CAPES DE MATHÉMATIQUES (SESSION 1973)

SECONDE ÉPREUVE

PRÉLIMINAIRE

On « complète » l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes par un élément ω ($\omega \notin \mathbf{C}$) et l'on pose :

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\omega\}$$

Les règles de calcul dans $\overline{\mathbf{C}}$ sont lorsque ω n'intervient pas, les règles usuelles dans $\mathbf{C}$. En outre toute fonction homographique :

$$f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$$
$$(p,\ q,\ r,\ s \quad \text{éléments de } \mathbf{C}, \qquad r \neq 0)$$

sera « prolongée » dans $\overline{\mathbf{C}}$ par la convention :

$$f(\omega) = \frac{p}{r}$$

(donc en particulier, si $f(z) = \dfrac{q}{z}$, $\quad f(\omega) = 0$ pour tout q élément de $\mathbf{C}$).

Selon l'usage, à tout nombre complexe $a = \alpha + i\beta$ (α et β réels) on associe bijectivement dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, le point A de coordonnées α et β; le nombre complexe a est dit affixe de A. Si l'on veut rappeler ce fait, on écrira $A(a)$.

L'ensemble $\overline{\mathcal{P}}$ des images des éléments de $\overline{\mathbf{C}}$ est l'union du plan $\mathcal{P}$ et d'un ensemble dont l'élément unique Ω est appelé « image » de ω; ω est dit « affixe » de Ω et l'on pourra écrire $\Omega(\omega)$. Ω sera aussi appelé point, mais ne pourra être représenté dans $\mathcal{P}$:

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\Omega\}$$

Dans $\mathcal{P}$, le mot « cercle » sera toujours pris dans son sens strict (points non alignés).

Les solutions de certaines questions pourront être utilement illustrées de figures géométriques.

PREMIÈRE PARTIE

On considère trois points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ de $\mathcal{P}$ tel que les quatre points O, A, B, C soient deux à deux distincts :

$$abc(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0.$$

Au triplet (A, B, C) on associe le nombre complexe :

$$k = \frac{b(c-a)}{c(b-a)}$$

1° Démontrer que k n'est égal ni à zéro, ni à un.

2° On associe de la même manière un nombre complexe à chacun des cinq autres triplets que l'on peut former avec les trois points A, B, C. (Par exemple, au triplet (B, C, A) sera associé le nombre complexe $\dfrac{c(a-b)}{a(c-b)}$).

Exprimer chacun de ces cinq nombres complexes en fonction de k seul. (On trouvera suivant le cas une fonction affine ou une fonction homographique).

3° Démontrer que les six nombres complexes ainsi obtenus sont réels si, et seulement si, l'un d'entre eux est réel.

4° Démontrer que les quatre points O, A, B, C sont cocycliques ou colinéaires dans $\mathcal{P}$ si, et seulement si, k est réel.

5° On considère à nouveau les six nombres associés aux divers triplets formés avec A, B, et C. Quand, passant de $\mathcal{P}$ à $\overline{\mathcal{P}}$, on substitue au point C le point Ω, montrer que la convention de calcul dans $\overline{\mathbb{C}}$ adoptée dans le préliminaire permet d'attribuer à chacun de ces six nombres une valeur que l'on précisera.

6° On conviendra d'appeler cercle (resp. droite) de $\overline{\mathcal{P}}$ un cercle (resp. une droite) de $\mathcal{P}$, complété(e) éventuellement par le point Ω comme cela découlera de la suite du texte. On convient aussi que la convention démontrée ci-dessus au 4° dans $\mathcal{P}$ caractérise encore les cercles ou droites de $\overline{\mathcal{P}}$ qui contiennent le point O.

Démontrer alors que :

a. Le point Ω appartient à toute droite de $\overline{\mathcal{P}}$ contenant O.

b. Le point Ω n'appartient à aucun cercle de $\overline{\mathcal{P}}$ contenant O.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on travaille dans le plan $\mathcal{P}$ et on suppose les deux points $A(a)$ et $B(b)$ distincts et tous deux distincts du point O :

$$ab(a-b) \neq 0.$$

On désigne par $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z; on rapelle que z est réel si, et seulement si, z et $\overline{z}$ sont égaux.

