SESSION DE 1981

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 5 heures)

On rappelle aux candidats que toutes les questions d'*applications* et de *représentations graphiques* sont *importantes*.

On se donne un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Pour un point de coordonnées (x, y, z), on appelle x l'*abscisse*, y l'*ordonnée*, z la *cote* de ce point.

I

1.1. On considère des endomorphismes f et g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dont le produit de composition $f \circ g$ est une homothétie h. Démontrer que si le rapport de h n'est pas nul $g \circ f = h$.

A-t-on toujours $g \circ f = h$ si le rapport de h est nul ?

1.2. On considère un réel l, strictement positif, une matrice carrée 3×3 à coefficients réels M et sa transposée M^T :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} ; \qquad M^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que :

$$(1) \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = l^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = 0 \end{cases}$$

si, et seulement si :

$$(2) \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = l^2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0. \end{cases}$$

1.3. On considère les points A, B, C de coordonnées respectives $(a_1, a_2, 0)$, $(b_1, b_2, 0)$ et $(c_1, c_2, 0)$. On introduit les nombres complexes :

$$a = a_1 + i a_2, \quad b = b_1 + i b_2, \quad c = c_1 + i c_2.$$

a. Démontrer que A, B, C sont les projections, sur le plan de cote nulle, des sommets d'un cube reliés à O par une arête de ce cube si, et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \neq 0.$$

b. Sous les conditions précédentes calculer l'arête l d'un tel cube et les cotes respectives a_3, b_3 et c_3 de ses sommets projetés en A, B, C en fonction de a_1, b_1, c_1 et de a_2, b_2, c_2.

Tournez la page S. V. P.

1.4. *Applications.*

a. Lorsque $a = 3i$, $b = 4i$, $c = 5$ et $a_3 > 0$ représenter la projection orthogonale du cube sur le plan de cote nulle, xOy, puis compléter le dessin par la projection orthogonale du cube sur le plan d'abscisse nulle, yOz. On présentera ce dessin, ainsi que le suivant, sur papier millimétré en prenant pour unité le demi-centimètre. On prendra les deux axes Oy parallèles et de même sens.

b. Pour $a = 3 + 2i$ et $b = 6 - 3i$ calculer c tel que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Dessiner la projection orthogonale sur le plan de cote nulle des cubes associés à (a, b, c) ainsi déterminés.

Calculer l'arête l de ces cubes.

Indiquer sur le dessin les cotes des sommets du cube dont le sommet projeté en C a une abscisse et une cote positives.

1.5. Soit φ un endomorphisme du plan euclidien $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

a. Démontrer qu'il existe un et un seul couple (u, v) de nombres complexes tel que :

$$\text{pour tout } z \text{ de } \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = uz + v\bar{z}.$$

b. Démontrer que φ est bijectif si, et seulement si, $|u| \neq |v|$.

1.6. On suppose qu'il existe des nombres complexes a, b, c non tous nuls tels que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0 \quad \text{et} \quad (\varphi(a))^2 + (\varphi(b))^2 + (\varphi(c))^2 = 0.$$

Démontrer que φ est une similitude.

1.7. Dans l'espace on appelle similitude de rapport $\lambda > 0$, la composée d'une homothétie de rapport λ et d'une isométrie.

Démontrer que la similitude du plan de cote nulle associée à φ se prolonge en une similitude de l'espace qui transforme un cube associé à (a, b, c) en un cube associé à $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c))$.

II

A

Soit G l'ensemble des nombres complexes de la forme $m + ni$ avec m et n entiers (relatifs).

A tout point z du plan complexe on associe le nombre $k(z)$ des points p de G tels que : $|z - p| < 1$.

2.A.1. Démontrer que si la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers alors $k(z) = 1$.

2.A.2. Démontrer que pour tout nombre complexe z on a :

$$k(z) = k(z + 1) = k(z + i) = k(iz) = k(\bar{z}).$$

En déduire que pour tout nombre complexe z, il existe un nombre complexe $z' = x' + iy'$ vérifiant :

$$0 \leqslant y' \leqslant x' \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k(z) = k(z').$$

2.A.3. *a.* Vérifier que $|z'| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. Démontrer que si p dans G est tel que $|z' - p| < 1$ alors p est l'un des nombres 0, 1, i ou $1 + i$.

c. Vérifier que $|z' - 1| < 1$ sauf pour $z' = 0$.

2.A.4. Démontrer que $1 \leqslant k(z) \leqslant 4$, avec $k(z) = 1$ si, et seulement si, la partie réelle et la partie imaginaire de z sont des entiers.

2.A.5. Calculer $k\left(\frac{1+i}{3}\right)$, $k\left(\frac{1+i}{4}\right)$ et $k\left(\frac{5+i}{12}\right)$.

B

2.B.1. Démontrer que l'ensemble G forme un anneau pour l'addition et la multiplication usuelles. Quels sont les éléments inversibles de cet anneau ?

