# DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.*

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

**Notations et objectif du problème**

Soient $N$ et $M$ deux entiers supérieurs ou égaux à $1$. Soit $p$ un réel de $]0,1[$. On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{N}^2$ :

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{N}^2 : 0 \le x \le N-1 \ , 0 \le y \le M-1 \} ;$$

$$F_1 = \{ (x, M) : 0 \le x \le N-1 \} ; F_2 = \{ (N, y) : 0 \le y \le M-1 \} ;$$

$$F = F_1 \cup F_2 \cup \{(N, M)\} \quad \text{et} \quad \overline{R} = R \cup F .$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f$ définies sur $\overline{R}$, à valeurs réelles, vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$(*) \ \forall (l, k) \in R \ , \ f(l, k) = p \ f(l+1, k) + (1-p) \ f(l, k+1) .$$

Après une première partie consacrée à des résultats préliminaires, nous recherchons (partie II) les éléments de $\mathcal{E}$. Dans la partie III nous donnons une interprétation probabiliste de certains éléments de $\mathcal{E}$. Enfin dans la partie IV, indépendante de la partie III, nous donnons une autre façon de résoudre l'équation fonctionnelle $(*)$.

Dans tout le problème, pour deux entiers naturels $\mu$ et $\nu$ vérifiant $0 \le \mu \le \nu$, on notera $C_\mu^\nu = \mu! / \nu! \, (\mu-\nu)!$ le coefficient binomial de paramètres $\mu$ et $\nu$.

## I Préliminaires.

### A) Quotients des divisions suivant les puissances croissantes du polynôme 1 par le polynôme $(1-x)^{s+1}$.

On se propose, les entiers $r$ et $s$ étant donnés ($r \ge 1$ et $s \ge 0$), de déterminer deux polynômes $U$ et $V$ de l'indéterminée $x$ vérifiant les propriétés suivantes :

*i)* le polynôme $U$ est de degré strictement inférieur à $r$

*ii)* $U$ et $V$ satisfont à la relation $(1-x)^{s+1} U + x^r V = 1$.

I.1 Soit $f$ la fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. L'entier $m$ $(m \ge 0)$ étant donné, déterminer $f^{(m)}$, dérivée d'ordre $m$ de la fonction $f$. On convient que $f^{(0)} = f$.

I.2 a) Donner le développement en série entière de la fonction $f$, en précisant l'intervalle de validité de ce développement.

b) En déduire (en le justifiant), pour $m \geq 1$, le développement en série entière de la fraction rationnelle $\frac{1}{(1-x)^{m+1}}$. Préciser l'intervalle de validité de ce développement.

$I.3$ Etude d'un cas particulier.

On suppose dans cette question que $s = 0$, $r$ restant un entier supérieur ou égal à 1.

$a)$ En utilisant une expression de la somme $1 + x + x^2 + \ldots + x^{r-1}$, déterminer un couple de polynômes $(U, V)$ vérifiant les propriétés $i)$ et $ii)$.

$b)$ Retrouver le résultat obtenu en utilisant le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$.

$I.4$ Etude du cas général.

Montrer qu'il existe un unique couple $(U, V)$ de polynômes vérifiant les propriétés $i)$ et $ii)$. Expliciter le polynôme $U$. (On pourra utiliser le développement trouvé en $I.2.b$).

B) **Matrices nilpotentes.**

Soit $d$ un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_d$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels, à $d$ lignes et $d$ colonnes. Si A est un élément de $\mathcal{M}_d$ et $i$, $j$ deux entiers de $\{1, \ldots, d\}$, on note $A(i, j)$ le coefficient de la matrice A situé à la $i$-ième ligne et à la $j$-ième colonne. On appelle $I_d$ la matrice identité de $\mathcal{M}_d$. On pose :

$$A^0 = I_d \ , \ A^1 = A \quad \text{et pour tout entier } k \geq 2, \ A^k = A\,A^{k-1}.$$

Une matrice $A$ de $\mathcal{M}_d$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$ ; le plus petit entier $r \geq 1$ vérifiant $A^r = 0$ est alors appelé l'*ordre* de nilpotence de $A$.

On suppose désormais que $A$ est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_d$, nilpotente d'ordre $r$.

