Un corrigé de l'épreuve 2 du Capes Mathématiques 2005

Partie I : Puissance d'un point par rapport à un cercle.

1° H est le pied de la hauteur issue du sommet O du triangle isocèle OT_1T_2 ; c'est donc aussi le milieu de $[T_1T_2]$.

$$\begin{aligned}
\overline{MT_1}\,.\,\overline{MT_2} &= (\overline{MH}+\overline{HT_1})(\overline{MH}+\overline{HT_2}) = MH^2+\overline{MH}(\overline{HT_1}+\overline{HT_2})+\overline{HT_1}\,.\,\overline{HT_2}\\
&= MH^2+0-HT_1^2 \qquad \text{(car } H \text{ est le milieu de } [T_1T_2])\\
&= MH^2+\Omega H^2-(HT_1^2+\Omega H^2) = \Omega M^2-\Omega T_1^2 \qquad \text{Pythagore}\\
&= \Omega M^2-R^2
\end{aligned}$$

2° D'après la question précédente :

$$\begin{cases}
p_\Gamma(M)=0 \iff \Omega M = R \iff M\in\Gamma\\
p_\Gamma(M)>0 \iff \Omega M > R \iff M\in\mathscr{E}(\Gamma)\\
p_\Gamma(M)<0 \iff \Omega M < R \iff M\in\mathscr{I}(\Gamma)
\end{cases}$$

3° Considérons un cercle Γ de centre Ω, de rayon R.
$p_\Gamma(\Omega)=\Omega\Omega^2-R^2=-R^2$.

4° M doit être sur le cercle ou à l'extérieur pour qu'on puisse tracer une tangente à ce cercle issue de M ; si $M\in\mathscr{E}(\Gamma)$, il y a deux tangentes à Γ issues de M ; si $M\in\Gamma$, il n'y en a qu'une.
Par Pythagore, on a $p_\Gamma(M)=\Omega M^2-R^2=\Omega M^2-\Omega T^2=MT^2$.
Cette formule est évidemment encore valable si $M=T$, c'est-à-dire si $M\in\Gamma$.

5° Soit $M\in(AB)$. En utilisant la droite (AB) pour calculer ses puissances par rapport aux deux cercles, on a évidemment $p_{\Gamma_1}(M)=p_{\Gamma_2}(M)=\overline{MA}\,.\,\overline{MB}$.
Réciproquement, soit M un point du plan tel que $p_{\Gamma_1}(M)=p_{\Gamma_2}(M)$. On supposera que $M\neq A$ (sinon, on a évidemment $M\in(AB)$).
Considérons la droite (AM) : elle recoupe le cercle Γ_1 en un point B_1 et le cercle Γ_2 en un point B_2 (B_i peut être confondu avec A si (AM) est tangente au cercle Γ_i).
On a $p_{\Gamma_1}(M)=\overline{MA}\,.\,\overline{MB_1}$ et $p_{\Gamma_2}(M)=\overline{MA}\,.\,\overline{MB_2}$.
Puisque $p_{\Gamma_1}(M)=p_{\Gamma_2}(M)$, on en déduit $\overline{MA}\,.\,\overline{MB_1}=\overline{MA}\,.\,\overline{MB_2}$ et puisque $M\neq A$, $\overline{MB_1}=\overline{MB_2}$. On en déduit (puisque tous ces points sont alignés) que $B_1=B_2$, donc que $B_1=B_2$ est un point de $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\{A,B\}$, donc $B_1=B_2=B$ (puisque B_i est le point où (AM) recoupe $\mathscr{C}_i$). Donc $(AM)=(AB)$ et $M\in(AB)$.

6° Si les deux cercles Γ_1 et Γ_2 ont des centres distincts, respectivement Ω_1 et Ω_2, et des rayons respectifs R_1 et R_2, la relation (1) : $p_{\Gamma_1}(M)=p_{\Gamma_2}(M)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\Omega_1M^2-R_1^2=\Omega_2M^2-R_2^2 &\iff \Omega_1M^2-\Omega_2M^2=R_1^2-R_2^2\\
&\iff (\overrightarrow{\Omega_1M}+\overrightarrow{\Omega_2M})\cdot\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}=R_1^2-R_2^2\\
\text{(en posant } I \text{ milieu de } [\Omega_1\Omega_2]) &\iff \overrightarrow{MI}\cdot(2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2})=R_1^2-R_2^2
\end{aligned}$$

L'ensemble des points qui vérifient (1) est donc une ligne de niveau de l'application
$M \longmapsto \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$.
On sait que lorsque $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, c'est une droite orthogonale au vecteur $\overrightarrow{u}$. Donc si les deux cercles ont des centres distincts, l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à ces deux cercles est une droite orthogonale à la droite joignant les deux centres. Si les deux cercles ont même centre et des rayons différents, cet ensemble est vide, et si les deux cercles sont confondus, c'est ensemble est bien sûr le plan tout entier.
Lorsque les cercles sont tangents en A, la puissance de ce point par rapport aux deux cercles est nulle, donc il vérifie (1) et l'ensemble que l'on cherche est dans ce cas la tangente commune aux deux cercles.

