1977

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet (durée : 5 heures)

PRÉAMBULE

Dans tout le problème, $\mathcal{A}$ désigne un espace affine euclidien de dimension finie $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de l'espace vectoriel associé. On note $\det_{\mathcal{B}} (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ le déterminant des composantes sur $\mathcal{B}$ des n vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ pris dans cet ordre.

Les deuxième et troisième parties n'utilisent pas les résultats de la première.

Première partie

Dans toute cette première partie, $n = 2$

1° *a.* A, B, C étant trois points de $\mathcal{A}$, démontrer que le nombre $\frac{1}{2} |\det_{\mathcal{B}} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ ne dépend ni de l'ordre dans lequel sont énoncés les points A, B, C, ni du choix de $\mathcal{B}$. Ce nombre est, par définition, l'aire du triangle ABC, notée Aire (ABC).

b. ABCD désignant un quadrilatère convexe de diagonales AC et BD, démontrer que

$$\text{Aire (ABC)} + \text{Aire (ADC)} = \text{Aire (BAD)} + \text{Aire (BCD)}.$$

Ce nombre est, par définition, l'aire de ABCD.

c. Dans toute la suite de cette première partie, ABC désigne un triangle non aplati d'aire Δ. Démontrer que toute droite qui rencontre le triangle le partage en deux parties dont la somme des aires est Δ.

k étant un réel donné vérifiant $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$, la droite D est dite k-convenable, relativement à ABC, si elle partage ce triangle en deux parties d'aires respectives $k\,\Delta$ et $(1 - k)\,\Delta$. On se propose d'étudier l'ensemble D_k (A, B, C) des points de $\mathcal{A}$ par où ne passe aucune droite k-convenable (relativement à ABC).

2° Démontrer que si $\mathcal{T}$ est une application affine bijective de $\mathcal{A}$ dans lui-même (c'est-à-dire une transformation affine de $\mathcal{A}$), avec $A' = \mathcal{T}(A)$, $B' = \mathcal{T}(B)$, $C' = \mathcal{T}(C)$, D_k (A′, B′, C′) est l'image par $\mathcal{T}$ de D_k (A, B, C). Préciser celles de ces transformations $\mathcal{T}$ qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C\}$. Quelles propriétés de D_k (A, B, C) peut-on déduire de l'existence de telles transformations ?

3° Le plan $\mathcal{A}$ est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, x et y désignant les coordonnées d'un point quelconque dans ce repère. Soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation

$$x\,y = \frac{k}{4}.$$

a. Démontrer que toute tangente à $\mathcal{H}$ coupe la droite AB en un point B′ et la droite AC en un point C′ tels que Aire (AB′C′) $= k\,\Delta$.

b. Sur quelle partie $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$ faut-il choisir le point de contact pour que B′ soit entre A et B et C′ entre A et C? Préciser les coordonnées des points limitant $\mathcal{H}_1$.

c. Démontrer que, réciproquement, si une droite D coupe AB en B′ entre A et B et AC en C′ entre A et C, tels que Aire (AB′C′) $= k\Delta$, D est une tangente à $\mathcal{H}_1$.

d. Déduire de ce qui précède qu'une droite est k-convenable (relativement à ABC) si et seulement si elle est tangente à l'un quelconque de six arcs analogues à $\mathcal{H}_1$; on précisera ces arcs, sans autre démonstration, notamment l'arc $\mathcal{H}'_1$, qui est inclus dans la courbe d'équation $x\,y = \frac{1-k}{4}$.

Représenter ces six arcs sur une figure dans le cas $k = 0{,}3$ et, sur une autre figure, dans le cas $k = 0{,}47$; le triangle sera dessiné équilatéral, le côté mesurant 20 cm. On fera figurer les tangentes aux extrémités des six arcs.