$I.5$ Montrer que zéro est la seule valeur propre complexe de la matrice $A$. Quel est le polynôme caractéristique de $A$ ? En déduire que $r \leq d$.

$I.6$ On désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d$ engendré par les matrices $\{A^k \,;\, k \geq 0\}$. Montrer que $b = \{I_d, A, \ldots, A^{r-1}\}$ est une base de $e(A)$.

$I.7$ Soit $s$ un élément de $\mathbb{N}$.

$a)$ Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$ ; donner ses coordonnées dans la base $b$.

$b)$ Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ est inversible et que son inverse, notée $(I_d - A)^{-(s+1)}$, est égale à $\sum_{0 \leq k \leq r-1} C_{s+k}^{s} A^k$. ( On pourra utiliser la question $I.4$ ).

$I.8$ Exemple.

On appelle $J_d$ la matrice d'ordre $d$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, \ldots, d\}^2 \;,\; J_d(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j - i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Pour $k \geq 2$, calculer la puissance $k$–ième de la matrice $J_d$. En déduire que $J_d$ est une matrice nilpotente et préciser son ordre de nilpotence.

b) Pour $s \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, expliciter la matrice $(I_d - \lambda J_d)^{-(s+1)}$.

## II Résolution matricielle de l'équation fonctionnelle (*).

Si $f$ est une fonction sur $\overline{R}$, à valeurs réelles, on note $M(f)$ la matrice à $(N+1)$ lignes et $(M+1)$ colonnes définie par :

$$M(f) = \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,M) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,M) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(N,0) & f(N,1) & \cdots & f(N,M) \end{bmatrix}$$

Pour $k$ et $l$ entiers vérifiant $0 \leq k \leq M$ et $0 \leq l \leq N$, on pose :

$$C_k(f) = \begin{bmatrix} f(0, k) \\ f(1, k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(N, k) \end{bmatrix}$$

et $$L_l(f) = [\, f(l, 0) \quad f(l, 1) \quad \ldots \quad f(l, M) \,] \; .$$

Autrement dit $C_k(f)$ est le $(k+1)$-ième vecteur colonne et $L_l(f)$ le $(l+1)$-ième vecteur ligne de la matrice $M(f)$.

## A) Etude de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ .

On rappelle que $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des fonctions $f$ définies sur $\overline{R}$ , à valeurs réelles et vérifiant l'équation fonctionnelle $(*)$ .

*II*.1 Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\overline{R}$ à valeurs réelles .

*II*.2 *a*) Soit $k$ un entier vérifiant $0 \leq k \leq M-1$. Si $f \in \mathcal{E}$ , montrer que la matrice colonne $C_k(f)$ est déterminée de façon unique par la donnée de la matrice colonne $C_{k+1}(f)$ et du réel $f(N, k)$ .

*b*) En déduire que tout élément $f$ de $\mathcal{E}$ est déterminé de façon unique par la donnée des valeurs $\{ f(l, M) ; 0 \leq l \leq N \}$ et $\{ f(N, k) ; 0 \leq k \leq M-1 \}$ ; autrement dit *tout élément $f$ de $\mathcal{E}$ est déterminé de façon unique par sa restriction à $F$* .

Pour tout entier $i$ vérifiant $0 \leq i < N$, on désigne par $\varphi_i$ l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l, k) \in F, \; \varphi_i(l, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (l, k) = (i, M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout entier $j$ vérifiant $0 \leq j < M$ , on désigne par $\psi_j$ l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \psi_j(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (l,k) = (N,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, on note $\xi$ l'unique élément de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\forall (l,k) \in F,\ \xi(l,k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (l,k) = (N,M) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

*II*.3 Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1}, \xi, \psi_0, \dots, \psi_{M-1})$ est une base de $\mathcal{E}$.

*II*.4 Déterminer l'élément $\xi$ de $\mathcal{E}$ en explicitant la matrice $M(\xi)$.

**B) Calcul des fonctions $\varphi_i$ et $\psi_j$.**

Soient $i$ et $j$ deux entiers vérifiant $0 \leq i < N$ et $0 \leq j < M$.

