PREPARATION AU C.A.P.E.S.

SESSION DE 1976

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

PRÉAMBULE

Dans tout le problème, V désigne un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3 ; on note $\| \ \|$ la norme associée au produit scalaire défini sur V.

$\mathcal{O}$ (V) désigne le groupe orthogonal de V. *On se propose d'étudier les sous-groupes finis (c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini d'éléments) de* $\mathcal{O}$ (V).

On rappelle que l'*ordre* d'un groupe fini est le nombre de ses éléments et qu'un groupe fini est *cyclique* lorsqu'il est engendré par un de ses éléments.

Le cardinal d'un ensemble X sera noté card X.

On dit qu'une bijection f d'un ensemble X sur lui-même *laisse invariant* ou *conserve* un sous-ensemble Y de X lorsque $f(Y) = Y$.

On rappelle que f^{-1} désigne la bijection réciproque de f.

Par abréviation, une symétrie vectorielle de V sera appelée symétrie et une rotation vectorielle de V sera appelée rotation. L'identité de V, notée Id_V, est considérée comme une rotation particulière de V. De même l'identité d'un espace affine $\mathcal{V}$ est considérée comme une rotation (affine) particulière de $\mathcal{V}$.

Le symbole $\circ$ est celui de la composition des applications. Quand il sera question de groupe, on sous-entendra « pour la loi $\circ$ ».

On rappelle enfin que tout espace vectoriel V peut être muni d'une structure d'espace affine sur lui-même. On pourra donc parler indifféremment de vecteurs ou de points pour désigner les éléments de V et *on représentera les situations rencontrées dans V par des figures.*

Tournez la page S. V. P.

Première partie

Dans cette partie la dimension de V est 2

A

Soit $\mathcal{V}$ un plan affine dont l'espace vectoriel associé est V. Dans $\mathcal{V}$ rapporté à un repère orthonormé, on considère le carré ABCD dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$.

1° Démontrer que toute isométrie affine de $\mathcal{V}$ conservant l'ensemble de points $\{ A, B, C, D \}$ laisse invariant le point O, origine du repère et que l'ensemble $\mathcal{D}$ de ces isométries est un groupe isomorphe d'une part à un sous-groupe de $\mathcal{O}(V)$, d'autre part à un sous-groupe du groupe des permutations de 4 éléments.

2° Trouver un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de $\mathcal{D}$.

3° Démontrer que $\mathcal{D}$ est engendré par deux symétries orthogonales par rapport à des droites que l'on précisera.

B

On donne un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(V)$, soit $\mathcal{G}$, et on appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des rotations appartenant à $\mathcal{G}$.

1° Démontrer que $\mathcal{H}$ constitue un sous-groupe de $\mathcal{G}$.

2° A toute rotation R de V on associe le réel $\theta(R)$, appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi]$, qui détermine l'angle de la rotation R et est appelé *mesure* de R. On aura en particulier ici pour mesure de la rotation identité de V (Id_V) le nombre 2π. Démontrer qu'il existe un élément R_1 de $\mathcal{H}$ dont la mesure est minimale, c'est-à-dire vérifie

$$\forall\, R \in \mathcal{H}, \quad \theta(R) \geqslant \theta(R_1).$$

Démontrer que, pour tout $R \in \mathcal{H}$, il existe un entier naturel m tel que $\theta(R) = m\,\theta(R_1)$. En déduire que $\mathcal{H}$ est un groupe cyclique dont R_1 est un générateur.

Exprimer $\theta(R_1)$ en fonction de l'ordre n de $\mathcal{H}$.

3° Déterminer un ensemble A d'éléments de V tel que $\mathcal{H}$ constitue l'ensemble des rotations de V laissant A invariant.

Donner en fonction de n le nombre minimum d'éléments de A.

4° On suppose $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$ et on désigne par S une symétrie orthogonale donnée appartenant à $\mathcal{G}$.