1° Démontrer que les droites (OA) et (OB) sont orthogonales si, et seulement si, $a\overline{b} + b\overline{a}$ est nul.

2° Démontrer que O, A et B sont alignés si, et seulement si, $a\overline{b} - b\overline{a}$ est nul.

3° Si O, A et B ne sont pas alignés, on envisage le cercle γ circonscrit au triangle (O, A, B). Démontrer que la tangente θ_A en A à γ est l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $\dfrac{b(z-a)}{a(b-a)}$ est réel.

En déduire :

$$[M \in \theta_A] \Longleftrightarrow [z\, b\, \overline{a}\,(\overline{a} - \overline{b}\,) - \overline{z}\, \overline{b}\, a(a-b) + a\overline{a}\,(a\overline{b} - b\overline{a}\,) = 0]$$

4° Si A et B ne sont pas diamétralement opposés sur γ, les tangentes θ_A et θ_B à γ respectivement en A et B se coupent en $T(t)$.

Déterminer t et $\overline{t}$ en fonction de a, b, $\overline{a}$ et $\overline{b}$.

Déterminer, en fonction de a et b seulement, l'affixe u de U, second point commun au cercle γ et à la droite (OT).

5° Si A et B sont diamétralement opposés sur γ, on appelle encore $U(u)$ le second point commun au cercle γ et à la perpendiculaire menée de O à la droite (AB). Déterminer alors u en fonction de a et b.

TROISIÈME PARTIE

L'ensemble $\mathcal{E}$ que l'on va étudier ici est $\overline{\mathcal{P}}$ privé du point O :

$$\mathcal{E} = \overline{\mathcal{P}} \setminus \{O\}.$$

On envisage les sous-ensembles δ de $\overline{\mathcal{P}}$ dont chacun est ou bien une droite contenant O, ou bien un cercle contenant O. A chaque δ, sous-ensemble de $\overline{\mathcal{P}}$, on associe le sous-ensemble Δ de $\mathcal{E}$ qui est l'intersection de δ et de $\mathcal{E}$:

$$\Delta = \delta \setminus \{O\}.$$

Ces sous-ensembles Δ de $\mathcal{E}$ sont appelés « pseudo-droites ».

Dans $\overline{\mathcal{P}}$, la tangente en O à δ, cercle ou droite de $\overline{\mathcal{P}}$ contenant O, sera, par convention, la tangente en O à $\delta' = \delta \cap \mathcal{P}$ (c'est-à-dire δ' elle-même dans le cas ou δ' est une droite), cette tangente étant, bien entendu, enrichie du point Ω.

Parmi les parties suivantes, certaines pourront être traitées géométriquement.

1° Démontrer que, deux points A et B distincts étant donnés dans $\mathcal{E}$, il existe dans $\mathcal{E}$ une pseudo-droite Δ et une seule contenant ces deux points (on examinera en particulier le cas où A, par exemple, est Ω).

2° Si l'on se donne dans $\mathcal{E}$ une pseudo-droite Δ et un point A n'appartenant pas à Δ, démontrer qu'il existe une pseudo-droite Δ' et une seule qui contienne A et dont l'intersection avec Δ soit vide (on examinera en particulier le cas où A est Ω).

3° Démontrer que si deux pseudo-droites Δ_1 et Δ_2 sont distinctes, leur intersection est soit constituée par un point et un seul (on dira alors qu'elles sont sécantes), soit l'ensemble vide.

4° On dit que deux pseudo-droites Δ_1 et Δ_2 sont pseudo-parallèles si δ_1 et δ_2 qui leur sont associées dans $\overline{\mathcal{P}}$ ont même tangente en O.

Démontrer que le pseudo-parallélisme est une relation d'équivalence entre pseudo-droites.

Démontrer que Δ_1 et Δ_2 sont pseudo-parallèles si, et seulement si, Δ_1 et Δ_2 ne sont pas pseudo-sécantes.