*II*.5 *a*) En conservant les notations $I_d$ et $J_d$ de la partie I.B, pour $d = N+1$ (resp. $d = M+1$), montrer que, pour tout entier $k$ vérifiant $0 \leqslant k < M$ et pour tout entier $l$ vérifiant $0 \leqslant l < N$, on a :

$$(1-p)\ C_{k+1}(\varphi_i) = (I_{N+1} - p\, J_{N+1})\ C_k(\varphi_i)$$

et

$$p\ L_{l+1}(\psi_j) = L_l(\psi_j)\ (I_{M+1} - (1-p)\, {}^tJ_{M+1}),$$

où ${}^tJ_{M+1}$ désigne la transposée de la matrice $J_{M+1}$.

*b*) A l'aide de *I*.8 expliciter alors, pour tout élément $(l, k)$ de $R$, les valeurs de $\varphi_i(l, k)$ et $\psi_j(l, k)$.

## III Interprétation probabiliste des fonctions $\varphi_i$ et $\psi_j$.

On considère dans $\mathbb{N}^2$ *la marche aléatoire* d'un point mobile $m$ qui ne peut occuper à des instants définis par les entiers $n$ ($n \in \mathbb{N}$) que des positions $(x, y)$ du plan à coordonnées entières ($(x, y) \in \mathbb{N}^2$). Cette marche aléatoire de $m$ est soumise aux règles suivantes :

– Si à l'instant $n$, le point $m$ se trouve au point $(x, y)$ de $\mathbb{N}^2$, il occupe, à l'instant $n+1$, soit la position $(x+1, y)$ (déplacement horizontal) avec la probabilité $p$, soit la position $(x, y+1)$ (déplacement vertical) avec la probabilité $q = 1-p$.

– Le déplacement de $m$ effectué à un instant $n$ à partir de la position $(x, y)$ est indépendant de l'instant $n$, de la position $(x, y)$ et des positions antérieures.

Il est clair que, partant d'un point de $R$, la marche aléatoire amène, à un certain instant $n_0$, le mobile $m$ à occuper une position $(u, v)$ appartenant à la "frontière" $F_1 \cup F_2$. Si, à tout instant $n < n_0$, la position occupée par $m$ est un point de $R$, on dit que la marche aléatoire atteint pour la première fois $F_1 \cup F_2$ au point $(u, v)$.

Pour tous éléments $(l, k)$ de $R$ et $(u, v)$ de $F_1 \cup F_2$, on désigne par $A(l, k; u, v)$ l'événement " la marche aléatoire partant du point $(l, k)$ de $R$ atteint pour la première fois $F_1 \cup F_2$ au point $(u, v)$ ". On se propose de calculer la probabilité de cet événement.

## A) Modélisation de la marche aléatoire partant de (0, 0).

Toutes les variables aléatoires considérées dans la suite sont supposées être définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Soient $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi de Bernoulli de paramètre $p$. On pose:

$$X_0 = Y_0 = 0 \quad ;$$

$$\forall n \geq 1, \; X_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n \text{ et } Y_n = (1-U_1) + (1-U_2) + \ldots + (1-U_n).$$

*III*.1 Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1.

a) Donner les lois des variables aléatoires $X_n$ et $Y_n$.

b) Déterminer la loi du couple $(X_n, Y_n)$.

*III*.2 Soit $(l, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\mathbb{P}[(X_n, Y_n) = (l, k)] > 0$. Suivant les valeurs de $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}[(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (x, y) \mid (X_n, Y_n) = (l, k)]$$

**B) Calcul des probabilités $\mathbb{P}[A(0,0;i,M)]$ et $\mathbb{P}[A(0,0;N,j)]$.**

On considère les variables aléatoires $T, X_T, Y_T$ qui associent, à tout élément $\omega$ de $\Omega$, les nombres réels :

$$T(\omega) = inf\{n \geq 1 \,;\, (X_n(\omega), Y_n(\omega)) \in F_1 \cup F_2\} \,;$$

$$X_T(\omega) = \sum_{1 \leq k \leq T(\omega)} U_k(\omega) \quad \text{et} \quad Y_T(\omega) = \sum_{1 \leq k \leq T(\omega)} (1 - U_k(\omega)) \,.$$

(On admettra que $T, X_T, Y_T$ sont bien des variables aléatoires ).

*III.3* Montrer que, pour tout $\omega$ élément de $\Omega$, $T(\omega) \leqslant N + M - 1$.

