons que si $c > card(E)$ alors E n'admet pas de c-équipartition sinon soit π une telle c-équipartition de E, alors pour $A \in \pi$ on aurait $card(A) = c > card(E)$ or $A \subset E$ d'où on aurait $card(A) \leqslant card(E)$ et ainsi la trichotomie serait contredite.

Commençons par prouver 2 lemmes.
• Lemme 1 : $card(A) + card(A) = card(A)$ pour tout ensemble A infini
• Lemme 2 : si A et B sont 2 ensembles dont l'un est infini et l'autre non vide alors le produit des cardinaux de A et B est égal au plus grand des deux.
Preuve du lemme 1. L'application $Aa \mapsto (0, a) \in \{0\}\text{x}A+\{1\}\text{x}A$ est clairement injective donc $card(A) \leqslant card(\{0\}\text{x}A+\{1\}\text{x}A) = card(\{0\}\text{x}A) + card(\{1\}\text{x}A) = card(A) + card(A)$.
De plus, si a_1 et a_2 sont 2 éléments distincts de A on a $card(A) + card(A) = card(\{a_1\}\text{x}A) + card(\{a_2\}\text{x}A) = card(\{a_1\}\text{x}A+\{a_2\}\text{x}A) = card(\{a_1, a_2\}\text{x}A) \leqslant card(A\text{x}A)$ vu que $\{a_1, a_2\}\text{x}A \subset A\text{x}A$ et donc $card(A)+card(A) \leqslant card(A)$ compte tenu de $card(A\text{x}A) = card(A)$. Finalement on a bien $card(A) + card(A) = card(A)$.
Preuve du lemme 2. Comme $card(A\text{x}B) = card(B\text{x}A)$ le rôle de A et B est symétrique, on peut donc se contenter de la preuve dans le cas où on suppose B infini et $A \neq \emptyset$.
• Si $card(A) \leqslant card(B)$ alors il existe une injection de A dans B d'où $i(A)$ est équipotent à A et $i(A) \subset B$ d'où $A\text{x}B$ est équipotent à $i(A)\text{x}B \subset B\text{x}B$, par suite $card(i(A)\text{x}B) = card(A\text{x}B) \leqslant card(B\text{x}B) = card(B)$ et donc $card(A\text{x}B) \leqslant card(B)$.
De plus $A \neq \emptyset$, soit $a \in A$ alors l'application $Bx \mapsto (a, x) \in A\text{x}B$ est injective d'où $card(B) \leqslant card(A\text{x}B)$ et finalement $card(A)\text{x}card(B) = card(A\text{x}B) = card(B) = Max(card(A), card(B))$.
• Si $card(B) \leqslant card(A)$ alors il existe une injection $i : B \mapsto A$ d'où B est équipotent à $i(B) \subset A$ et ainsi $B\text{x}A$ est équipotent à $i(B)\text{x}A \subset A\text{x}A$. Par conséquent $card(B)\text{x}card(A) = card(B\text{x}A) = card(i(B)\text{x}A) \leqslant card(A\text{x}A) = card(A)$ soit $card(A\text{x}B) \leqslant card(A)$.
De plus B est infini, fixons un élément b de B. Alors l'application $Aa \mapsto (b, a) \in B\text{x}A$ est clairement injective et ainsi on a $card(A) \leqslant card(B\text{x}A) = card(A\text{x}B)$. Finalement on a bien $card(A)\text{x}card(B) = card(A\text{x}B) = card(A) = Max(card(A), card(B))$.

Preuve du théorème 1 (cette preuve simple et élégante est due à Labib Haddad)
Comme $c \leqslant card(E)$ si H est un ensemble de cardinal c il existe une injection $i : H \mapsto E$ d'où $i(H)$ est équipotent à H et si on pose $F = i(H)$ on a $F \subset E$ avec $card(F) = c$. De plus $F \neq \emptyset$ vu que c est non nul.
Du lemme 2 on tire $card(E\text{x}F) = Max(card(E), card(F)) = card(E)$ vu que E est infini et $F \neq \emptyset$. Donc il existe une

bijection de ExF sur E. Or les ensembles $\{a\}$xF pour a parcourant E forment une c-équipartition de ExF transformée par la bijection en une c-équipartition de E. CQFD.
Si un ensemble fini E admet une c-équipartition π alors on a $card(\pi)\text{x}c = card(E)$, c étant bien sûr un cardinal fini. Mais un ensemble fini E n'admet pas toujours une c-équipartition pour tout cardinal non nul $c \leqslant card(E)$. Par exemple un ensemble ayant pour cardinal 15 n'admet pas de 4-équipartition.
Par contre un ensemble infini E, pour tout cardinal non nul $c \leqslant card(E)$, admet une c-équipartition π (théorème 1) et on a encore $card(\pi)\text{x}c = card(E)$ comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2

E étant un ensemble infini, c un cardinal non nul avec $c \leqslant card(E)$ et π une c-équipartition de E on a :
1) $card(\pi)\text{x}c = card(E)$
2) Si $0 < c < card(E)$ alors toutes les c-équipartitions sont équipotentes à E