5° Démontrer que si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points de $\mathcal{P}$ non alignés avec O et tels que $ab(a-b) \neq 0$, dans le plan $\mathcal{P}$ la tangente en O au cercle (O, A, B) est l'ensemble des points $M(z)$ dont les affixes vérifient :

$$z\,\overline{a}\,\overline{b}\,(a-b) - \overline{z}\,a\,b\,(\overline{a} - \overline{b}) = 0.$$

Si $A(a)$ et $B(b)$ de $\mathcal{P}$, toujours tels que $ab(a-b) \neq 0$, sont alignés avec O, l'équation précédente caractérise-t-elle encore dans $\mathcal{P}$ les affixes z des points M de la droite (AB)?

6° On envisage dans $\overline{\mathcal{P}}$ les sous-ensembles δ_1, [défini par $A_1(a_1)$ et $B_1(b_1)$] et δ_2 [défini par $A_2(a_2)$ et $B_2(b_2)$], avec $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $a_1 \neq b_1$ et $a_2 \neq b_2$.

Démontrer que Δ_1 et Δ_2 asoociées à δ_1 et δ_2 sont pseudo-parallèles si, et seulement si,

$$\frac{\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{b_1}}{\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{b_2}} \text{ est un réel.}$$

(On n'oubliera pas d'examiner le cas où A_1 et Ω, ni celui où A_1 et A_2 sont Ω).

7° $A(a)$ et $B(b)$ étant donnés dans $\mathcal{E}$, distincts ou non, on leur associe le point $U(u)$ tle que

$$\frac{2}{u} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

a. Démontrer que U est défini et unique dans $\mathcal{E}$.

S'il est nécessaire, on notera U associé à A et B par l'écriture $U(A, B)$.

b. Quel est U quand A et B sont confondus?

c. Si A et B sont distincts, démontrer que U appartient à la pseudo-droite Δ définie par A et B.

Si δ associé à Δ est une droite, quelle est la disposition des quatre points O, U, A, B?

Si δ associé à Δ est un cercle, quelle construction géométrique peut-on proposer pour U?

d. Si quatre points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$, deux à deux distincts, de $\mathcal{E}$ vérifient $U(A, C) = U(B, D)$, quelle configuration présentent les pseudo-droites définies par A et B d'une part, et les pseudo-droites définies par A et D et par B et C d'autre part?

Réciproquement, si une telle configuration est donnée à priori à partir de quatre pseudo-droites deux à deux distinctes, les quatre points que définissent ces pseudo-droites par leurs intersections respectives satisfont-ils une relation du type $U(A, C) = U(B, D)$?

8° Plus généralement, étant donnés deux points $A(a)$ et $B(b)$, distincts ou non, dans $\mathcal{E}$, soit un point $V(v)$ de $\mathcal{E}$ tel que

$$\frac{1+\lambda}{v} = \frac{1}{a} + \frac{\lambda}{b} \qquad \text{où } \lambda \text{ est un réel donné.}$$

Discuter selon les positions de A et B dans $\mathcal{E}$ et les valeurs du réel λ, l'existence et l'unicité du point V.

Si A et B sont distincts, démontrer que V, s'il existe, appartient à la pseudo-droite définie par A et B.

Tout point de cette pseudo-droite peut-il être considéré comme un point V pour un choix convenable de λ?

9° Deux pseudo-droites distinctes Δ_1 et Δ_2 de $\mathcal{E}$, définies respectivement par $A_1(a_1)$ et $B_1(b_1)$ d'une part, par $A_2(a2)$ et $B_2(a_2)$ d'autre part, avec $a_1 \neq b_1$ et $a_2 \neq b_2$, sont maintenant données pseudo-parallèles.

Soit $A_3(a_3)$ tel que

$$\frac{1+\lambda}{a_3} = \frac{1}{a_1} + \frac{\lambda}{a_2}$$

et soit $B_3(b_3)$ tel que

$$\frac{1+\mu}{b_3} = \frac{1}{b_1} + \frac{\mu}{b_2}, \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux réels donnés.}$$

(On suppose que A_3 et B_3 existent).

Déterminer sur λ et μ une condition nécessaire et suffisante pour que la pseudo-droite Δ_3 définie par $A_3(a_3)$ et $B_3(b_3)$ soit pseudo-parallèle à Δ_1 et à Δ_2.