DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 5 heures)

Tout le problème se situe en géométrie plane, dans un plan affine euclidien. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ est noté $\vec{a} \cdot \vec{b}$; la distance euclidienne de deux points A, B est notée AB.

Le plan est muni de sa topologie usuelle. On rappelle que toute intersection de parties fermées est une partie fermée, et que toute application continue du plan dans l'ensemble R des nombres réels transforme une partie fermée bornée du plan en partie fermée bornée de R.

Une partie E du plan est dite convexe si, pour tout couple de points A et B de E, le segment d'extrémités A et B est inclus dans E. On remarque que l'image d'une partie convexe par projection sur une droite est convexe.

Le but du problème est l'étude des parties convexes fermées de largeur un dans toute direction, c'est-à-dire dont la projection orthogonale sur toute droite du plan est un segment de longueur un. Une telle partie sera appelée, par abréviation, une roue de diamètre un.

I

I.1. *Approche expérimentale.*

Cinq points S, A, A', B, B' sont disposés dans le plan de la manière suivante : le triangle SAA' est isocèle rectangle (angle droit en S), son hypoténuse a pour longueur un; les points B, B' sont dans le demi-plan limité par la droite AA' et qui ne contient pas S; les quatre distances AB, SB, A'B', SB' sont égales à un.

L'unité de longueur étant 6 cm, dessiner une figure répondant à cette description, en indiquant brièvement comment on a procédé.

On considère l'intersection Ω_1 des cinq disques fermés de rayon un, centrés respectivement en S, A, A', B, B'. Représenter Ω_1; compléter le dessin en représentant la projection orthogonale de Ω_1 sur une droite non sécante, la projetante de A coupant par exemple le segment SA' en son milieu.

I.2. Soit Ω une roue de diamètre un. La frontière Δ d'un demi-plan fermé contenant Ω est dite droite d'appui de Ω si et seulement si l'intersection $\Delta \cap \Omega$ est non vide.

Montrer successivement que :

- Dans toute direction Ω possède exactement deux droites d'appui (parallèles);
- La distance de deux points de Ω est au plus égale à un;
- Une droite d'appui de Ω rencontre Ω en un seul point;
- La droite qui joint deux points de Ω situés sur deux droites d'appui parallèles est perpendiculaire à ces deux droites.

I.3. Démontrer que l'intérieur d'une roue de diamètre un est non vide.

Indication : choisissant deux directions orthogonales, former un carré de côté un dont le contour a quatre points communs avec la roue; en déduire que celle-ci contient un disque.

I.4. Soit Ω une roue de diamètre un, et Γ sa frontière, c'est-à-dire l'ensemble des points N tels que tout disque de centre N rencontre à la fois la partie Ω et la partie complémentaire.

Considérant un point A du plan, établir l'existence d'un point B de Ω tel que : $(\forall P \in \Omega)$ $(AB \geqslant AP)$.

Démontrer que la droite perpendiculaire en B à la droite AB est une droite d'appui. Étudiant alors l'intersection avec Ω de la droite AB, démontrer que A est sur la frontière Γ si et seulement si A appartient à la fois à Ω et à une droite d'appui.

I.5. Pour chaque droite d'appui Δ d'une roue Ω de diamètre un, on considère le demi-plan fermé délimité par Δ et contenant Ω. Quelle est l'intersection de ces demi-plans?

I.6. L'unité de longueur est encore 6 cm. Dessiner un triangle équilatéral T de côté un. On recherche une roue de diamètre un contenant T; démontrer qu'il en existe une et une seule; la représenter.

Déterminer son périmètre.

II

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'expression générale d'un vecteur unitaire est :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\,; \qquad \text{on pose } \vec{v}(\theta) = \vec{u}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Le paramètre θ décrit $\mathbb{R}$.

On désigne par p, de dérivées p', p'', une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (qu'on ne particularisera qu'à la question II.4.) satisfaisant aux trois conditions ci-après :

- (*i*) $(\forall \theta \in \mathbb{R})$ $(p(\theta) + p(\theta + \pi) = 1)$;
- (*ii*) La dérivée p' est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble F des points de $[0, \pi]$ où elle n'est pas dérivable est fini, ou peut être vide;
- (*iii*) $(\forall \theta \in [0, \pi])$ $[(\theta \notin F) \Rightarrow (0 \leqslant p(\theta) + p''(\theta) \leqslant 1)]$.

