SESSION DE 1982

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 5 heures)

$(\mathcal{E}, d)$ désignant un espace métrique et $\mathcal{A}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$, on appellera « expansion de $(\mathcal{A}, d)$ » toute application f de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ telle que :

quels que soient M et M', éléments de $\mathcal{A}$, on ait la relation

$$d(M, M') \leqslant d(f(M), f(M')).$$

On appellera « isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ » toute application *bijective* f de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}$ conservant la distance d, c'est-à-dire telle que :

quels que soient M et M', éléments de $\mathcal{A}$, on ait

$$d(M, M') = d(f(M), f(M')).$$

On notera $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$ l'ensemble des expansions de $(\mathcal{A}, d)$ et $\mathcal{J}(\mathcal{A}, d)$ l'ensemble des isométries de cet espace. Muni de la loi de composition des applications $\mathcal{J}(\mathcal{A}, d)$ est un groupe.

Questions préliminaires :

0.1. Prouver qu'une expansion de $(\mathcal{A}, d)$ est injective.

0.2. Prouver que $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$ est stable pour la loi de composition.

0.3. Soit f une expansion bijective de $(\mathcal{A}, d)$. Prouver que f est une isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ si, et seulement si, $f^{-1} \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$.

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes.

I

Dans cette partie $\mathcal{E}$ est un plan affine euclidien et d est la distance euclidienne sur $\mathcal{E}$.

1.1. Ici A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ est le segment [A, B].

1.1. *a.* Pour $f \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$ déterminer la paire $\{f(A), f(B)\}$.

1.1. *b.* En composant au besoin f avec une isométrie de $(\mathcal{A}, d)$ montrer que l'on peut se ramener au cas où $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Déterminer alors f.

1.1. *c.* Déterminer $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$.

1.2. Ici $\mathcal{A}$ est une partie quelconque de $\mathcal{E}$ et $f \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que U et V sont deux points de $\mathcal{A}$ fixes par f et que C est un point de $\mathcal{A}$ tel que $f(C) \neq C$. Prouver que le segment [U, V] est inclus dans le demi-plan fermé contenant C bordé par la médiatrice du segment $[C, f(C)]$.

Tournez la page S. V. P.

1.3. Ici $\mathcal{A}$ est le domaine compact bordé par une ellipse (E), c'est-à-dire : F et F' désignant les foyers de (E) et $2a$ la longueur du grand axe, $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ vérifiant $d(M, F) + d(M, F') \leqslant 2a$. On note A et A' (resp. B et B') les extrémités du grand axe (resp. du petit axe) de (E) : $d(B, B') < d(A, A') = 2a$.

1.3. *a.* Prouver que : $\forall (M, M') \in \mathcal{A}^2, \quad d(M, M') \leqslant 2a$, l'égalité n'ayant lieu que pour $\{M, M'\} = \{A, A'\}$.

1.3. *b.* Soit $f \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que $f(A) = A$ et $f(A') = A'$ et qu'il existe un point C de l'ellipse (E) tel que $f(C) \neq C$. Déduire de 1.2. que F et F' sont sur la médiatrice du segment $[C, f(C)]$.

1.3. *c.* Soit $f \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$. On suppose que A, A', B, B' sont fixes par f. Déduire de 1.2. que tout point de (E) est fixe par f, puis que $f = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$ (identité sur $\mathcal{A}$).

1.3. *d.* Déterminer $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$.

1.4. Déterminer $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}, d)$ lorsque $\mathcal{A}$ est le domaine compact bordé par un cercle (C) non réduit à un point.

II

Dans cette partie $\mathcal{E}$ est l'espace affine attaché à $\mathbf{R}^2$. $M = (x, y)$ et $M' = (x', y')$ étant deux points de $\mathcal{E}$, on note δ la distance définie sur $\mathcal{E}$ par

$$\delta(M, M') = \operatorname{Sup}\{|x - x'|, |y - y'|\}.$$

On note $\Gamma = \{M \in \mathcal{E} \,/\, \delta(O, M) \leqslant 1\}$ la boule fermée de centre $O = (0, 0)$ de rayon 1. On note $A = (1, 1)$, $B = (-1, 1)$, $C = (-1, -1)$ et $D = (1, -1)$ les quatre sommets de Γ.

2.1. *a.* Prouver qu'un élément g de $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ envoie une paire de points situés sur deux segments distincts parallèles du quadrilatère A, B, C, D sur une paire de points possédant la même propriété.

En déduire que g laisse globalement invariant $\{A, B, C, D\}$.

2.1. *b.* Montrer que si un élément g de $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ vérifie $g(A) = A$ alors $g(C) = C$.

2.1. *c.* Soit d_2 la distance euclidienne de $\mathcal{E}$ pour laquelle $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux et de norme 2. Soit G le sous-groupe de $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_2)$ des isométries euclidiennes qui conservent Γ. Prouver que pour tout élément f de G, sa restriction à Γ notée f_Γ est élément de $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$.

2.1. *d.* Prouver que, si g est élément de $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$, il existe un élément f de G tel que $f \circ g$ laisse fixes A, B, C, D.

2.1. *e.* Déterminer $g \in \mathcal{J}(\Gamma, \delta)$ lorsque g laisse fixes A, B, C, D.

2.1. *f.* Déterminer $\mathcal{J}(\Gamma, \delta)$.

2.2. *a.* Prouver que $\{f \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta) \,/\, f(O) = O\} = G$.

