SESSION DE 1978

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

0

0.1. Si F et G sont deux parties d'un ensemble E, $F \setminus G$ désigne l'ensemble des éléments de F n'appartenant pas à G.

$\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

E_2 est un plan affine euclidien, $\mathcal{E}_2$ son espace vectoriel associé.

La norme euclidienne de $\mathcal{E}_2$ permet de munir E_2 de sa structure canonique d'espace métrique : $d(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \|$.

Si A et B sont deux points distincts de E_2, le segment d'extrémités A et B est l'ensemble des points M de E_2 tels qu'il existe $t \in [0, 1]$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. On le note $[A, B]$.

Si $O \in E_2$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ on appelle :

cercle de centre O et de rayon ρ l'ensemble

$$\{ M \in E_2 \ / \ d(O, M) = \rho \}.$$

disque fermé de centre O et rayon ρ l'ensemble

$$\{ M \in E_2 \ / \ d(O, M) \leqslant \rho \}.$$

disque ouvert de centre O et de rayon ρ l'ensemble

$$\{ M \in E_2 \ / \ d(O, M) < \rho \}.$$

Tournez la page S. V. P.

Un demi-cercle d'extrémités A et B est l'intersection du cercle de diamètre $[A, B]$ avec l'un des demi-plans fermés délimités par la droite (A, B).

0.2. Dans tout le problème Γ *est une partie non vide de* E_2.

Si M est un point de E_2, la distance de M à Γ est la borne inférieure, notée $d(M, \Gamma)$, de l'ensemble $\{ d(M, P) \ / \ P \in \Gamma \}$. Par exemple (résultat admis) si Γ est une droite et si H est la projection orthogonale de M sur Γ, $d(M, \Gamma) = d(M, H)$.

Si M est un point de E_2 et s'il existe un point P de Γ tel que $d(M, \Gamma) = d(M, P)$, P est appelé projection de M sur Γ. On note $p(M)$ l'ensemble des projections de M sur Γ ($p(M)$ peut être vide).

On appelle relèvement d'un point P de Γ, tout point M de E_2 tel que $P \in p(M)$. On note $r(P)$ l'ensemble des relèvements de P.

Si Γ' est une partie non vide de Γ on note $r(\Gamma')$ la réunion des ensembles $r(P)$ lorsque P décrit Γ'.

Si M est un point du relèvement d'un point P de Γ et si $d(M, P) = k$, $k \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que M est un k-relèvement de P et on note $r_k(P)$ l'ensemble des k-relèvements de P et $r_k(\Gamma')$ la réunion des $r_k(P)$ lorsque P décrit Γ'.

On appelle k-sphère d'hypercentre Γ l'ensemble :

$$\{ M \in E_2 \ / \ d(M, \Gamma) = k \}.$$

Nota. — Les raisonnements seront illustrés par des figures; celles-ci ne sauraient dispenser des démonstrations. Les dessins seront effectués directement sur la copie en regard du texte de la démonstration correspondante, exception faite des deux figures qui sont expressément demandées sur papier millimétré.

I

Dans cette partie les ensembles déterminés seront tous représentés par des figures précises.

I.1. Dans cette question Γ est le cercle de centre O et de rayon $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Déterminer $p(M)$ pour tout point M de E_2. Pour tout point P de Γ, déterminer $r(P)$, puis $r_k(P)$.

b. Déterminer la k-sphère d'hypercentre Γ et la comparer à $r_k(\Gamma)$.

c. Si Γ_1 et Γ_2 sont deux cercles de centres distincts et de rayons distincts, déterminer l'ensemble des points équidistants de ces deux cercles : $\{ M \in E_2 \ / \ d(M, \Gamma_1) = d(M, \Gamma_2) \}$. On discutera suivant la position relative de ces deux cercles.

I.2. Reprendre les questions I.1. *a.* et I.1. *b.* dans les deux cas suivants :

i. Γ est le disque fermé de centre O et de rayon ρ.

ii. Γ est le disque ouvert de centre O et de rayon ρ.

I.3. *a.* Reprendre les questions I.1. *a.* et I-1. *b.* lorsque Γ est un segment $[A, B]$. On commencera par déterminer $r(A)$, $r(B)$ et $r(\Gamma \setminus \{A, B\})$.

b. Déterminer l'ensemble des points équidistants des deux segments diagonaux d'un losange. On construira très précisément cet ensemble sur papier millimétré, dans le cas de deux segments de longueurs respectives 2 cm et 8 cm, la petite diagonale du losange étant placée sur le grand axe de la feuille.