2.B.2. *a*. Sachant que pour tout nombre complexe z il existe un élément q de G tel que $|z - q| < 1$, démontrer que pour tous a et b, éléments de G, $b \neq 0$, il existe q et r dans G tels que :

$$a = bq + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |b|.$$

Observer (d'après II.A.) qu'un tel couple (q, r) est unique si, et seulement si, le quotient $\frac{a}{b}$ est dans G; dans ce cas on dit que b est un diviseur de a (dans G).

b. Calculer tous les diviseurs de 2 dans G.

c. Démontrer que $1 + i$ est un diviseur de l'élément a dans G si, et seulement si, la partie réelle et la partie imaginaire de a ont la même parité.

2.B.3. *a*. Démontrer que si a, b, q, r, sont des éléments de G tels que $a = bq + r$ les éléments a et b ont les mêmes diviseurs communs dans G que les éléments b et r.

b. En déduire que si a et b sont deux éléments non nuls de G il existe un et un seul élément de G, que l'on notera $a \wedge b$, et qui possède les propriétés suivantes :

* $a \wedge b$ est un diviseur commun à a et b,
* tout diviseur commun à a et b divise $a \wedge b$,
* la partie réelle de $a \wedge b$ est strictement positive et sa partie imaginaire est positive ou nulle.

c. Calculer $(4 - 7\,i) \wedge (8 + i)$.

2.B.4. Soient a et b des éléments non nuls de G.

a. Démontrer qu'il existe des éléments u et v de G tels que $au + bv = 1$ si, et seulement si, $a \wedge b = 1$.

b. En déduire que $a \wedge b^2 = a^2 \wedge b^2 = 1$ dès que $a \wedge b = 1$.

c. Soit c un élément de G; démontrer que si $a \wedge b = 1$ et si a est un diviseur de bc alors a est un diviseur de c.

III

Les cubes associés, comme il a été vu dans la première partie, aux triplets (a, b, c) d'éléments de G non tous nuls et tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ sont appelés des G-cubes. Un G-cube pour lequel a, b, c ont un diviseur commun dans G autre que $1, -1, i$ ou $-i$ est dit réductible (relativement à sa projection sur le plan de cote nulle); tout autre G-cube sera dit irréductible.

3.1. Combien y a-t-il de G-cubes irréductibles associés aux triplets (a, b, c) vérifiant $abc = 0$?

On suppose dorénavant que a, b, c sont des éléments non nuls de G, *tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 0$, et tels que les seuls diviseurs communs à a, b, c dans* G *soient* $1, -1, i$ *et* $-i$.

3.2. *a*. Démontrer que $a \wedge b = b \wedge c = c \wedge a = 1$.

b. Démontrer que $1 + i$ divise un des trois éléments a, b ou c mais ne peut en diviser qu'un seul.

3.3. On suppose que $1 + i$ est un diviseur de c.

a. Démontrer que 2 est un diviseur de $(a + ib) \wedge c$.

b. On pose :

$$2\,d = (a + ib) \wedge c\ ; \qquad 2\,ds = a + ib\ ; \qquad 2\,dt = c.$$

Démontrer que :

$$s \wedge t = 1\ ; \quad sa = d(s^2 - t^2)\ ; \quad isb = d(s^2 + t^2).$$

c. Démontrer que s n'est pas nul et que $\frac{d}{s}$ est égal à $1, -1, i$ ou $-i$.

Tournez la page S. V. P.

3.4. *a.* Démontrer que l'arête l du G-cube associé à (a, b, c) est un entier supérieur strictement à 1 en le calculant en fonction de s et t.

b. Démontrer que 2 est un diviseur dans G de $|s^2| - s^2$ et de $|t^2| - t^2$.

Démontrer que l est impair.

3.5. On se donne deux éléments s' et t' non nuls de G tels que :

$$s' \wedge t' = 1 \qquad \text{et} \qquad |s'^2| + |t'^2| \quad \text{soit impair.}$$

Démontrer qu'au triplet $(s'^2 - t'^2, \; - i(s'^2 + t'^2), \; 2s't')$ d'éléments de G est associé un G-cube irréductible.

3.6. *a.* Existe-t-il des G-cubes irréductibles d'arêtes 3, 5 et 7 ?

b. Dans chaque cas affirmatif dessiner la projection sur le plan de cote nulle d'un tel G-cube.

3.7. Démontrer qu'il existe deux G-cubes irréductibles d'arête 9 tels qu'on ne puisse passer de la projection de l'un à la projection de l'autre par une similitude du plan de cote nulle.

3.8. Démontrer qu'un G-cube est réductible si, et seulement si, il existe une similitude du plan de cote nulle, de rapport λ, $0 < \lambda < 1$, qui permet de passer de la projection de ce G-cube à celle d'un autre G-cube.