*III.4* *a)* Montrer que, pour tout $\omega$ élément de $\Omega$ et tout entier $i$ vérifiant $0 \leqslant i < N$,

$$(X_T(\omega), Y_T(\omega)) = (i, M) \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{1 \leq k \leq i+M-1} (1 - U_k(\omega)) = M - 1 \\ \\ U_{i+M}(\omega) = 0 \end{cases}$$

*b)* En déduire la probabilité $\mathbb{P}[A(0,0;i,M)]$ et comparer cette valeur à $\varphi_i(0,0)$.

*III.5* *a)* De façon analogue, pour tout entier $j$ vérifiant $0 \leq j < M$, exprimer l'événement $\{(X_T, Y_T) = (N, j)\}$ à l'aide des variables aléatoires $(U_k)_{k \geq 1}$.

*b)* En déduire la probabilité $\mathbb{P}[A(0,0;N,j)]$ et comparer cette valeur à $\psi_j(0,0)$.

*c)* Calculer l'espérance de la variable aléatoire $T$ en fonction des réels $\varphi_i(0,0)$ avec $0 \leq i < N$ et $\psi_j(0,0)$ avec $0 \leq j < M$.

**C) Calcul des probabilités $\mathbb{P}[A(l,k;i,M)]$ et $\mathbb{P}[A(l,k;N,j)]$.**

Soient $i$ et $j$ deux entiers vérifiant $0 \leq i < N$ et $0 \leq j < M$.

*III.6* A l'aide d'un argument simple, déduire les probabilités $\mathbb{P}[A(l,k;i,M)]$ et $\mathbb{P}[A(l,k;N,j)]$ des probabilités calculées précédemment.

**D) Application .**

Une épreuve entre deux joueurs $A$ et $B$ conduit au résultat suivant : $A$ est gagnant avec la probabilité $p$ et $B$ est gagnant avec la probabilité $q = 1 - p$ .

Les deux joueurs s'affrontent au cours d'un jeu qui consiste en une répétition d'épreuves indépendantes . Le joueur $A$ doit obtenir $N$ victoires ; le joueur $B$ , $M$ victoires . Le gagnant est celui qui le premier atteint son objectif .

*III*.7 *a*) Comment peut-on modéliser ce jeu ?

*b*) Montrer que la probabilité $p_A(N, M)$ de gagner du joueur $A$ est donnée par :

$$(**) \quad p_A(N, M) = p^N \sum_{0 \le j \le M-1} C_{N-1+j}^{N-1} \; q^j$$

*III*.8 Application numérique . On prend $p = 0{,}6$ et $N = 6$ .

*a*) En précisant l'organisation des calculs , trouver $M$ pour que le jeu soit le plus équitable possible (c'est-à-dire pour que $p_A(N, M)$ soit le plus proche possible de $1/2$ ) .

*b*) Interprétation de l'espérance mathématique de la variable aléatoire $T$ (cf. *III*.5 *c*). Calculer le nombre moyen d'épreuves nécessaires pour départager les deux joueurs.

*III*.9 Vérifier , *directement sur la relation* (**), que :

*a*) pour $M$ fixé, $\lim_{N \to +\infty} p_A(N, M) = 0$ ;

*b*) pour $N$ fixé , $\lim_{M \to +\infty} p_A(N, M) = 1$ .

## IV Nouvelle méthode de résolution de l'équation fonctionnelle (*) .

*IV*.1 Pour tous entiers $r$ et $s$ supérieurs ou égaux à 1 , déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$g(x) = \frac{1}{x^r (1-x)^s} .$$

$IV.2$ Pour tout réel $x$, on considère la fonction $h_x$ sur $\overline{R}$ définie par :

$$h_x(l\,,k) = \left(\frac{x}{p}\right)^l \left(\frac{1-x}{q}\right)^k$$

avec $q = 1-p$ .

a) Vérifier que pour tout réel $x$, la fonction $h_x$ appartient à $\mathscr{E}$ .

b) Pour tout réel $x$, donner la décomposition de $h_x$ dans la base $\{\varphi_0\,,\ldots,\varphi_{N-1},\xi\,,\psi_0\,,\ldots,\psi_{M-1}\}$ .

c) En déduire les valeurs de $\varphi_i(l\,,k)$ et $\psi_j(l\,,k)$, pour $(l\,,k)\in R$ , $0 \leq i < N$ et $0 \leq j < M$ .