4° On va maintenant préciser D_k (A, B, C) en utilisant le même repère que dans 3°.

a. Démontrer, en reprenant l'équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point de coordonnées x_0 et $\frac{k}{4x_0}$, qu'il passe par le point M de coordonnées x et y une tangente (au moins) à $\mathcal{H}_1$ si et seulement si

$$[(ky - k + x)\quad(y - k + kx) \leqslant 0]$$

$$\text{ou}\quad \left[\left(\frac{k}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right) \quad\text{et}\quad (y - k + kx > 0) \quad\text{et}\quad (4\,xy - k \leqslant 0)\right].$$

b. Démontrer que D_k (A, B, C) est contenu dans le demi-plan ouvert $\mathring{E}_1$ défini par l'inégalité $ky - k + x > 0$. (On peut supposer que les coordonnées de M vérifient $ky - k + x \leqslant 0$ et démontrer qu'alors

$$(ky - k + x)(y - k + kx) \leqslant 0$$

ou bien

$$[(1-k)\ y-(1-k)+1-x-y][y-(1-k)+(1-k)\ (1-x-y)] \leqslant 0$$

ou bien $[k\ (1 - x - y) - k + x][(1 - x - y) - k + kx] \leqslant 0$.)

c. D_k (A, B, C) est donc contenu dans l'intersection $\mathring{K}$ de six demi-plans analogues à $\mathring{E}_1$. Démontrer que par aucun point de $\mathring{K}$ il ne passe de tangente à $\mathcal{H}'_1$.

d. Le point M (x, y) appartenant à $\mathring{K}$, traduire par des inégalités portant sur x et y l'appartenance de M à D_k (A, B, C). Pour quelles valeurs de k D_k (A, B, C) est-il vide? (On pourra considérer x, y et $(1 - x - y)$ comme les zéros d'un certain polynôme du 3ᵉ degré.)

Faire apparaître éventuellement D_k (A, B, C) sur les figures construites au 3°.

Deuxième partie

Avant d'aborder la troisième partie, on va préciser, pour n quelconque $(n \geqslant 1)$, certains aspects des notions de polyèdre convexe et de volume. *Les propriétés rappelées dans les quatre alinéas qui suivent seront admises.*

Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est convexe si et seulement si, pour tous points M, M′ de $\mathcal{C}$, le segment MM′ (ensemble des barycentres de M, M′ affectés de coefficients positifs de somme 1) est dans $\mathcal{C}$. L'intersection d'une famille de convexes est convexe.

La suite $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ de $(n + 1)$ points de l'espace affine $\mathcal{A}$, de dimension n, étant un repère affine, à tout point M de $\mathcal{A}$ est associée une suite unique $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de réels vérifiant

$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1$ (coordonnées barycentriques de M),

de telle sorte que M est le barycentre de la famille pondérée (A_i, x_i), $0 \leqslant i \leqslant n$.

Pour toute suite $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réels *non tous égaux*, l'ensemble des points M pour lesquels $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ est un hyperplan H de $\mathcal{A}$. Tout hyperplan a une équation de cette forme.

Dans les mêmes conditions, l'ensemble des points M pour lesquels $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant 0$ est l'un des deux demi-espaces fermés de $\mathcal{A}$ limités par H, l'autre étant caractérisé par

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \leqslant 0;$$

ces deux demi-espaces sont convexes.

Pour tout repère affine $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ de $\mathcal{A}$, à chaque point A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ on associe l'hyperplan H_i contenant tous les points du repère sauf A_i, et le demi-espace fermé E_i limité par H_i et contenant A_i. On appelle alors *polyèdre élémentaire* P de sommets $A_0, A_1, \ldots, A_n$ l'intersection des $(n + 1)$ demi-espaces fermés E_i.

$\mathcal{B}$ étant une base orthonormée de l'espace vectoriel associé à $\mathcal{A}$, on considère maintenant le réel

$$\frac{1}{n!}\left|\ \det_{\mathcal{B}}\ (\overrightarrow{A_0A_1},\ \overrightarrow{A_0A_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_0A_n})\ \right|.$$

1° Démontrer que ce réel ne dépend ni de l'ordre dans lequel sont énoncés les sommets du polyèdre élémentaire P, ni du choix de la base orthonormée $\mathcal{B}$. Ce réel, noté v_n (P), est appelé volume de P.

