1975

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

PRÉAMBULE

a. Notations.

R et **C** désignent respectivement le corps des réels et le corps des complexes.

i est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

$\bar{z}$ est le conjugué du complexe z.

$\mathbf{C}^2$ est l'ensemble des couples de complexes; si X et Y sont deux éléments de cet ensemble, on les note respectivement :

$$X = (x, x') \qquad \text{et} \qquad Y = (y, y')$$

avec

$$\begin{cases} x = a_1 + ia_2 \\ x' = a_3 + ia_4 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y = b_1 + ib_2 \\ y' = b_3 + ib_4 \end{cases}$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ sont réels.

X étant un élément de $\mathbf{C}^2$, $\bar{X}$ désigne l'élément $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{x}')$.

b. Rappel.

Étant donné Ω_1 et Ω_2, sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E, on considère la décomposition de tout vecteur V de E en :

$$V = V_1 + V_2$$

avec $V_1 \in \Omega_1$ et $V_2 \in \Omega_2$.

On appelle « symétrie par rapport à Ω_1 suivant Ω_2 » l'application de E dans E définie par :

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \\ V \longmapsto V' = V_1 - V_2 \end{cases}$$

Tournez la page S. V. P.

PREMIÈRE PARTIE

1° On munit $\mathbf{C}^2$ des lois habituelles d'addition et de multiplication par un réel.

Démontrer que $(\mathbf{C}^2, +, .)$ ainsi obtenu est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, que l'on notera E; déterminer la dimension de E.

2° On désigne par P et par Q les ensembles des vecteurs de E correspondant respectivement à :

$$a_2 = a_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_1 = a_3 = 0$$

Démontrer que P et Q sont des plans vectoriels (sous-espaces de dimension 2).

Démontrer : $\mathbf{E} = \mathbf{P} \oplus \mathbf{Q}$.

Si l'on pose :

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (i, 0), \quad e_3 = (0, 1), \quad e_4 = (0, i),$$

démontrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) constitue une base A de E.

3° On considère l'application ψ de E dans E définie par :

$$\psi \begin{cases} \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E} \\ \mathbf{X} \longmapsto \psi(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{X}} \end{cases}$$

Démontrer que ψ est un automorphisme involutif de E.

DEUXIÈME PARTIE

1° On considère l'application f définie par :

$$f \begin{cases} \mathbf{E} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathcal{R}(xy + x'y') : \end{cases}$$

c'est dire que $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est la partie réelle du complexe $xy + x'y'$.

a. Démontrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.

b. Est-ce un produit scalaire?

b. On dit que X et Y sont conjugués par rapport à f si, et seulement si, $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est nul : démontrer que l'ensemble des vecteurs de E conjugués par rapport à f d'une famille donnée de vecteurs de E constitue un sous-espace vectoriel de E.

Deux sous-espaces de E, E_1 et E_2, sont dits conjugués par rapport à f si tout X_1 de E_1 et tout X_2 de E_2 sont conjugués par rapport à f : démontrer que P et Q sont conjugués par rapport à f.

c. On note G l'ensemble des vecteurs de E qui sont conjugués d'eux-mêmes par rapport à f : démontrer que G n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

d. Déterminer $\mathrm{P} \cap \mathrm{G}$ et $\mathrm{Q} \cap \mathrm{G}$.

2° On considère l'application φ définie par :

$$\varphi \begin{cases} \mathbf{E} \times \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R} \\ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longmapsto \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = f(\mathrm{X}, \bar{\mathrm{Y}}) \end{cases}$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite du problème on considère l'espace euclidien (E, φ).

Démontrer que A est une base orthonormée.

Préciser la définition géométrique de l'application ψ rencontrée en I, 3°.

3° On pose :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4), \qquad \varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4).$$

Démontrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ constitue une base orthonormée B de E.

On désigne respectivement par :

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \qquad \text{et} \qquad (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

les composantes de X et Y dans B : exprimer f dans B.

Former l'équation de G dans B.

4° On considère les deux sous-espaces vectoriels de E (hyperplans, de dimension 3) ayant respectivement pour équations :

$$\alpha u_1 - \beta u_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha u_4 + \beta u_2 = 0$$

où (α, β) est un couple de réels différent de $(0, 0)$.

a. Démontrer que l'intersection de ces hyperplans vectoriels est un plan vectoriel H ; on désigne par $\mathcal{F}$ la famille de tels plans vectoriels.