On désigne par $S\mathcal{H}$ l'ensemble, noté $\{ S \circ R \mid R \in \mathcal{H} \}$, des $S \circ R$ tels que $R \in \mathcal{H}$.

a. Démontrer que $S\mathcal{H}$ ne contient que des symétries orthogonales.

b. Démontrer que l'on a

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup S\mathcal{H}.$$

c. Exprimer les éléments de $\mathcal{G}$ en fonction de S et de R_1.

5° Démontrer qu'il existe deux types de sous-groupes finis de $\mathcal{O}(V)$ et en préciser la nature.

6° On reprend la situation du paragraphe 4° ci-dessus.

Soit (u_1, u_2) une base orthonormée de vecteurs propres de S ; donner dans cette base les matrices de S, R_1 et $T = R_1 \circ S$ (on appelle toujours n l'ordre de $\mathcal{H}$).

Caractériser T et démontrer que $\mathcal{G}$ admet un système de générateurs constitué par des symétries orthogonales que l'on précisera.

7° V étant rapporté à la base (u_1, u_2) utilisée ci-dessus, et x étant un élément non nul de V, on désigne par $\operatorname{Arg} x$ la mesure de l'angle (u_1, x), nombre réel appartenant à $]0, 2\pi]$. On pose

$$F = \left\{ x \in V \;\middle|\; 0 < \operatorname{Arg} x < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

En supposant que $n = 4$, représenter sur un dessin F et ses images respectives par T, $T \circ S$, $T \circ S \circ T$, $S \circ T \circ S \circ T$, $S \circ T \circ S$, $S \circ T$ et S.

Tournez la page S. V. P.

Deuxième partie

Dans cette partie la dimension de V est 3

Soit $\mathcal{V}$ un espace affine dont l'espace vectoriel associé est V. Dans $\mathcal{V}$ rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, on désigne par Σ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine O du repère, et par Γ le cube ABCDA'B'C'D', les trois coordonnées de chaque sommet de Γ appartenant à l'ensemble $\{ 1 , -1 \}$. Dessiner le cube Γ.

1° Démontrer que toute rotation affine de $\mathcal{V}$ conservant l'ensemble des sommets de Γ laisse invariant le point O; justifier rapidement le fait que l'ensemble $\mathcal{H}_\Gamma$ de ces rotations constitue un groupe fini, isomorphe d'une part à un sous-groupe de $\mathcal{O}$ (V), d'autre part à un sous-groupe du groupe des permutations de 8 éléments.

Soient deux sommets appartenant à une même arête du cube Γ. Démontrer que la seule rotation affine appartenant à $\mathcal{H}_\Gamma$ et laissant invariant chacun de ces deux sommets est l'identité de $\mathcal{V}$. En déduire que le nombre d'éléments de $\mathcal{H}_\Gamma$ est au plus 24.

2° Démontrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_\Gamma$ qui laissent invariant un sommet donné de Γ constitue un sous-groupe d'ordre 3 de $\mathcal{H}_\Gamma$.

On rappelle que l'*ordre d'un élément* g d'un groupe fini est le plus petit entier q strictement positif tel que g^q (composé de q éléments égaux à g) soit l'élément neutre du groupe. Déterminer tous les éléments d'ordre 3 de $\mathcal{H}_\Gamma$.

3° Déterminer les éléments d'ordre 4 de $\mathcal{H}_\Gamma$, puis les éléments d'ordre 2 de $\mathcal{H}_\Gamma$.

Décrire tous les éléments de $\mathcal{H}_\Gamma$.

4° On appelle *pôle* d'une rotation de $\mathcal{V}$ (autre que l'identité de $\mathcal{V}$) tout point intersection de la sphère Σ et de l'axe de cette rotation. Représenter sur un dessin la portion du cube Γ et la portion de la sphère Σ situées dans la région de $\mathcal{V}$ définie par $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, ainsi que les demi-axes des rotations appartenant à $\mathcal{H}_\Gamma$ qui sont situés dans cette région et les pôles appartenant à ces demi-axes.

