PREPARATION AU C. A. P. E. S.

(2ème Epreuve du concours 1972)

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ dont les éléments, appelés *vecteurs* (ou *points* selon les cas), sont les couples (x, y) de nombres réels ($x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$). Au besoin, on notera $\vec{V} = (x, y)$ un vecteur quelconque et respectivement $\vec{0}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ les vecteurs (0,0), (1,0) (0,1).

Rappelons que, par définition, une *norme* N sur E est une application N de E dans $\mathbf{R}^+$, ensemble des réels positifs ou nul, satisfaisant aux trois conditions (*a*), (*b*), (*c*) suivantes :

(*a*) $$N(\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{0};$$

(*b*) pour tout $\vec{V}$ appartenant à E et pour tout λ appartenant à $\mathbf{R}$,

$$N(\lambda \vec{V}) = |\lambda| . N(\vec{V});$$

(*c*) pour tous $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ appartenant à E,

$$N(\vec{V} + \vec{V}') \leqslant N(\vec{V}) + N(\vec{V}') \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Les dessins concernant $\mathbf{R}^2$ demandés dans la partie I seront exécutés en axes *physiquement perpendiculaires,* chaque vecteur $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ayant pour longueur 2 centimètres.

Les parties I et II sont indépendantes. Dans la partie II, il n'est pas nécessaire d'avoir résolu les questions 2°, 3° et 4° pour aborder la suite, et l'on peut traiter les questions 7° et 8° de cette partie II sans avoir répondu aux questions précédentes.

I

1° Soit $\vec{V} = (x, y)$ un vecteur quelconque de E.

On pose

$$N_1(\vec{V}) = |x| + |y|.$$

Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

Dessiner la « sphère-unité » S_1, ensemble des points (x, y) tels que $N_1(\vec{V}) = 1$.

2° Soit toujours $\vec{V} = (x, y)$ un vecteur quelconque de E. On pose maintenant $N_\infty(\vec{V}) = \sup(|x|, |y|)$, c'est-à-dire le plus grand des deux nombres $|x|, |y|$ s'ils sont inégaux et leur valeur commune si $|x| = |y|$.

Démontrer que l'on définit ainsi encore une norme sur E.

Dessiner la « sphère-unité » S_∞ correspondante, ensemble des points (x, y) tels que $N_\infty(\vec{V}) = 1$.

3° Déterminer le plus grand nombre réel strictement positif A et le plus petit nombre réel strictement positif B tels que, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E, l'on ait

(1) $$A . N_\infty(\vec{V}) \leqslant N_1(\vec{V}) \leqslant B . N_\infty(\vec{V}).$$

4° Existe-t-il des vecteurs $\vec{V}$ de E pour lesquels l'une des deux inégalités (1) soit une égalité? Si oui, préciser ces vecteurs.

5° Fixons-nous maintenant une norme N sur E, *quelconque.*

a. Démontrer qu'il existe un nombre réel β strictement positif tel que, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E, l'on ait

$$N(\vec{V}) \leqslant \beta . N_\infty(\vec{V}).$$

b. Démontrer que, pour tout $\vec{V}$ appartenant à S_∞ (cf. 2°), l'on a

$$N(\vec{V}) > 0.$$

On *admettra* alors qu'il existe au moins un vecteur $\vec{V}_0$ appartenant à S_∞ tel que l'on ait, pour tout $\vec{V}$ appartenant à S_∞, $N(\vec{V}) \geqslant N(\vec{V}_0)$. En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif γ tel que, pour tout $\vec{V}$ appartenant à S_∞, l'on ait $N(\vec{V}) \geqslant \gamma$.

c. Démontrer qu'il existe un nombre réel α strictement positif tel que l'on ait, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E,

$$\alpha . N_\infty(\vec{V}) \leqslant N(\vec{V}).$$

6° On considère deux normes N et N' sur E, quelconques et distinctes, mais fixées.

Déduire de ce qui précède qu'il existe deux nombres réels strictement positifs a et b tels que l'on ait, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E,

(2) $$a . N'(\vec{V}) \leqslant N(\vec{V}) \leqslant b . N'(\vec{V}).$$

7° Pour tout $\vec{V} = (x, y)$ de E on pose

$$\mathcal{N}(\vec{V}) = \sup_{t \in [0,1]} |x + yt|,$$

borne supérieure des $|x + yt|$ quand t décrit le segment $[0,1]$.

Démontrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur E et tracer sa « sphère-unité » $\mathcal{S}$, ensemble des points (x, y) tels que $\mathcal{N}(\vec{V}) = 1$.

8° Mêmes questions pour

$$\mathcal{N}'(\vec{V}) = \int_0^1 |x + yt| \, dt$$

et la « sphère-unité » correspondante $\mathcal{S}'$.

9° Déterminer le plus grand nombre réel strictement positif p et le plus petit nombre réel strictement positif q tels que l'on ait, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E,

$$p \,.\, \mathcal{N}'(\vec{V}) \leqslant \mathcal{N}(\vec{V}) \leqslant q \,.\, \mathcal{N}'(\vec{V}).$$

(On pourra utiliser les « sphères-unité » $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$).

Pour quels $\vec{V}$ y a-t-il égalité?

II

Dans cette deuxième partie, on suppose E muni d'un *produit scalaire*, noté $(\vec{U}, \vec{V})$ pour deux vecteurs quelconques $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de E. Ainsi E devient un *espace vectoriel euclidien*.

