Deuxieme composition de mathematiques

(session 1969)

I

Questions preliminaires

1° On suppose que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 sont tels que le vecteur $\lambda_1 \overrightarrow{M_4M_1} + \lambda_2 \overrightarrow{M_4M_2} + \lambda_3 \overrightarrow{M_4M_3}$ est le vecteur nul, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ étant des réels non tous nuls satisfaisant à la condition :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Démontrer que les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.

2° Réciproquement, si trois points M_1, M_2, M_3 distincts sont alignés, comment faut-il choisir les réels $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ pour que le vecteur :

$$\mu_1 \overrightarrow{OM_1} + \mu_2 \overrightarrow{OM_2} + \mu_3 \overrightarrow{OM_3}$$

soit le vecteur nul, quel que soit le point O ?

II

Proprietes generales

A, B, C étant les sommets d'un triangle et p, q, r des réels distincts deux à deux, on appelle P, Q, R les points tels que l'on ait :

$$r\,\overrightarrow{PB} - q\,\overrightarrow{PC} = \vec{0};$$
$$p\,\overrightarrow{QC} - r\,\overrightarrow{QA} = \vec{0};$$
$$q\,\overrightarrow{RA} - p\,\overrightarrow{RB} = \vec{0}.$$

1° Démontrer que, quel que soit le point O du plan (ABC), le vecteur $p\,(q-r)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} + q\,(r-p)\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + r\,(p-q)\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ est le vecteur nul.

En déduire que les points P, Q, R sont alignés sur une droite (D).

Étudier le cas particulier où l'un des nombres p, q, r est nul.

2° Soit le repère cartésien (A,$\vec{u}, \vec{v}$) d'origine A, le vecteur unitaire $\vec{u}$ de l'axe x'Ax étant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, le vecteur unitaire $\vec{v}$ de l'axe y'Ay étant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Calculer les coordonnées cartésiennes de P, Q, R.

Former l'équation cartésienne de la droite (D).

On appelle M le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs X, Y, Z (X + Y + Z $\neq$ 0). Exprimer une condition (E) nécéssaire et suffisante entre X, Y, Z, p, q, r pour que M soit situé sur (D).

Relativement au triangle ABC, X, Y, Z sont appelés les *coordonnées triangulaires* de M et la relation (E) est appelée *l'équation triangulaire* de (D).

Former les équations triangulaires des droites AP, BQ, CR.

3° Dans tout ce qui suit, on supposera que le cas général :

$$(p+q)(q+r)(r+p)(pq+qr+rp) \neq 0$$

est réalisé.

La droite conjuguée harmonique de AP par rapport au couple AB, AC coupe la droite BC en P'.

La droite conjuguée harmonique de BQ par rapport au couple BC, BA coupe la droite CA en Q'.

La droite conjuguée harmonique de CR par rapport au couple CA, CB coupe la droite AB en R'.

Calculer les coordonnées triangulaires des points P', Q', R'.

Former les équations triangulaires des droites AP', BQ', CR' et démontrer que ces droites concourent en un point S dont on donnera les coordonnées triangulaires X_0, Y_0, Z_0 en fonction de p, q, r.

Ce point S est appelé *pôle triangulaire de la droite* (D) et (D) est appelée *polaire triangulaire du point* S.

4° *a*. Démontrer que les triplets des points suivants sont alignés :

P', Q, R' ; Q', R, P' ; R', P, Q'

et former les équations triangulaires de ces trois droites.

b. En supposant que les droites CR et BQ sont sécantes et se coupent en I, que les droites AP et CR se coupent en J que les droites BQ et AP se coupent en K, démontrer que :

–les points A, P', S, I sont alignés ainsi que B, Q', S, J et C, R', S, K ;

–les trois divisions (AP'SI), (BQ'SJ), (CR'SK) sont harmoniques.

c. Quelles sont les polaires triangulaires de I, de J et de K ?

III

Etudes de cas particuliers

1° *a*. Relativement au repère cartésien $(\mathrm{A},\vec{u},\vec{v})$ [voir II, 2°], on donne les coordonnées cartésiennes de S : x_0 et y_0.

Former l'équation cartésienne de la polaire triangulaire (D) du point S.

b. On se propose de construire le lieu du point S pour que (D) passe par le point T de coordonnées cartésiennes $x = \dfrac{1}{6}$ et $y = \dfrac{1}{6}$. A cet effet, on formera d'abord l'équation de ce lieu dans le repère $(\mathrm{A},\vec{u},\vec{v})$ puis on le rapportera à un nouveau repère $(\mathrm{A},\vec{u}_1,\vec{v}_1)$ d'origine A, le vecteur unitaire $\vec{u}_1$ de l'axe Ax_1 étant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, le vecteur unitaire $\vec{v}_1$ de l'axe Ay_1 étant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

2° *a*. On suppose que S est l'orthocentre H du triangle ABC (non équilatéral). On appelle :

O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

H_1, H_2, H_3 les pieds respectifs des hauteurs sur les côtés du triangle.

Démontrer que la polaire triangulaire de H est l'axe radical du cercle circonscrit au triangle ABC et du cercle circonscrit au triangle $\mathrm{H}_1\mathrm{H}_2\mathrm{H}_3$ et qu'elle est perpendiculaire à OH.

b. On suppose que S est le centre ω du cercle inscrit au triangle ABC. Quelles positions remarquables occupent les points :

P, Q, R , I, J, K. (voir II, 4°, b) ?

Démontrer que la polaire triangulaire de ω est perpendiculaire à $O\omega$.

3° *a*. Une unité de longueur étant choisie, on appelle a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC ; $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{CA}$, $c = \mathrm{AB}$.

En appelant X_0, Y_0, Z_0 les coordonnées triangulaires de S (voir II ; 3°), démontrer les relations :

$$(1) \quad a^2 Y_0 Z_0 + a^2 Y_0 Z_0 + a^2 Y_0 Z_0 = (X_0 + Y_0 + Z_0)\left(X_0 SA^2 + Y_0 SB^2 + Z_0 SC^2\right)$$

$$(2) \quad X_0 SA^2 + Y_0 SB^2 + Z_0 SC^2 = (X_0 + Y_0 + Z_0)(R^2 - OS^2)$$

où R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et O désigne le centre de ce cercle.

b. On appelle L le point de coordonnées triangulaires a^2, b^2, c^2.

Trouver le lieu du point S pour que la polaire triangulaire de ce point passe par L.