SESSION DE 1979

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

I

Soit φ une application de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels dans lui-même, vérifiant les conditions suivantes :

i. Quels que soient les nombres réels λ et μ, $\varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu)$.

ii. Quels que soient les nombres réels λ et μ, $\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)$.

iii. $\varphi(1) = 1$.

1.1. Calculer $\varphi(\rho)$ pour tout nombre rationnel ρ.

1.2. Démontrer que, si un nombre réel λ est positif, $\varphi(\lambda)$ l'est aussi. En déduire le sens de variation de la fonction φ.

1.3. Démontrer que $\varphi(\lambda) = \lambda$ pour tout nombre réel λ.

II

Soient P et P′ deux plans affines réels (d'espaces vectoriels associés $\vec{P}$ et $\vec{P'}$) et f une application *bijective* de P sur P′ qui transforme trois points alignés quelconques de P en des points alignés de P′.

Tournez la page S. V. P.

2.1. 2.1.1. Soient a, b, c trois points de P tels que $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ soient alignés : démontrer que a, b, c sont eux-mêmes alignés [on pourra, supposant a, b, c non alignés, montrer que l'image par f de tout point x de P serait alors alignée avec $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$].

2.1.2. Montrer que, pour toute droite $D \subset P$, $f(D)$ est une droite de P'; et que f transforme des droites parallèles en droites parallèles.

2.2. On munit le plan affine P d'une origine O. On n'autorise dans cette question que des constructions dont chaque pas consiste, soit à tracer la droite passant par deux points distincts déjà connus, soit à mener par un point connu la parallèle à une droite connue, soit à choisir un point auxiliaire. On tracera les figures à proximité du texte.

2.2.1. Supposant donnés O et deux points x et y de P, construire le point s tel que $\overrightarrow{Os} = \overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy}$ (ne pas omettre le cas où O, x et y sont alignés).

2.2.2. Soient $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\vec{P}$ et λ, μ des nombres réels. Supposant donnés O et les points x, l, m tels que $\overrightarrow{Ox} = \vec{v}$, $\overrightarrow{Ol} = \lambda\vec{v}$, $\overrightarrow{Om} = \mu\vec{v}$, construire le point p tel que $\overrightarrow{Op} = \lambda\mu\vec{v}$.

2.3. A tout vecteur $\vec{v} \in \vec{P}$, on associe le point x de P tel que $\overrightarrow{Ox} = \vec{v}$, puis on note $F(\vec{v})$ le vecteur $\overrightarrow{f(0)f(x)}$ de $\vec{P}'$, ce qui définit une application F de $\vec{P}$ dans $\vec{P}'$.

2.3.1. Démontrer, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{P}$, l'égalité

$$F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}).$$

2.3.2. Étant donné un vecteur $\vec{v} \neq \vec{O}$ de $\vec{P}$, démontrer l'existence d'une fonction $\varphi_{\vec{v}}$ de R dans lui-même telle que l'on ait, pour tout nombre réel λ :

$$F(\lambda\vec{v}) = \varphi_{\vec{v}}(\lambda)\, F(\vec{v}).$$

2.3.3. Prouver que la fonction $\varphi_{\vec{v}}$ ne dépend pas de $\vec{v}$, ce qui permettra de la noter désormais φ.

2.3.4. Démontrer, en utilisant la partie I, que F est linéaire et f affine. Énoncer un théorème qui résume le contenu de la partie II.

III

Dans cette partie E désigne un espace affine de dimension 3; O est un point fixé de E; $\mathcal{D}_0$ est l'ensemble des droites de E passant par O; $\mathcal{P}_0$ est l'ensemble des plans de E passant par O.

Dans les questions 3.1, 3.2, et 3.3 on donne une application *bijective* α de l'ensemble $\mathcal{D}_0$ sur lui-même qui transforme trois droites coplanaires quelconques en droites coplanaires.

3.1. Soient D_1, D_2, D_3 des droites de $\mathcal{D}_0$ telles que $\alpha(D_1)$, $\alpha(D_2)$, $\alpha(D_3)$ soient coplanaires : montrer qu'elles sont elles-mêmes coplanaires.