2.2. *b.* Décrire le groupe $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$: on précisera la forme réduite de chaque élément de ce groupe.

2.3. On note d_1 la distance définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$d_1(M, M') = |x - x'| + |y - y'|,$$

pour tout couple $(M = (x, y), M' = (x', y'))$ de points de $\mathcal{E}$.

2.3. *a.* Soit σ l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle :

$$\sigma(x, y) = (x + y, -x + y).$$

Prouver que σ est une isométrie de $(\mathcal{E}, d_1)$ dans $(\mathcal{E}, \delta)$ c'est à dire que σ est bijective et pour tous points M et M' de $\mathcal{E}$, $d_1(M, M') = \delta(\sigma(M), \sigma(M'))$.

2.3. *b.* Soit σ^* l'application de $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$ dans $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1)$ telle que $\sigma^*(f) = \sigma^{-1} \circ f \circ \sigma$. Montrer que σ^* est bien définie et que c'est un isomorphisme de groupes.

En déduire que $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_1) = \mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$.

III

3.1. Soit p un réel strictement supérieur à 1.

3.1. *a*. Soit $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^3$, tel que $\alpha + \beta = 1$, et f l'application de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (\alpha a + \beta x)^p - \alpha a^p - \beta x^p.$$

Étudier le signe de f.

3.1. *b*. Dans toute la suite du paragraphe 3.1. $\mathbb{R}^2$ est considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$|x|^p + |y|^p = |x'|^p + |y'|^p = 1$$

on a pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $\alpha + \beta = 1$:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = (x'', y'') \quad \text{avec} \quad |x''|^p + |y''|^p \leqslant 1.$$

Quand a-t-on l'égalité ?

3.1. *c*. On considère l'application N_p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\vec{u} = (x, y) \longmapsto N_p(\vec{u}) = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}.$$

Prouver que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^2$ (pour l'inégalité triangulaire on pourra, pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, se ramener au cas 3.1. *b*. en introduisant $\vec{U}$ et $\vec{V}$ tels que $N_p(\vec{u})\,\vec{U} = \vec{u}$ et $N_p(\vec{v})\,\vec{V} = \vec{v}$). Prouver que, dans l'inégalité triangulaire, on n'a l'égalité que dans la cas où les vecteurs sont positivement liés.

3.2. Dans la suite de la partie III on note $\mathcal{E}$ l'espace affine attaché à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et d_p la distance attachée à la norme N_p : $d_p(M, M') = N_p(\overrightarrow{MM'})$. Montrer que $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$ est un sous-groupe du groupe affine de $\mathcal{E}$ (on pourra utiliser, sans avoir à le démontrer, le théorème suivant : toute bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ conservant l'alignement est une application affine).

3.3. Soit $f \in \mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$ et $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de la partie linéaire de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Prouver que :

$$|a|^p + |b|^p = |c|^p + |d|^p = 1 ; \quad |\det \mathcal{M}| = 1 ;$$
$$|a| = |d| \quad \text{et} \quad |b| = |c|.$$

En déduire que :

$$a^2 + b^2 = |a|^p + |b|^p = 1.$$

Prouver que tous les groupes $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_p)$, pour p réel supérieur ou égal à 1 et différent de 2, sont égaux au sous-groupe $\mathcal{J}(\mathcal{E}, \delta)$ de $\mathcal{J}(\mathcal{E}, d_2)$ étudié en II.

IV

Dans cette partie $\mathcal{E}$ est l'espace affine attaché à $\mathbb{R}^n$ (n entier naturel non nul) et D est une distance associée à une norme sur $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'alors les compacts de $(\mathcal{E}, D)$ en sont les fermés bornés.

4.1. Soit $\mathcal{A}$ une partie bornée de $\mathcal{E}$. Soit $f \in \text{Exp}(\mathcal{A}, D)$.

On définit par récurrence $f^{p+1} = f^p \circ f$ pour p entier naturel.

Tournez la page S. V. P.

4.1. *a.* Soit $A \in \mathcal{A}$. En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite $(f^p(A))_{p \in \mathbb{N}^*}$ prouver que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists k \in \mathbb{N}^*, \ D(A, f^k(A)) < \varepsilon.$$

De même montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists k \in \mathbb{N}^*, \ D(A, f^k(A)) < \varepsilon \text{ et } D(B, f^k(B)) < \varepsilon.$$

4.1. *b.* Déduire de 4.1. *a.* que : f conserve la distance de D.
f a une image dense dans $\mathcal{A}$.

Conclure que si $\mathcal{A}$ est compact $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}, D) = \mathcal{I}(\mathcal{A}, D)$.

4.2. $\mathcal{A}$ est toujours ici une partie bornée de $\mathcal{E}$.

4.2. *a.* Soit $f \in \operatorname{Exp}(\mathcal{A}, D)$. Montrer que f est prolongeable en une isométrie $\overline{f}$ de $(\overline{\mathcal{A}}, D)$, $\overline{\mathcal{A}}$ étant l'adhérence de $\mathcal{A}$.

4.2. *b.* Prouver que si $\mathcal{A}$ est un ouvert borné $\operatorname{Exp}(\mathcal{A}, D) = \mathcal{I}(\mathcal{A}, D)$.

4.3. *a.* Donner un exemple d'expansion d'un ouvert qui ne soit pas une isométrie de cet ouvert mais qui cependant conserve la distance.

4.3. *b.* Donner un exemple d'expansion d'une partie bornée qui ne soit pas une isométrie de cette partie.