DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 5 heures

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants.

Dans sa correction, il sera donné au premier problème une importance triple de celle accordée au second.

PREMIER PROBLEME

Notations : P est un plan affine euclidien, rapporté, dans certaines questions, à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, un point de P étant alors désigné par le couple de ses coordonnées.

Si A est un point de P, la symétrie centrale de centre A est notée s_A.

Si D est une droite de P, la symétrie axiale orthogonale d'axe D est notée σ_D.

Si F est une partie (non vide) de P, et si g est une isométrie de P, $g(F)$ désigne l'ensemble des images par g des points de F; on dit que g conserve F si $g(F) = F$. L'ensemble des déplacements de P conservant F est un groupe de transformations noté $\mathcal{J}^+(F)$. L'ensemble des isométries de P conservant F est un groupe de transformations noté $\mathcal{J}(F)$.

Définitions : Etant donné un vecteur $\vec{u}$ non nul du plan P, on dit que F est une frise de vecteur $\vec{u}$ si les translations conservant F sont les translations de vecteur $n\vec{u}$, $n \in \mathbb{Z}$, et aucune autre.

Soit L une droite orthogonale à $\vec{u}$, L' sa transformée par la translation de vecteur $\vec{u}$. L et L' délimitent une bande P_0 du plan P (P_0 contenant ses bords L et L'); on dit alors que $F \cap P_0$ est un motif de la frise F. Le motif d'une frise peut être réduit à un point.

1

1.1- $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ étant deux vecteurs non nuls distincts, une frise de vecteur $\vec{u}$ peut-elle être une frise de vecteur $\vec{u}'$?

1.2 - Soit E l'ensemble des points (x,y) de P vérifiant la condition : $\tan y = |\tan x|$. (la notation tan désignant la fonction tangente).

On considère trois sous-ensembles de E :

E_1 formé des points (x,y) de E tels que $|y| \leqslant \frac{\pi}{3}$;

E_2 formé des points (x,y) de E tels que $|x| \leqslant \frac{\pi}{3}$;

E_3 formé des points (x,y) de E tels que $0 \leqslant x + y \leqslant \pi$.

Démontrer que chacun de ces sous-ensembles E_1, E_2, E_3 est une frise de vecteur à préciser et dont dessinera un motif.

1.3 - Soit F_1 l'ensemble des points (x,y) de P vérifiant la condition :

$$x + \sqrt{1 - 2|y|} \in \mathbf{Z}$$

Soit F_2 la réunion dans P des disques ouverts $W_{p,q}$, $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$, $W_{p,q}$ ayant pour centre (p,q) et pour rayon $\dfrac{1}{2+q^2}$.

Démontrer que F_1 et F_2 sont deux frises de vecteur $\vec{i}$, et dessiner un motif de chacune d'elles (partiellement pour F_2).

1.4 - Existe-t-il des frises de vecteur non colinéaire à $\vec{i}$ contenues dans F_1 ? contenues dans F_2 ?

Dire avec preuve à l'appui si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

– L'intersection de deux frises de vecteur $\vec{u}$ ayant un point commun est une frise.

– Si l'intersection de deux frises de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ est une frise, alors $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

2

2.1 - Soit F une frise de vecteur $\vec{u}$, t la translation de vecteur $\vec{u}$ et g un élément de $\mathcal{J}(F)$. Montrer que $g \circ t \circ g^{-1}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

En déduire que, si le groupe $\mathcal{J}^+(F)$ contient d'autres éléments que des translations, ceux-ci ne peuvent être que des symétries centrales.

S'il existe une symétrie centrale s_A conservant une frise F, on dit que F est centrée et que A en est un centre.

2.2 - Soit F une frise centrée de vecteur $\vec{u}$, et A l'un de ses centres ; quels sont tous les autres ? Montrer que $\mathcal{J}^+(F)$ peut être engendré par deux symétries centrales.

Inversement, une partie F de P dont le groupe $\mathcal{J}^+(F)$ soit engendré par deux symétries centrales est-elle une frise centrée ?

2.3 - Soit F une frise de vecteur $\vec{u}$, telle que $\mathcal{J}(F)$ ne se réduise pas à $\mathcal{J}^+(F)$.

Que peut-on dire de la direction d'une droite H si σ_H conserve F ?

Que peut-on dire d'un antidéplacement conservant F, autre qu'une symétrie axiale ? (On s'intéressera au composé de cet antidéplacement par lui-même).

3

On considère une droite D, deux points distincts A, B de D, le vecteur $\vec{u} = 2\,\overrightarrow{AB}$, la médiatrice Δ de $[AB]$.

3.1 - Soit F une frise centrée de vecteur $\vec{u}$, dont A est un centre.