1° On pose $N(\vec{V}) = \sqrt{(\vec{V}, \vec{V})}$. Démontrer que N est une norme sur E. Cette norme étant la seule à intervenir dans la suite, on la notera **désormais** $\| \vec{V} \|$ au lieu de $N(\vec{V})$.

2° Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs quelconques de E. On pose

$$T(\vec{U}, \vec{V}) = \| \vec{U} \| + \| \vec{V} \| - \| \vec{U} + \vec{V} \|.$$

L'inégalité triangulaire démontrée dans le paragraphe précédent signifie évidemment que l'on a $T(\vec{U}, \vec{V}) \geqslant 0$ quels que soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Dans quel cas a-t-on $T(\vec{U}, \vec{V}) = 0$?

3° Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ trois vecteurs quelconques de E. On pose

$$S = \| \vec{U} \| + \| \vec{V} \| + \| \vec{W} \|$$

$$S' = \| \vec{U} + \vec{V} + \vec{W} \|$$

et

$$P(\vec{U}, \vec{V}) = \| \vec{U} \| + \| \vec{V} \| + \| \vec{U} + \vec{V} \|.$$

a. Démontrer que $S + S'$ est supérieur ou égal à chacun des trois nombres $P(\vec{U}, \vec{V})$, $P(\vec{V}, \vec{W})$, $P(\vec{W}, \vec{U})$.

b. Calculer d'autre part, en fonction de S et S', l'expression

$$Z = T(\vec{U}, \vec{V}) \,.\, P(\vec{U}, \vec{V}) + T(\vec{V}, \vec{W}) \,.\, P(\vec{V}, \vec{W}) + T(\vec{W}, \vec{U}) \,.\, P(\vec{W}, \vec{U}).$$

c. Déduire de *a* et de *b* que l'on a, pour tous $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ appartenant à E,

$$\| \vec{U} + \vec{V} \| + \| \vec{V} + \vec{W} \| + \| \vec{W} + \vec{U} \| \leqslant S + S' \tag{3}$$

(inégalité quadrilatérale).

4° L'inégalité quadrilatérale précédente est-elle encore vraie pour trois vecteurs quelconques d'un espace vectoriel euclidien de dimension différente de 2 et pourquoi?

5° *Dans tout ce qui suit*, on se place dans un *espace affine euclidien* $\mathcal{E}$ associé à *l'espace vectoriel euclidien* E de dimension 2 étudié dans cette partie II et on se donne A, B, C, trois points fixes distincts non alignés de $\mathcal{E}$. On pose

$$a = \| \overrightarrow{BC} \|, \qquad b = \| \overrightarrow{CA} \|, \qquad c = \| \overrightarrow{AB} \|.$$

On choisit trois points A′, B′, C′ appartenant respectivement aux droites affines BC, CA, AB; on pose

$$\alpha = \|\overrightarrow{AA'}\|, \qquad \beta = \|\overrightarrow{BB'}\|, \qquad \gamma = \|\overrightarrow{CC'}\|$$

et

$$\psi = \psi(A', B', C') = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{4}$$

Calculer ψ quand A′, B′, C′ sont les « milieux » respectifs des trois « segments [BC], [CA], [AB] », c'est-à-dire quand

$$\overrightarrow{A'B} = -\overrightarrow{A'C}, \qquad \overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{B'A}, \qquad \overrightarrow{C'A} = -\overrightarrow{C'B}.$$

6° On choisit maintenant les points A′, B′, C′ respectivement sur les droites affines BC, CA, AB et tels que

$$\overrightarrow{A'B} = x\,\overrightarrow{A'C}, \qquad \overrightarrow{B'C} = x\,\overrightarrow{B'A}, \qquad \overrightarrow{C'A} = x\,\overrightarrow{C'B}.$$

a. Calculer en fonction du nombre réel x la valeur correspondante de ψ, ψ étant toujours défini par (4).

b. Calculer la borne inférieure de ψ quand x décrit **R**. Cette borne inférieure est-elle atteinte? Si oui, pour quelle position des points A′, B′, C′?

7° On *admettra* que, si $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ est un repère quelconque de l'espace affine $\mathcal{E}$, le rapport des aires des triangles $A_1 A_2 A_3$ et OIJ est égal à la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, où (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) désignent les coordonnées respectives des points A_1, A_2, A_3 dans le repère $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

On choisit alors *librement* les points A′, B′, C′ sur les droites affines respectives BC, CA, AB et l'on pose

$$\overrightarrow{A'B} = x\,\overrightarrow{A'C}, \qquad \overrightarrow{B'C} = y\,\overrightarrow{B'A}, \qquad \overrightarrow{C'A} = z\,\overrightarrow{C'B}.$$

Calculer en fonction des trois nombres réels x, y, z le rapport $f = f(x, y, z)$ des aires des triangles A′B′C′ et ABC.

Déterminer la borne inférieure de $f(x, y, z)$ pour l'ensemble des triplets (x, y, z) considérés. Cette borne est-elle atteinte?

8° Toujours avec les conditions et notations du 7°, on appelle PQR, quand il existe, le triangle déterminé par les trois droites affines AA′, BB′, CC′. Calculer le rapport $g = g(x, y, z)$ des aires des triangles PQR et ABC.

Quelle est la borne inférieure de $g(x, y, z)$ pour l'ensemble des triplets (x, y, z) considérés? Cette borne est-elle atteinte?