3.2. On choisit dans $\mathcal{P}_0$ un plan P_0 : montrer que les transformées par α des droites de $\mathcal{D}_0$ incluses dans P_0 sont exactement les droites de $\mathcal{D}_0$ incluses dans un certain plan P'_0.

3.3. Soient P et P' deux plans affines ne contenant pas O et respectivement parallèles à P_0 et à P'_0. En utilisant ces plans et la conclusion de la partie II, construire une application affine bijective g de E sur lui-même telle que l'on ait $\alpha(D) = g(D)$ pour toute droite $D \in \mathcal{D}_0$ (on pourra caractériser l'application linéaire associée l par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires convenables).

3.4. Soit β une application bijective de $\mathcal{P}_0$ sur lui-même telle que pour tout triplet (P_1, P_2, P_3) de plans de $\mathcal{P}_0$ ayant une droite commune, les plans $\beta(P_1)$, $\beta(P_2)$, $\beta(P_3)$ aient une droite commune. Démontrer l'existence d'une application affine bijective g de E sur lui-même telle que l'on ait $\beta(P) = g(P)$ pour tout plan $P \in \mathcal{P}_0$.

IV

On note maintenant :

E un espace vectoriel réel *euclidien* de dimension 3,

$\mathcal{D}$ l'ensemble de ses droites vectorielles,

$\mathfrak{P}$ l'ensemble de ses plans vectoriels,

$\underline{O}$ le groupe de ses isométries vectorielles,

$\underline{O}^+$ le sous-groupe de $\underline{O}$ formé des rotations vectorielles,

(on parlera simplement désormais de *droites*, *plans*, *isométries*, *rotations*, l'adjectif *vectoriel* étant à chaque fois sous-entendu)

$u \circ v$ la composée de deux applications u et v,

Id_E l'application identique de E dans lui-même,

u^{-1} l'application réciproque d'une bijection u,

s_V la symétrie (orthogonale) par rapport à un sous-espace vectoriel V de E.

4.1. On se fixe dans cette question une isométrie g.

4.1.1. Montrer que l'application i_g qui à toute isométrie u fait correspondre $g \circ u \circ g^{-1}$ est un automorphisme du groupe $\underline{O}$. Comparer i_g et i_{-g}.

4.1.2. Soit V un sous-espace vectoriel de E : démontrer que $i_g(s_V)$ est la symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel que l'on précisera.

4.1.3. On donne une rotation u, d'axe D et d'angle θ relativement à des orientations choisies sur E et sur D : décrire $i_g(u)$. Montrer que $i_g(\underline{O}^+) = \underline{O}^+$.

4.2. Étant donné une isométrie g, déterminer les isométries g' telles que $i_{g'} = i_g$.

Dans les questions 4.3 à 4.7, on se donne un automorphisme quelconque h *du groupe* $\underline{O}$.

Tournez la page S. V. P.

4.3. 4.3.1. Déterminer les isométries u telles que $u^2 = Id_E$. Mettre en évidence, dans l'ensemble des isométries trouvées, un sous-ensemble qui engendre le groupe $\underline{O}$ des isométries.

4.3.2. Étant donné deux plans P et Q, établir l'existence d'une isométrie g (par exemple une rotation) telle que :

$$s_Q = g \circ s_P \circ g^{-1}.$$

4.3.3. Déduire de 4.3.1 et de 4.3.2 que, pour tout plan $P \in \mathfrak{P}$, $h(s_P)$ est la symétrie par rapport à un plan que l'on notera $\beta(P)$. Montrer que l'application $\beta : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$ est bijective.

4.4. Montrer que $h(\underline{O}^+) = \underline{O}^+$. En particulier, si $D \in \mathcal{D}$, déterminer la nature de $h(s_D)$.

4.5. 4.5.1. Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur la transformation composée $s_P \circ s_Q$, pour que deux plans P et Q soient perpendiculaires.

4.5.2. Étudier les transformés par β de deux plans perpendiculaires, puis de trois plans ayant une droite vectorielle commune.

4.6. Démontrer que, si une application l de E dans lui-même est linéaire et conserve l'orthogonalité des vecteurs, elle est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielles.

4.7. Déduire de l'étude précédente et de la conclusion de 3.4 l'existence d'une rotation r telle que $h = i_r$.

4.8. Déterminer les automorphismes du groupe $\underline{O}^+$.