Démontrer que F possède une et une seule des propriétés suivantes :

(I) F n'est conservée par aucun antidéplacement ;
(II) la symétrie axiale orthogonale σ_Δ conserve F ;
(III) la symétrie axiale orthogonale σ_D conserve F.

3.2 - Donner, avec justification à l'appui, trois exemples de frises centrées de types respectifs (I), (II), (III).

3.3 - Démontrer que, dans le cas (II), le groupe $\mathcal{J}(F)$ est engendré par s_A, σ_Δ ; préciser les éléments de ce groupe.

Inversement, démontrer que toute partie F du plan dont le groupe $\mathcal{J}(F)$ est engendré par s_A, σ_Δ est une frise de vecteur $\vec{u}$.

3.4 - Démontrer que, dans le cas (III), le groupe $\mathcal{J}(F)$ est engendré par trois de ses éléments à préciser, mais que deux quelconques des éléments de $\mathcal{J}(F)$ n'engendrent pas ce groupe.

3.5 - Les groupes $\mathcal{J}(F)$ des cas (I) et (II) sont-ils isomorphes ?

4

Cette partie (sauf dans sa question 4.5) est indépendante de la précédente.

4.1 - Soit F une frise non centrée, de vecteur $\vec{u}$.

Démontrer que F possède une et une seule des propriétés suivantes :

(IV) F n'est conservée par aucun antidéplacement;

(V) F admet un axe de symétrie orthogonale dirigé par $\vec{u}$;

(VI) F admet un axe de symétrie orthogonale normal à $\vec{u}$;

(VII) F est conservée par la composée d'une symétrie axiale orthogonale d'axe dirigé par $\vec{u}$ et de la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

4.2 - Donner, avec justification à l'appui, quatre exemples de frises non centrées de types respectifs (IV), (V), (VI), (VII).

4.3 - Quelle structure remarquable ont les groupes $\mathcal{J}(F)$ des types (IV) et (VII) ?

Une partie F de P dont le groupe $\mathcal{J}(F)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ est-elle une frise ?

4.4 - Démontrer que, dans les cas (V) et (VI), les groupes $\mathcal{J}(F)$ sont engendrés par deux éléments à préciser.

Les groupes $\mathcal{J}(F)$ de l'un et l'autre de ces cas sont-ils isomorphes ?

4.5 - Parmi les groupes $\mathcal{J}(F)$ des cas (I) à (VII), préciser ceux qui sont isomorphes.

DEUXIEME PROBLEME

P est un plan affine euclidien. Un cercle C, de centre O et de rayon R, est donné dans P.

Questions préliminaires :

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des symétries centrales du plan P dont le centre appartient au cercle C.

Etablir que toute translation du plan P est la composée d'un nombre pair d'éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Etablir que toute symétrie centrale du plan P est la composée d'un nombre impair d'éléments de l'ensemble $\mathcal{S}$.

Problème :

On considère deux points A et B du plan P ; on désigne par B' le symétrique du point B par rapport au point O, par d la distance des points A et B, par d' la distance des points A et B'.

Soit $\mathcal{U}$ la partie de l'ensemble $\mathbf{N}^*$ constituée des naturels n non nuls possédant la propriété suivante :

il existe une application φ de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$ dans P

telle que $\begin{cases} \varphi(0) = A\,; \\ \varphi(n) = B\,; \\ \text{pour tout } p,\ 1 \leqslant p \leqslant n, \text{ le milieu du bipoint } (\varphi(p-1), \varphi(p)) \text{ appartient au cercle } C. \end{cases}$

1 — Montrer que $\mathcal{U}$ n'est pas vide.

Dans ce qui suit, on note m le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{U}$.

2 — Etablir successivement :

- $(m = 1) \Leftrightarrow (d' = 2R)$;
- $(m = 2) \Leftrightarrow (d \leqslant 4R \text{ et } d' \neq 2R)$;
- $(d > 4R \text{ et } d' < 2R) \Longrightarrow (m = 3)$.

3 — Pour $k \in \mathbf{N}^*$ donné, énoncer une condition nécessaire et suffisante, portant sur $\dfrac{d}{2R}$, pour que le plus petit élément pair de l'ensemble $\mathcal{U}$ soit $2k$.

On suppose $d' > 2R$. Pour $k' \in \mathbf{N}^*$ donné, énoncer une condition nécessaire et suffisante, portant sur $\dfrac{d'}{2R}$, pour que le plus petit élément impair de l'ensemble $\mathcal{U}$ soit $2k' + 1$.

4 — Déterminer en fonction du couple (d, d') le plus petit élément m de l'ensemble $\mathcal{U}$. Illustrer graphiquement cette détermination en portant, dans des axes auxiliaires, la distance d en abscisse et la distance d' en ordonnée.