DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

I

1° On convient d'appeler Δ l'ensemble des déplacements (isométries positives) d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, de dimension trois, laissant globalement invariant un cône de révolution Γ, de sommet O, d'axe γ et de demi-angle au sommet θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Démontrer que Δ a une structure de groupe relativement à la composition des transformations.

2° On désigne par Δ' le sous-ensemble de Δ constitué par des demi-tours (ou symétries axiales). Démontrer que chacun de ces demi-tours commute avec au moins deux autres convenablement choisis et que tout élément de Δ s'écrit comme composé de deux éléments de Δ'.

3° Que deviennent les résultats des paragraphes 1° et 2° si l'on remplace le cône Γ par un cylindre de révolution Σ d'axe γ?

4° On désigne par G l'ensemble des génératrices du cône Γ et par d_0 un élément fixé de G. Dans G on définit une loi de composition $*$ de la manière suivante :

Étant donné deux éléments d_1 et d_2 de G, le plan (d_1, d_2) coupe le plan perpendiculaire en O à l'axe γ de Γ suivant une droite δ. Le plan (d_0, δ) recoupe en général Γ suivant une droite d. On pose alors :

$$d = d_1 * d_2.$$

Si $d_1 = d_2$, le plan (d_1, d_2) est le plan tangent à Γ le long de d_1; si le plan (d_0, δ) est tangent à Γ, on prend $d = d_0$.

Démontrer que (G, $*$) est un groupe abélien, c'est-à-dire commutatif.

5° Soit Π un plan ne passant pas par O. On note G′ le sous-ensemble de G constitué par des droites non parallèles à Π et E l'ensemble des points communs au cône Γ et au plan Π : $\quad E = \Pi \cap \Gamma$.

On désigne par φ l'application de G′ vers E telle que $\varphi(d) = d \cap \Pi$ pour toute droite d de G′. Démontrer que φ est une bijection.

On note $\mathcal{T}$ l'opération, dans E, induite de $*$ par φ c'est-à-dire l'opération qui, à $a_1 = \varphi(d_1)$ et $a_2 = \varphi(d_2)$ associe, quand c'est possible,

$$a = a_1 \mathcal{T} a_2 = \varphi(d_1 * d_2).$$

Démontrer que les droites $a_1 a_2$ et $a_0 a$ $\quad (a_0 = \varphi(d_0))$, lorsqu'elles sont sécantes, se coupent en un point situé sur une droite fixe indépendante de a_1 et de a_2 et que cette droite est la directrice associée au foyer O de la projection orthogonale de E sur le plan perpendiculaire en O à γ. (Examiner le cas particulier où le plan Π est perpendiculaire à l'axe γ.)

(E , $\mathcal{T}$) est-il un groupe abélien?

II

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère d'origine O et de base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Au point m de coordonnées (a, b, c) on fait correspondre le polynôme en x :

$$f_m(x) = ax^2 + \sqrt{2}\, bx + c$$

Les racines de $f_m(x)$ qui interviennent dans la suite appartiennent au corps des complexes.

1° Quel est le lieu des points m dans chacun des cas suivants :

a. $af_m(x)$ et $f'_m(x)$, dérivée de $f_m(x)$ par rapport à x, ont le même ensemble de racines. (Il pourra être commode de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{Om} . \vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$). On désignera par S ce lieu et on démontrera que S est un cône de révolution dont on précisera le sommet, l'axe et le demi-angle au sommet.

b. $af_m(x)$ n'a aucune racine réelle.

c. $f_m(x)$ a deux racines réelles distinctes.

2° *a.* Quel est le lieu des points m tels que l'on ait : $f_m(\lambda) = 0$ où λ est un nombre réel ou complexe donné (distinguer les deux cas)? Dans le cas où λ est réel, situer géométriquement ce lieu par rapport à S.

b. En désignant par $f_m^{-1}(0)$ l'ensemble des racines de $f_m(x)$, déterminer le lieu des points m,

1. lorsque $f_m^{-1}(0) = \{\alpha\}$ où α est un réel donné,

2. lorsque $f_m^{-1}(0) = \{\alpha, \beta\}$ où α et β sont deux nombres réels ou complexes donnés.

3° Soit P l'ensemble des points d'intersection de S avec le plan d'équation $a = 1$. Démontrer que l'application de P vers **R** (ensemble des réels) qui, à tout point m $(1, b, c)$ de P associe la racine α de $f_m(x)$ est une bijection. On désigne alors par h l'application réciproque de cette bijection. Donner une définition purement géométrique de la loi de groupe $\circ$ sur P, induite par h de l'addition des réels, c'est-à-dire :

$$m_1 \circ m_2 = h(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ si } m_1 = h(\alpha_1) \text{ et } m_2 = h(\alpha_2).$$

4° Dans cette question, a ne garde plus comme au 3° la seule valeur 1 mais on suppose que a est un réel quelconque *non nul*. On désigne par α_m et β_m les racines (éventuellement confondues) de $f_m(x)$ et on considère, dans le plan complexe, les points A_m et B_m d'affixes respectives α_m et β_m.

a. Quel est le lieu de A_m et de B_m lorsque m décrit un plan passant par O? Que peut-on dire des cercles de diamètre A_mB_m lorsque m décrit la partie de ce plan correspondant à α_m et β_m réels?

b. Quel est le lieu de A_m et de B_m lorsque m décrit un cône de révolution S', de même sommet et de même axe que S et de demi-angle au sommet θ' tel que l'on ait $0 < \theta' < \dfrac{\pi}{4}$?