b. Étant donné un élément p unitaire, montrer qu'il existe un nombre réel α et un vecteur v unitaire de F tels que

$$p = (\cos\alpha)\, e_1 + (\sin\alpha)\, v\,.$$

Montrer que les endomorphismes f_p et g_p peuvent alors s'écrire :

$$f_p = (\cos\alpha)\,\mathrm{I} + (\sin\alpha) f_v \qquad \text{et} \qquad g_p = (\cos\alpha)\,\mathrm{I} + (\sin\alpha)\, g_v$$

où I désigne l'application identique.

2° Dans cette question III. 2° et la suivante III. 3° on prendra p unitaire sous la forme

$$p = (\cos\alpha)\, e_1 + (\sin\alpha)\, v$$

avec $\sin\alpha \neq 0$.

a. Montrer que les endomorphismes f_p, g_p, f_v, g_v sont des isométries positives de E;

b. Montrer que f_v (resp g_v) transforme tout vecteur u non nul de E en un vecteur u' (resp u'') orthogonal à u.

c. Que peut-on dire de f_v^2 et g_v^2 ?

d. Montrer que le plan Π_1 (resp Π_2) défini et orienté par la base (u, u') [resp (u, u'')] est stable par f_p (resp g_p).

Quelle est la restriction de f_p (resp g_p) à Π_1 (resp Π_2).

3° *a.* Montrer que le plan (P) défini et orienté par la base $(e_1\,; v)$ est stable par f_v, g_v, f_p, g_p.

b. Si u est un vecteur unitaire orthogonal à (P), montrer que $(e_1\,; v\,; u\,; u')$ forme une base orthonormée et que $u'' = -u'$.
(On pourra utiliser la transformation h_v).

c. Écrire les matrices de f_p et g_p relatives à la base $(e_1\,; v\,; u\,; u')$.

53-0-2 J. 1242

SESSION DE 1974

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

PARTIE I

1° Étant donnée une matrice carrée A, de n lignes et n colonnes, à éléments réels, on appelle trace de A et on note tr A, la somme des éléments de la diagonale principale de A. Ainsi si a_{ij} désigne l'élément placé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, on a :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

Montrer que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)\,.$$

En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2° Soit F un espace vectoriel euclidien de dimension 3.
Soit, relativement à une base orthonormée de F convenue de sens direct, A la matrice d'une rotation vectorielle f, *distincte de l'application identique.*

La rotation vectorielle f est définie comme il suit :

— Un axe est la droite vectorielle définie et orientée par le vecteur unitaire u.

— Une mesure de la rotation associée à cet axe est le nombre réel θ.

a. A l'aide d'une base orthonormée auxiliaire dont le troisième vecteur est le vecteur unitaire u, calculer $\cos\theta$ en fonction de la trace de A;

b. x désignant un élément quelconque non nul de F, non colinéaire à u, montrer que, par rapport à toute base de sens direct de F, le déterminant des vecteurs $(x, f(x), u)$ a le signe de $\sin\theta$, ce déterminant ne s'annulant que si $\sin\theta = 0$.

Tournez la page S. V. P.

On pourra se ramener au cas où le vecteur x est unitaire et orthogonal à u [on rappelle que le déterminant des vecteurs $(x, f(x), u)$ dans une base est le déterminant de la matrice dont les colonnes ont pour éléments respectifs les coordonnées des vecteurs x, $f(x)$ et u dans cette base].

3° Utiliser les résultats précédents pour caractériser la rotation f dont la matrice A par rapport à une base orthonormée convenue de sens direct est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déterminera un axe de f par le choix de celui des vecteurs unitaires invariants dont la première coordonnée est positive et on donnera une mesure de la rotation f associée à cet axe.

PARTIE II

On considère un espace vectoriel euclidien E de dimension 4 rapporté à la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ convenue de sens direct.

On désigne respectivement par E_1 et F les sous-espaces définis et orientés par les bases (e_1) d'une part, (e_2, e_3, e_4) d'autre part.

p étant un élément non nul de E, p s'écrit

$$p = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$$

$(a, b, c, d$ désignant des nombres réels$)$.

On définit les endomorphismes f_p et g_p de E par leurs matrices A_p et B_p relatives à $\mathcal{B}$:

$$(\text{pour } f_p) \quad A_p = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix};$$

$$(\text{pour } g_p) \quad B_p = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme identique et la matrice unité d'ordre 4 seront notés I.

1° *a.* Effectuer le produit de la matrice A_p par sa transposée; effectuer le produit de la matrice B_p par sa transposée;

b. Peut-on trouver λ réel pour que les endomorphismes λf_p et λg_p soient des isométries positives de E ?

c. Les matrices A_p et B_p sont-elles inversibles? Si oui, calculer leurs inverses A_p^{-1} et B_p^{-1};

d. Montrer que l'ensemble des f_p (resp. g_p) où p décrit l'ensemble des éléments *non nuls* de E, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

(On précisera les transformations $f_p \circ f_q$ et $g_p \circ g_q$, q étant également un élément non nul de E.)

e. Peut-on déterminer p pour avoir $f_p = g_p$? Si oui, donner tous les éléments qui conviennent.

2° *a.* Montrer que $g_p^{-1} \circ f_p$ est une isométrie de E qui laisse stables E_1 et F.

Dans toute la fin de cette question II. 2° on suppose que $p = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ *est tel que* $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

b. Soit h_p la restriction de $g_p^{-1} \circ f_p$ à F. Déduire de l'étude du noyau de $g_p - f_p$ un vecteur propre de h_p et la valeur propre associée.

c. En utilisant les résultats de la partie I, montrer que h_p est une rotation vectorielle de F, dont on déterminera un axe et une mesure associée à cet axe.

3° Montrer que, pour toute rotation vectorielle φ de F, il existe un élément non nul p de E tel que $\varphi = h_p$.

PARTIE III

1° *a.* Montrer que si p et q sont colinéaires non nuls :

$$h_p = h_q \quad (p \in E ; q \in E).$$

Montrer que l'on obtient tous les endomorphismes h_p étudiés à la partie II, en se limitant au cas où p est unitaire.

Tournez la page S. V. P.