Démontrer que H décrit G quand [illegible] décrit $\mathbf{R}^2 - (0, 0)$.

b. Démontrer que G peut être engendré par les plans vectoriels H′ d'une seconde famille $\mathcal{F}'$ que l'on précisera.

c. Démontrer que l'intersection d'un plan vectoriel H et d'un plan vectoriel H′ est une droite vectorielle que l'on déterminera.

d. H et H′ étant fixés dans leurs familles respectives, démontrer qu'ils ne sont pas orthogonaux, mais que H contient une droite vectorielle Δ unique orthogonale à H′. Démontrer que, H′ restant fixe et H décrivant $\mathcal{F}$, Δ engendre un plan vectoriel de $\mathcal{F}'$, orthogonal à H′.

TROISIÈME PARTIE

Si X et Y sont deux vecteurs de E à la fois conjugués par rapport à f et orthogonaux, on dit qu'ils sont ortho-conjugués.

1° Démontrer que A est une base ortho-conjuguée mais que B n'en est pas une.

2° Si X est un élément fixé dans E, démontrer que l'ensemble des éléments ortho-conjugués de X est un sous-espace vectoriel T_X de E dont on discutera la dimension.

3° On suppose X choisi de telle manière que T_X soit un plan vectoriel.

Démontrer alors que, si Y décrit T_X, T_Y contient un plan vectoriel qui ne dépend pas du choix de Y.

QUATRIÈME PARTIE

On se propose de visualiser une partie des résultats précédents.

On envisage un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ associé au point O et à l'espace vectoriel E. On désigne par (O, A_1, A_2, A_3, A_4) le repère de $\mathcal{E}$ associé à la base A de E.

A tout vecteur X de E on associe le point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées (a_1, a_2, a_3, a_4). On désigne par $\mathcal{G}$ l'image de G dans $\mathcal{E}$.

Tournez la page S. V. P.

1° Démontrer que l'intersection de $\mathcal{G}$ et du sous-espace affine ayant (O, A_1, A_2, A_3) pour repère est un cône de révolution $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

Déterminer les plans de symétrie de $\mathcal{C}$.

2° On désigne par $\mathcal{L}$ l'hyperplan affine dont l'équation est $a_4 = 1$; on pose

$$\mathcal{U} = \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$$

a. Démontrer que $\mathcal{U}$ est une surface de révolution dont on déterminera une courbe méridienne.

Représenter $\mathcal{U}$ par un dessin en perspective cavalière ou par une épure.

b. Étudier la nature de la section de $\mathcal{U}$ par un plan variable contenant O et A_1.

c. Démontrer qu'il existe deux droites de $\mathcal{U}$ situées dans l'hyperplan affine ayant pour équation $a_3 = 1$.

Soit $\mathcal{D}$ l'une de ces droites : étudier l'intersection de $\mathcal{U}$ et d'un plan variable contenant $\mathcal{D}$.

3° On désigne par H_k l'ensemble des vecteurs X de E qui vérifient la la relation

$$f(X, X) = k$$

où k est un réel.

$\mathcal{H}_k$ est l'image de H_k dans $\mathcal{E}$.

a. Démontrer que, si k n'est pas nul, H_k ne contient aucun sous-espace vectoriel de E.

b. Pour $kk' > 0$, donner une transformation simple qui fasse passer de $\mathcal{H}_k$ à $\mathcal{H}_{k'}$.

c. On désigne par $\mathcal{S}_k$ l'intersection de $\mathcal{H}_k$ et de l'hyperplan affine dont l'équation est $a_4 = 0$.

Démontrer que $\mathcal{S}_k$ est une surface de révolution dont on précisera l'axe et une courbe méridienne.

Représenter dans un plan méridien les différentes formes des courbes méridiennes et leurs positions relatives suivant les valeurs de k.

Représenter par un dessin en perspective cavalière ou par une épure l'ensemble des trois surfaces $\mathcal{S}_{-1}$, $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ limitées aux hyperplans ayant pour équations respectives $a_2 = -2$ et $a_2 = 2$.

4° Déterminer l'intersection avec $\mathcal{L}$ des plans situés dans $\mathcal{G}$ et montrer que $\mathcal{U}$ est engendrée par l'une ou l'autre de deux familles de droites.