2° Soit M un point de P, P_i le polyèdre élémentaire, défini quand $M \notin H_i$, de sommets $A_0, A_1 \ldots, A_{i-1}, M, A_{i+1}, \ldots, A_n$. Soit φ_i la fonction définie sur P par

$\varphi_i(M) = v_n(P_i)$	si P_i est défini
$\varphi_i(M) = 0$	dans le cas contraire.

a. Démontrer que φ_i est la restriction à P d'une fonction affine, c'est-à-dire d'une application affine de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Soit φ la fonction définie sur P par $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(M)$. Quelle valeur prend-elle en un sommet de P ? Démontrer que φ est constante sur P et que le volume de P est la somme des volumes des P_i définis.

3° On appelle *polyèdre fermé convexe* l'intersection K, lorsqu'elle est *bornée* et *non vide*, d'un nombre fini p de demi-espaces fermés de $\mathcal{A}$.

a. Démontrer que $p \geqslant n + 1$. On pourra, en le justifiant, utiliser le fait que l'intersection de q hyperplans *vectoriels* contient une droite *vectorielle*, si $q \leqslant n - 1$.

b. Lorsqu'un polyèdre fermé convexe K est contenu dans un hyperplan de $\mathcal{A}$, on dit qu'il est aplati. Démontrer que si K est un polyèdre fermé convexe non aplati, intersection de $(n+1)$ demi-espaces fermés E_i de $\mathcal{A}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, les $(n+1)$ hyperplans limitant les E_i se coupent n par n en un point unique, et que K est le polyèdre élémentaire admettant pour sommets les $(n+1)$ points ainsi obtenus.

4° *a.* Établir que pour que la suite réelle (y_0, y_1, y_2) satisfasse au système d'inégalités

$$S : [y_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_2 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad y_0 + y_1 + y_2 \geqslant 0]$$

il faut et il suffit qu'elle satisfasse à l'un ou l'autre des systèmes S', S"

$$S' : [y_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_2 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 \geqslant 0]$$
$$S'' : [y_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_0 + y_1 + y_2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 \leqslant 0].$$

b. Plus généralement, m et p étant deux entiers vérifiant $0 \leqslant p \leqslant m$, démontrer que pour que la suite de réels $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ vérifie le système suivant S de $(m+2)$ inégalités

$$S : \begin{cases} y_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant p \\ \text{et } y_i \leqslant 0 \text{ pour tout } i \text{ (s'il en existe) tel que } p+1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{et } y_0 + y_1 + \ldots + y_m \geqslant 0 \end{cases}$$

il faut et il suffit que la suite $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ vérifie l'un au moins de t systèmes d'inégalités $S'_1, S'_2, \ldots S'_t$, chacun des systèmes S'_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$ satisfaisant aux trois conditions :

α. S'_j est la conjonction de $(m+1)$ inégalités de la forme $z_s \geqslant 0$ (ou $z_s \leqslant 0$), z_s désignant soit un y_i, soit une somme de y_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$.

β. Le système S''_j, obtenu en remplaçant dans S'_j chaque inégalité large par une inégalité stricte, a des solutions.

γ. Si $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ vérifie simultanément deux systèmes distincts $S'_j, S'_{j'}$, (ce qui exige $t \geqslant 2$), alors un certain z_s est nul.