On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles des rotations (autres que l'identité de $\mathcal{V}$) appartenant à $\mathcal{H}_\Gamma$.

a. Calculer card $\mathcal{P}$.

b. Démontrer que $\mathcal{P}$ est invariant par toute rotation appartenant à $\mathcal{H}_\Gamma$ et qu'il en est de même de l'ensemble des pôles des éléments d'ordre 3 de $\mathcal{H}_\Gamma$ et de l'ensemble des pôles des éléments d'ordre 4 de $\mathcal{H}_\Gamma$.

c. Démontrer que l'on peut déterminer un ensemble $\{ P_1 , P_2 , P_3 \}$ de pôles éléments de $\mathcal{P}$ tels que si Ω_i désigne l'ensemble des images de P_i par tous les éléments de $\mathcal{H}_\Gamma$, l'on ait

α. $\quad \mathcal{P} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$

et β. $\quad \Omega_j \cap \Omega_k = \varnothing \qquad$ si $j \neq k$,

i, j et k étant éléments de $\{ 1, 2, 3 \}$.

(Ω_i sera appelé *orbite de* P_i.)

d. Calculer l'ordre des sous-groupes de $\mathcal{H}_\Gamma$ qui laissent invariants P_1 , P_2 et P_3 respectivement. Quelle relation existe-t-il entre l'ordre de $\mathcal{H}_\Gamma$, le cardinal de Ω_i et l'ordre du sous-groupe de $\mathcal{H}_\Gamma$ qui laisse P_i invariant ?

Tournez la page S. V. P.

TROISIÈME PARTIE

Dans cette partie la dimension de V *est* 3

A

$\mathcal{G}$ désigne un sous-groupe fini de $\mathcal{O}$ (V) et $\mathcal{H}$ est l'ensemble des rotations de $\mathcal{G}$. On suppose $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$.

1° Démontrer qu'on peut trouver un élément S de $\mathcal{G}$ tel que

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup S\,\mathcal{H}.$$

(On rappelle la notation $S\,\mathcal{H} = \{ S \circ R \quad | \quad R \in \mathcal{H} \}$.)

Caractériser S, puis montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$.

2° Soit σ la sphère unité de V, $\sigma = \{ x \in V \quad | \quad \| x \| = 1 \}$.

Démontrer que, si R est une rotation de V distincte de Id_V, il existe deux éléments, et deux seulement, x_1 et x_2, de σ, qui sont invariants par R; x_1 et x_2 sont appelés *pôles* de R.

3° Démontrer que, si x est un pôle d'une rotation R appartenant à $\mathcal{H}$, alors, pour tout élément T de $\mathcal{G}$, T (x) est pôle d'une rotation R' que l'on précisera.

4° On appelle *stabilisateur* d'un élément x de V l'ensemble $\mathcal{H}_x$ des éléments de $\mathcal{H}$ laissant x invariant et *orbite* de x l'ensemble Ω_x des images de x par les éléments de $\mathcal{H}$.

On désigne par n l'ordre de $\mathcal{H}$.

On se donne x, pôle d'une rotation appartenant à $\mathcal{H}$ et on considère l'application

$$\varphi_x : \begin{array}{l} \mathcal{H} \longrightarrow \Omega_x \\ R \longmapsto R(x) \end{array}$$

et la relation γ définie sur $\mathcal{H}$ par

$$(R_1 \ \gamma \ R_2) \Leftrightarrow R_2^{-1} \circ R_1 \in \mathcal{H}_x.$$

a. Vérifier que γ est une relation d'équivalence, et, en utilisant φ_x, que l'ensemble-quotient $\mathcal{H}/\gamma$ peut être mis en bijection avec Ω_x.

