SESSION DE 1980

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

$\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.

P est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O. On utilisera la bijection de P sur C définie par M de coordonnées $(x, y) \longrightarrow x + iy$. On note M (z) le point de P qui a pour affixe z. I est le point de coordonnées $(1, 0)$.

n est un entier naturel non nul.

On appelle « n-point » de P toute famille $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de points de P vérifiant : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_{k+n} = M_k$. Un tel n point est noté $(M_1, \ldots, M_n)$, ou $\mathfrak{M}$ s'il n'y a pas ambiguïté.

On appelle « côté d'un n-point » le segment joignant deux points consécutifs M_k et M_{k+1}. On dira qu'un n-point est réduit à un point si : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_k = M_1$.

On dit que deux n-points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont équivalents s'il existe un entier h tel que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_{k+h} = N_k$. Les classes d'équivalence sont appelées des « n-gones ».

Les seules similitudes envisagées dans le problème sont des *similitudes directes*. Deux n-points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont dits semblables s'il existe une similitude H telle que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $H(M_k) = N_k$. Deux n-gones sont semblables s'ils admettent des représentants semblables.

$\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ est la racine n-ième de 1 dans $\mathbb{C}$ d'argument $\dfrac{2\pi}{n}$. Pour $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on appelle Ω_p le n-point $(W_k^p)_{k \in \mathbb{Z}}$ où W_k^p est le point d'affixe ω^{pk}. Un n-gone est dit régulier de « type ω^p » s'il est semblable à Ω_p ou s'il est réduit à un point.

A tout nombre complexe a, *différent de* 1, on associe une *transformation polygonale d'ordre* n, S_a, définie de la manière suivante : à tout n-point $\mathfrak{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ correspond le n-point $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N} = (N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que, pour tout k, le 3-point (M_k, M_{k+1}, N_k) soit réduit à un point, ou semblable au 3-point (A, I, O). A est le point d'affixe a et I est le point d'affixe 1.

I

1.1. $\mathfrak{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ étant un n-point et $\mathfrak{N} = (N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ son image par la transformation polygonale S_a, $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$, on note z_k l'affixe de M_k et z'_k l'affixe de N_k. Montrer que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad z'_k = \frac{z_k - a z_{k+1}}{1 - a}.$$

1.2. a et b étant deux nombres complexes différents de 1, montrer que les deux transformations polygonales S_a et S_b commutent, c'est-à-dire que l'on a :

$$S_a \circ S_b = S_b \circ S_a.$$

1.3. Si $\mathfrak{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ est un n-point, on appelle « centre de gravité de $\mathfrak{M}$ » l'isobarycentre des points $M_1, \ldots, M_n$. Montrer que le centre de gravité de $\mathfrak{N} = S_a(\mathfrak{M})$ est le même que celui de $\mathfrak{M}$.

Tournez la page S. V. P.

II

Dans toute cette partie n est fixé égal à 3.

Un 3–point régulier est dit « équilatéral ».

ω est noté $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.

2.1. Soient $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ trois points de P. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes z_1, z_2, z_3 pour que le 3–point (M_1, M_2, M_3) soit équilatéral de type $\omega = j$, puis pour qu'il soit équilatéral de type j^2.

2.2. On suppose que a n'est pas une racine cubique de l'unité; montrer que la transformation polygonale d'ordre 3, S_a, est une bijection de l'ensemble des 3–points sur lui-même et qu'elle induit une bijection de l'ensemble des 3-points équilatéraux sur lui-même.

2.3. Dans cette question, on prend $a = i$ et les trois points B, C, D d'affixes respectives 0, 4 et $4 + 2i$. Effectuer à la règle et au compas les constructions de similitude permettant de tracer l'image du 3-point (B, C, D) par S_i (on aura soin de faire apparaître clairement sur la figure les côtés du 3-point (B, C, D) et les côtés de son image par S_i).

2.4. Dans cette question, on prend a racine cubique de l'unité.

Montrer que l'image par S_a de tout 3–point est un 3–point équilatéral et préciser suivant les cas le type de ce 3–point équilatéral.

Montrer que l'image par S_a d'un 3–point équilatéral de type a^2 est un 3–point réduit à un point. Quel est ce point?

2.5. a est encore une racine cubique de l'unité et $\mathcal{N} = (N_1, N_2, N_3)$ est un 3–point équilatéral de type a. Montrer que pour tout point M_1 de P il existe $\mathcal{M} = (M_1, M_2, M_3)$ tel que $S_a(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$. Décrire géométriquement la construction de M_2 et M_3 à partir de $\mathcal{N}$ et de M_1 ; faire la figure.

Construire l'image par S_j du 3-point (B, C, D) défini en 2.3. sur un nouveau dessin.

2.6. a est de nouveau un nombre complexe quelconque (mais différent de 1). Déterminer l'ensemble Γ des points M de P tels que l'image par S_a du 3–point (A, I, M) soit un 3-point formé de points alignés (c'est-à-dire qu'il existe une droite du plan contenant les trois points N_1, N_2 et N_3). Montrer que cet ensemble contient, si $a \neq 0$, les points $A_1(-1-a)$, $A_2(a^2)$ et $A_3\left(\dfrac{1}{a}\right)$. Caractériser géométriquement cet ensemble à l'aide des points A_1, A_2 et A_3. Étudier le cas $a = 0$.