Preuve du théorème 2

1) Comme $c \leqslant card(E)$ on a déjà vu qu'alors il existe $F \subset E$ tel que $Card(F) = c$. Pour tout $A \in \pi$ notons β_A l'ensemble des bijections de A dans F et $\epsilon = \bigcup_{A\in\pi} \beta_A$. Notons que $\forall A \in \pi \quad \beta_A \neq \emptyset$ vu que $card(A) = c = card(F)$. Appliquons l'axiome du choix ; soit ϕ une fonction de choix définie par $\mathcal{P}(\epsilon) - \emptyset M \mapsto \phi(M) \in \epsilon$ avec $\phi(M) \in M$. Or $\forall A \in \pi \quad \beta_A \in \mathcal{P}(\epsilon) - \emptyset$ d'où $\phi(\beta_A) \in \beta_A$. Donc $\forall A \in \pi$ on peut choisir la bijection $\phi(\beta_A) \in \beta_A$ qu'on notera pour simplifier φ_A . Dès lors l'application $Ex \mapsto (A_x, \varphi_{A_x}(x)) \in \pi\text{x}F$ où A_x désigne l'unique élément de π qui contient x, est une bijection car $(A_x, \varphi_{A_x}(x)) = (A_y, \varphi_{A_y}(y)) \Longrightarrow A_x = A_y$ et $\varphi_{A_x}(x) = \varphi_{A_y}(y)$ d'où $\varphi_{A_x}(x) = \varphi_{A_x}(y) \Longrightarrow x = y$ vu que φ_{A_x} est une bijection de A_x sur F. Voilà pour l'injectivité. De plus $\forall(A, b) \in \pi\text{x}F$ posons $a = \varphi_A^{-1}(b)$ donc $a \in A$ et ainsi $A = A_a$ d'où $\varphi_{A_a}(a) = \varphi_A(a) = b$ et la surjectivité est prouvée vu que $a \mapsto (A_a, \varphi_{A_a}(a)) = (A, b)$. Finalement on a bien E et πxF qui sont équipotents et donc $card(\pi\text{x}F) = card(E)$ ou encore $card(\pi)\text{x}card(F) = card(\pi)\text{x}c = card(E)$.

2) On suppose donc que $0 < c < card(E)$ et que $F \subset E$ avec $card(F) = c$. D'après le 1) on sait que si π est une c-équipartition de E on a $card(\pi)\text{x}card(F) = card(E)$ d'où π ou F est nécessairement infini et l'autre n'est pas vide, on peut donc appliquer lemme 2 et ainsi $card(E) = card(\pi)\text{x}card(F) = Max(card(\pi), card(F)) = card(\pi)$ sinon on aurait $card(E) = Max(card(\pi), card(F)) = card(F) = c$ d'où une contradiction. On a bien prouvé que pour $0 < c < card(E)$ toutes les c-équipartitions de E sont équipotentes à E.
Remarque : si $c = card(E)$ alors il existe encore des c-équipartitions de E mais elles ne sont plus nécessairement équipotentes à E comme le prouve l'exemple suivant avec $E = \mathbb{N}$, $c = card(\mathbb{N})$ et les c-équipartitions $\pi_1 = \{\mathbb{N}\}$, $\pi_2 = \{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1\}$, $\pi_3 = \{3\mathbb{N}, 3\mathbb{N} + 1, 3\mathbb{N} + 2\}$.

On a bien démontré le **principe des équipartitions** à savoir : pour tout équipartition π d'un ensemble E (fini ou infini) en parties toutes de même cardinal c on a $card(\pi)\text{x}c = card(E)$ c'est à dire en langage plus imagé le "nombre" d'éléments d'un ensemble équipartitionné est égal au "nombre" d'éléments d'une partie multiplié par le "nombre" de parties. En plus si $0 < c < card(E)$ alors les c-équipartitions sont toutes équipotentes deux à deux et même, si E est infini, toutes équipotentes à E.

Comme application on va montrer que l'on peut attribuer une parité aux cardinaux transfinis. L'idée de départ est que le cardinal d'un ensemble non vide FINI (i.e. un entier non nul) est pair si et seulement si cet ensemble admet une partition en paires i.e. une 2-équipartition. il est clair qu'une bijection transforme une 2-équipartition en une 2-équipartition ce qui permet de définir un cardinal transfini pair.
Définition : un cardinal fini ou infini non nul sera dit pair si et seulement si un ensemble qui le représente admet une 2-équipartition. Dans le cas contraire le cardinal sera dit impair. Il est clair que cette définition ne dépend pas du représentant choisi.

théorème 3

Tout cardinal transfini est pair

En effet si E est un ensemble qui représente ce cardinal transfini alors E est infini et comme $0 < 2 \leqslant card(E)$ d'après le théorème 1 il admet une 2-équipartition, donc ce cardinal est bien pair.
Par conséquent tout ensemble infini E admet un dérangement involutif f. Il suffit de se donner une 2-équipartition π et définir f pour tout $x \in E$ par $f(x) =$ l'autre élément de la paire unique de π qui contient x.

Pour me contacter $\rightsquigarrow$guyphilippe2@aol.com