I.4. *a.* Reprendre les questions I.1. *a.* et I.1. *b.* lorsque Γ est un demi-cercle d'extrémités A et B (on pourra utiliser les résultats du I.1. et s'inspirer de la méthode utilisée dans I.3. *a.*).

b. Étant donné un triangle équilatéral de sommets A, B et C, on considère le demi-cercle Γ_1 d'extrémités A et B ne contenant pas le milieu de $[A, C]$ et le demi-cercle Γ_2 symétrique de Γ_1 par rapport à la médiatrice de $[B, C]$. Trouver l'ensemble des points équidistants de Γ_1 et de Γ_2.

II

Dans cette partie $\mathcal{E}_2$ et E_2 sont supposés orientés, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct de E_2.

II.1. $\mathcal{I}$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (borné ou non) et $\vec{f}$ une application continûment dérivable de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{E}_2$ telle que la dérivée $\vec{f}'$ ne s'annule en aucun point de $\mathcal{I}$. On considère l'arc géométrique orienté (γ) de représentation paramétrique $(\mathcal{I}, \vec{f})$. Soit $(\vec{t}(u), \vec{n}(u))$ le repère de Frenet correspondant à l'orientation de (γ) au point de paramètre u de (γ). Montrer, pour tout réel λ la continuité de la fonction $\vec{f}_\lambda$ de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{E}_2$ définie par

$$\forall u \in \mathcal{I},\ \vec{f}_\lambda(u) = \vec{f}(u) + \lambda \vec{n}(u).$$

On appellera (γ_λ) l'arc géométrique de représentation paramétrique $(\mathcal{I}, \vec{f}_\lambda)$.

On désigne par Φ (resp. Φ_λ) l'ensemble des points M de E_2 définis par $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(u)$ (resp. $\overrightarrow{OM} = \vec{f}_\lambda(u)$) lorsque u décrit $\mathcal{I}$.

II.2. Montrer que :

$$r_k(\Phi) \subset \Phi_k \cup \Phi_{-k}.$$

II.3. On se place dans le cas où $\mathcal{I} = \mathbb{R}_+^*$ et $\vec{f}(u) = 2au(u\vec{i} + \vec{j})$ a étant un nombre réel strictement positif donné. Étudier suivant les valeurs de λ l'arc (γ_λ) associé à l'arc (γ).

On construira Φ et les quatre Φ_λ correspondant aux quatre valeurs de λ ; $+a$, $-a$, $2a\sqrt{2}$ et $-2a\sqrt{2}$. On fera ce dessin sur une feuille de papier millimétré : $(O, \vec{i})$ est porté par le grand axe de la feuille et est dirigé vers le bas, O est à 8 cm du bord supérieur de la partie millimétrée, $(O, \vec{j})$ est dirigé vers la droite. On prend $a = 1$ et l'unité égale à 2 cm.

II.4. Γ étant la parabole contenant l'ensemble Φ construit au II.3.

a. Déterminer $r(P)$ pour un point P de Γ.

b. Déterminer $r_k(P)$ puis $r_k(\Gamma)$, $k \in \mathbb{R}_+$.

On pourra, soit compléter la figure du II.3. en utilisant une couleur différente, soit faire un dessin à main levée sur la copie.

III

On admettra que si Γ est une partie fermée, non vide, de E_2 pour tout point M de E_2, $p(M)$ est non vide.

On dit que Γ est convexe si, quels que soient deux points A et B de Γ, tout point P de $[A, B]$ appartient à Γ.

La frontière de Γ est l'ensemble des points adhérents simultanément à Γ et à son complémentaire dans E_2.

III.1. Montrer que si Γ est convexe, $p(M)$ a au plus un élément.

III.2. Si P est un point de E_2, on appelle demi-cône de sommet P et de directrice Γ la réunion $\mathcal{C}(P, \Gamma)$ des demi-droites fermées, d'origine P, contenant au moins un point de Γ.

a. Montrer que si Γ est convexe, pour tout point P de E_2, $\mathcal{C}(P, \Gamma)$ est convexe.

Tournez la page S. V. P.

b. Montrer que tout demi-cône convexe $\mathscr{C}$, distinct de E_2, est inclus dans au moins un demi-plan dont la frontière contient le sommet de $\mathscr{C}$.

c. Montrer que l'intersection de deux demi-plans est en général un demi-cône convexe. Enoncer et démontrer une réciproque.

III.3. Montrer que si Γ est convexe et P non intérieur à Γ, $\mathscr{C}(P, \Gamma)$ est inclus dans au moins un demi-plan dont la frontière (D) contient P.

Si P appartient à la frontière de Γ, toute droite (D) frontière d'un tel demi-plan est appelée droite d'appui de Γ passant par P. S'il passe par P au moins deux droites d'appui de Γ on dit que P est un coin de Γ.

III.4. Γ étant une partie fermée convexe de E_2 :

a. Déterminer $r(P)$ pour un point P de la frontière de Γ.

b. Donner une description de la k-sphère d'hypercentre Γ.