Au réel θ on associe :

- La droite $D(\theta)$ dont une équation dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est : $x\cos\theta + y\sin\theta - p(\theta) = 0$;
- Le point $M(\theta)$ défini par : $\overrightarrow{OM(\theta)} = p(\theta)\,\vec{u}(\theta) + p'(\theta)\,\vec{v}(\theta)$.

II.1. Pour θ fixé et k décrivant $\mathbb{Z}$, vérifier que les droites $D(\theta + k\pi)$ n'occupent que deux positions distinctes; ces deux positions délimitent une bande $H(\theta)$ dont on précisera la largeur.

II. 2. Soit θ_0 un réel fixé; on note en abrégé $\vec{u_0} = \vec{u}(\theta_0)$. Étudier les variations, quand θ décrit R, de la fonction X définie par : $X(\theta) = \vec{u_0} \cdot \overrightarrow{OM}(\theta)$.

En déduire que $M(\theta)$ ne sort pas de la bande $H(\theta_0)$.

II.3. On pose $\quad \Omega = \bigcap_{\theta \in R} H(\theta)$.

Démontrer que Ω est une roue de diamètre un dont les $D(\theta)$ sont les droites d'appui, et dont la frontière Γ est décrite par $M(\theta)$.

II.4. *Exemple :* avec les données ci-dessous il est demandé, à échelle libre, une représentation graphique de p, puis le dessin (unité de longueur 8 cm) de Ω.

On donne la restriction de p à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\theta \longmapsto p(\theta) = \frac{2\theta}{\pi},$$

et on suppose que, sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $p(\theta)$ s'exprime par une fonction polynôme du second degré.

Déterminer $p(\theta)$, d'abord sur $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, puis sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Donner une représentation graphique de p.

Construire l'arc de frontière correspondant à $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$; mettre en place ensuite l'arc correspondant à $\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$. On établira qu'il existe une symétrie orthogonale échangeant ces deux arcs.

Achever la représentation sans étude approfondie des autres arcs.

III

Pour guider la variation de $D(\theta)$ (cf. II) lorsque θ parcourt $[0, \pi]$, on considère la demi-ellipse définie dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par :

$$\begin{cases} 4x^2 + 16y^2 = 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

On note A, A' ses extrémités (sommets du grand axe).

III. 1. Déterminer l'application continue q de $[0, \pi]$ dans R telle que, pour tout θ de $[0, \pi]$, la droite :

$$x \cos\theta + y \sin\theta - q(\theta) = 0$$

soit une tangente à la demi-ellipse.

Montrer que q admet un prolongement p à R satisfaisant aux conditions énoncées dans II. Il existe donc une roue de diamètre un, Σ, dont la frontière contient la demi-ellipse.

III.2. A partir d'un tracé précis de la demi-ellipse, représenter Σ (unité de longueur 8 cm).

III.3. Démontrer que Σ contient un demi-cercle d'extrémités A et A'.

III.4. On veut trouver les demi-cercles de diamètre un inclus dans une roue de diamètre un, Ω, donnée par ses droites d'appui comme dans la partie II.

Montrer que les extrémités d'un tel demi-cercle sont nécessairement un couple de points $M(\theta)$, $M(\theta + \pi)$.

On note $C(\theta)$ le milieu du segment $M(\theta)\,M(\theta + \pi)$ et $L(\theta)$ la médiatrice de ce segment.

On suppose qu'une valeur θ_0 du paramètre réalise la situation suivante : toutes les droites $L(\theta)$ sécantes à $L(\theta_0)$ coupent $L(\theta_0)$ sur une même demi-droite fermée δ d'origine $C(\theta_0)$. Montrer que le demi-cercle d'extrémités $M(\theta_0)$, $M(\theta_0 + \pi)$ qui coupe δ est inclus dans Ω.

III.5. Montrer que si l'un des demi-cercles fermés d'extrémités $M(\theta)$, $M(\theta + \pi)$ est contenu dans Ω, l'autre n'a aucun point à l'intérieur de Ω.

III.6. *Application à la roue* Σ.

On suppose $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Montrer que la frontière de Σ a même centre de courbure en $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$.

Démontrer que le rayon de courbure de cette frontière en chaque extrémité autre que A et A' d'un demi-cercle de diamètre un contenu dans Σ est égal à $\frac{1}{2}$.

Déterminer les demi-cercles de diamètre un contenus dans Σ.