On pourra procéder par récurrence sur m; après avoir formulé l'hypothèse de récurrence convenable, on remarquera la vérité de la proposition :

$$[(y_1 + y_2 + \ldots + y_m \geqslant 0) \quad \text{ou} \quad (y_1 + y_2 + \ldots + y_m \leqslant 0)]$$

5° Soit P le polyèdre élémentaire dont les sommets sont les points du repère affine $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$, E un demi-espace fermé de $\mathcal{A}$ limité par l'hyperplan H, K l'intersection (supposée non vide et non aplatie) de P et de E.

a. Démontrer qu'un point M appartient à K si et seulement si ses coordonnées barycentriques $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ vérifient un système de $(n+2)$ inégalités, de la forme :

$$\left[(\forall i,\ 0 \leqslant i \leqslant n,\ x_i \geqslant 0) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \geqslant 0 \right]$$

où les α_i sont des réels non tous égaux.

b. En posant, pour $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_i x_i = y_i$ et en utilisant 4° *b.* de la deuxième partie, démontrer que K est la réunion de polyèdres élémentaires constituant une famille finie $\mathcal{F}$ telle que l'ensemble des points communs à deux quelconques de ces polyèdres soit contenu dans une réunion finie d'hyperplans de $\mathcal{A}$. On note $V_{\mathcal{F}}$ la somme des volumes des polyèdres de la famille $\mathcal{F}$.

On admettra que si K est aussi la réunion de polyèdres élémentaires constituant une autre famille finie $\mathcal{F}'$ possédant la même propriété, alors $V_{\mathcal{F}'} = V_{\mathcal{F}}$. Par définition ce réel sera appelé volume de K et noté v_n (K).

A un polyèdre aplati, ainsi qu'à l'ensemble vide, on attribuera un volume nul.

Troisième partie

Dans $\mathcal{A}$, de dimension finie n quelconque $(n \geqslant 1)$, on se donne un polyèdre élémentaire P de volume v_n (P). Soit k un réel vérifiant $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$.

Un hyperplan H de $\mathcal{A}$ est dit k-convenable (*sous-entendu relativement à* P) s'il partage P en deux polyèdres de volumes respectifs $k\, v_n$ (P) et $(1-k)\, v_n$ (P). On appelle D_k (P) l'ensemble des points de $\mathcal{A}$ par où ne passe aucun hyperplan k-convenable.

1° On note Σ l'ensemble des suites réelles $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ où les α_i ne sont pas tous égaux. Soit g la fonction qui à $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Sigma$ associe le volume v_n (K) de l'intersection K de P et du demi-espace fermé E de $\mathcal{A}$ caractérisé par

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant 0 .$$

Soit m, p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant m \leqslant n$.

Soit $\mathcal{L}(m, p)$ la partie de Σ définie par les conditions :

$$\begin{cases} \text{pour tout } i \text{ vérifiant } 0 \leqslant i \leqslant p, & \alpha_i > 0 . \\ \text{pour tout } i \text{ (s'il en existe) vérifiant } p+1 \leqslant i \leqslant m, & \alpha_i < 0 \\ \text{pour tout } i \text{ (s'il en existe) vérifiant } m+1 \leqslant i \leqslant n, & \alpha_i = 0. \end{cases}$$

Démontrer que la restriction à $\mathcal{L}(m, p)$ de la fonction g est une fonction rationnelle de $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donc continue sur $\mathcal{L}(m, p)$ considérée comme partie de l'espace normé $\mathbb{R}^{n+1}$.

On admettra que g est continue sur Σ et vérifie la propriété de « la valeur intermédiaire ».

2° Démontrer que si par M_0 de $\mathcal{A}$ il passe un hyperplan k-convenable, alors pour tout réel k' tel que $k \leqslant k' \leqslant \dfrac{1}{2}$ il passe par M_0 un hyperplan k'-convenable.

3° Soit H un hyperplan k-convenable. Il partage P en deux polyèdres dont l'un, soit Π, a pour volume $k\, v_n$ (P). Soit M un point quelconque de Π ; démontrer que M n'appartient pas à D_k (P). (On pourra considérer l'hyperplan parallèle à H et contenant M.) En déduire que D_k (P) est convexe.

4° Démontrer que si D_k (P) est non vide, l'isobarycentre des sommets de P appartient à D_k (P). (On pourra utiliser la convexité de D_k (P) et l'existence de transformations affines de $\mathcal{A}$ laissant globalement invariant l'ensemble des sommets de P.)