III

n est un entier non nul quelconque.

$(u_1, \ldots, u_n)$ étant un élément *non nul* de $\mathbb{C}^n$, on dit qu'un n–point $\mathcal{M}$ vérifie la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ si les affixes z_k des points M_k de $\mathcal{M}$ vérifient :

$$u_1 z_1 + \ldots + u_n z_n = 0.$$

On dit que la relation U est *adaptée* si elle satisfait à la condition suivante : si $\mathcal{M}$ vérifie U et si $\mathcal{M}'$ est semblable à $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{M}'$ vérifie U.

On dit que la relation U est *polygonale d'ordre n* si à la fois :

(*i*) Elle est adaptée;

(*ii*) Elle est telle que si un n–point vérifie la relation U, tout n–point équivalent vérifie aussi la relation U.

3.1. Montrer que la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ est adaptée si, et seulement si, $u_1 + \ldots + u_n = 0$.

3.2. Montrer que la relation U définie par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est polygonale si, et seulement si, il existe un entier p et un nombre complexe λ non nul tels que :

$$1 \leqslant p \leqslant n-1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \ \alpha_k = \lambda\, \omega^{p(k-1)}.$$

Montrer que dans ce cas un n-point vérifie la relation U si, et seulement si, il vérifie la relation U_p définie par $(1, \omega^p, \omega^{2p}, \ldots, \omega^{(n-1)p})$.

Déterminer les relations polygonales d'ordre 2, 3 ou 4 et décrire les propriétés géométriques qu'elles traduisent pour un 2-point, un 3-point ou un 4-point.

3.3. Montrer qu'un n-point qui satisfait aux $n-1$ relations U_p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, définies en 3.2. est réduit à un point.

3.4. k étant un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, montrer qu'un n-point qui satisfait à toutes les relations U_p sauf à la relation U_k est un n-point régulier de type ω^{n-k}.

IV

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Montrer que S_a est une bijection de l'ensemble des n-points sur lui-même si $a^n \neq 1$.

Dans les questions qui suivent, p est un entier tel que : $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

4.2. Montrer que si un n-point satisfait à la relation U_p (définie en 3.2.) son image par la transformation polygonale d'ordre n, S_a, vérifie aussi cette relation.

4.3. Montrer que pour tout n-point $\mathfrak{M}$, le n-point $S_{\omega^p}(\mathfrak{M})$ vérifie la relation U_p.

On donne un n-point $\mathfrak{N}$ vérifiant la relation U_p. Montrer qu'il existe un n-point $\mathfrak{M}$ tel que $S_{\omega^p}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$.

4.4. Montrer que si $a \neq \omega^p$, et si un n-point $\mathfrak{M}$ ne vérifie pas la relation U_p alors le n-point $S_a(\mathfrak{M})$ ne vérifie pas non plus la relation U_p.

4.5. Faire une étude complète de la transformation polygonale d'ordre n, S_{-1}.

4.6. On considère les $n-1$ transformations polygonales d'ordre n : $S_\omega, S_{\omega^2}, \ldots, S_{\omega^{n-1}}$. Montrer que l'image de tout n-point par la composée de ces $n-1$ transformations est réduite à un point. Montrer que l'image de tout n-point par la composée de $n-2$ transformations polygonales distinctes choisies parmi celles-ci est un n-point régulier dont on précisera le type.

V

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

p est un entier naturel vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des réels vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\alpha_1 \neq 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 1$$

$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ désigne l'application de l'ensemble des n-points dans lui-même qui transforme le n-point $\mathfrak{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en le n-point $\mathfrak{N} = (N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de telle façon que :

pour tout k le point N_k est le barycentre de la famille de points $(M_k, \ldots, M_{k+p-1})$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Tournez la page S. V. P.

5.1. Si $p = 2$, montrer que toute application $T(\alpha_1, \alpha_2)$ est une transformation polygonale d'ordre n que l'on précisera.

5.2. Si $p = 3$, montrer que l'application $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est la composée des deux transformations polygonales S_a et S_b où a et b désignent les racines (éventuellement confondues) du trinôme $\alpha_1 X^2 + \alpha_2 X + \alpha_3$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ soit une bijection de l'ensemble des n-points sur lui-même.

Pour quelles valeurs de n l'application $T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est-elle bijective ? Lorsqu'elle n'est pas bijective, caractériser les n-points appartenant à son image.

5.3. Si p est quelconque, $2 \leq p \leq n$, et sachant que le polynôme $P(X) = \alpha_1 X^{p-1} + \alpha_2 X^{p-2} + \ldots + \alpha_p$ est factorisé par la formule $P(X) = \alpha_1 (X - a_1) \ldots (X - a_{p-1})$, $(a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$, démontrer que :

$$T(\alpha_1, \ldots \alpha_p) = S_{a_1} \circ S_{a_2} \circ \ldots \circ S_{a_{p-1}}.$$

Discuter du caractère bijectif ou non de $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et plus particulièrement du caractère bijectif de $T\left(\frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{p}\right)$.