En déduire que l'on a

$$n = n_x\, v_x$$

en posant $n_x = \operatorname{card} \mathcal{H}_x$ et $v_x = \operatorname{card} \Omega_x$.

b. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des couples (R, x) où R est un élément de $\mathcal{H}$ autre que Id_V et où x est un pôle de R. Démontrer que

$$\operatorname{card} \mathcal{U} = 2\,(n - 1).$$

5° On suppose que l'ensemble des pôles des éléments de $\mathcal{H}$ contient k orbites distinctes, on choisit un pôle sur chaque orbite et on obtient ainsi un ensemble de pôles $\{ x_1, x_2, \dots x_k \}$. Démontrer que l'on a

$$\operatorname{card} \mathcal{U} = \sum_{j=1}^{k} v_j\,(n_j - 1)$$

où l'on a posé, pour alléger les notations,

$$v_{x_j} = v_j \quad \text{et} \quad n_{x_j} = n_j.$$

6° Démontrer que l'on a

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \quad \text{et} \quad k \neq 1.$$

7° Démontrer que les seules valeurs éventuelles de k sont 2 et 3.

8° Démontrer que, si $k = 2$, alors $\mathcal{H}$ est un groupe cyclique.

9° On suppose maintenant que l'on a $k = 3$ et, pour fixer les notations, on pose

$$n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3.$$

Établir les résultats suivants :

a. $n_1 = 2$

b. $n_2 \in \{ 2, 3 \}$

c. si $n_2 = 3$, alors $n_3 \in \{ 3, 4, 5 \}$.

10° Démontrer que, si l'on a

$$\begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = 3 \\ n_3 = 4, \end{cases}$$

alors $\mathcal{H}$ est isomorphe au groupe $\mathcal{H}_T$ de la deuxième partie du problème.

Tournez la page S. V. P.

25 ex

Vendredi 9 01 75

11° Pouvez-vous de[illegible]re les ensembles de points (sommets de polyèdres réguliers) jouant un rôle analogue à celui des sommets A, B, C, D, A', B', C', D' du cube Γ (cf. deuxième partie du problème) pour les éventualités :

a. $n_1 = 2\,,\quad n_2 = n_3 = 3$

b. $n_1 = 2\,,\quad n_2 = 3\,,\quad n_3 = 5\,?$

B

1° Soit $\mathcal{K}$ un groupe de rotations de V. On désigne par $-$ E la composée d'un endomorphisme E de V et de l'homothétie de V dont le rapport est -1. On considère l'ensemble

$$\widetilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \cup \{-R \mid R \in \mathcal{K}\}.$$

Démontrer que $\widetilde{\mathcal{K}}$ constitue un groupe dont ~~le sous-groupe des rotations~~ est $\mathcal{K}$.

2° $\mathfrak{J}$ étant un sous-groupe de $\mathcal{K}$ et R_1 un élément de $\mathcal{K}$ $(R_1 \notin \mathfrak{J})$, on pose

$$R_1\,\mathfrak{J} = \{R_1 \circ R \mid R \in \mathfrak{J}\}.$$

On suppose que $\mathfrak{J}$ est tel que

$$\mathcal{K} = \mathfrak{J} \cup R_1\,\mathfrak{J}.$$

Démontrer que l'ensemble

$$\widehat{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J} \cup \{-R \mid R \in R_1\,\mathfrak{J}\}$$

constitue un groupe dont $\mathfrak{J}$ est le sous-groupe des rotations.

3° On revient à la situation du début de la troisième partie : $\mathcal{G}$ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(V)$, $\mathcal{H}$ le sous-groupe des rotations de $\mathcal{G}$ $(\mathcal{H} \neq \mathcal{G})$ et S un élément de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup S\,\mathcal{H}$.

Démontrer que $S^2 \in \mathcal{H}$.

Démontrer que l'ensemble

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} \cup (-S)\,\mathcal{H}$$

constitue un groupe de rotations de V.

4° Donner le catalogue des sous-groupes finis de $\mathcal{O}(V)$.