7° Le centre de Γ est ici le point Ω de coordonnées $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ et son rayon est $R = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}}$ (pour que le cercle existe, il est nécessaire et suffisant que $a^2+b^2-4c > 0$). Donc

$$p_\Gamma(O) = \Omega O^2 - R^2 = \frac{a^2+b^2}{4} - \frac{a^2+b^2-4c}{4} = c$$

Partie II : Construction d'une Π-droite.

1° Supposons qu'il existe un cercle Γ passant par A et B et coupant $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2, et calculons la puissance de O par rapport à Γ. Utilisons tout d'abord le diamètre (T_1T_2) de $\mathscr{C}$, qui coupe par définition Γ et $\mathscr{C}$ en T_1 et T_2. D'après I-4° et I-2° on a
$p_\Gamma(O) = p_{\mathscr{C}}(O) = -R^2$.
Mais en utilisant la droite (AB) qui passe par O par hypothèse et qui rencontre Γ en A et B, on a aussi
$p_\Gamma(O) = \overline{OA}\ .\ \overline{OB}$.
Mais puisque A, B sont deux points de $\Pi = \mathscr{I}(\mathscr{C})$, on a $OA < R$ et $OB < R$, donc $|p_\Gamma(O)| = OA\ .\ OB < R^2$ ce qui n'est pas compatible avec $p_\Gamma(O) = -R^2$. On a donc une contradiction, et il ne peut donc pas y avoir de cercle passant par A et B et rencontrant $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés.

2° Si Γ est un cercle passant par A et B et rencontrant $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2, son centre Ω doit se trouver à la fois sur la médiatrice de $[AB]$ et sur la médiatrice de $[T_1T_2]$. Mais par hypothèse O est un point qui appartient à ces deux médiatrices, et il ne peut être le centre de Γ puisque $OA < R = OT_1$. Donc ces deux médiatrices ont deux points commun, O et Ω : elles sont donc confondues et donc (AB) et (T_1T_2) sont parallèles. T_1 et T_2 sont donc complètement déterminés sur le diamètre de $\mathscr{C}$ qui est parallèle à (AB).
Γ est donc le cercle circonscrit au triangle ABT_1 (c'est un vrai triangle car (AB) n'est pas un diamètre et (T_1T_2) en est un, donc ces deux droites ne sont pas confondues) et est donc parfaitement déterminé.
On vérifie aisément que le cercle qui passe par A, B, T_1 passe aussi par T_2 donc répond à la question.
Pour construire géométriquement ce cercle, on trace la parallèle à (AB) qui passe par O, on appelle T_1 et T_2 les intersections de ce diamètre avec $\mathscr{C}$ puis on trace le cercle circonscrit au triangle ABT_1 (son centre est à l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et de $[AT_1]$, par exemple).

3° a) Puisque $OA \neq OB$, on est sûr que O n'est pas le centre d'un cercle passant par A et B, donc $\Omega \neq O$.
Soit Δ la médiatrice de $[T_1T_2]$. Elle passe par Ω puisque le cercle Γ de centre Ω passe par T_1 et T_2 et elle passe par O puisque O est le milieu de $[T_1T_2]$, donc $\Delta = (O\Omega)$.
Si (AB) et (T_1T_2) étaient parallèles, Δ serait alors aussi une droite perpendiculaire à (AB) qui passe par Ω. Comme $\Omega A = \Omega B$, ce serait aussi la médiatrice de $[AB]$. Mais comme $O \in \Delta$, O serait sur la médiatrice de $[AB]$ et on aurait $OA = OB$. C'est en contradiction avec l'hypothèse $OA \neq OB$, donc (AB) et (T_1T_2) sont sécantes et il existe un unique point S appartenant à ces deux droites.

b) Puisque $S \in (T_1T_2)$, d'après I-5°, $p_{\mathscr{C}}(S) = p_\Gamma(S)$.

c) La puissance de S par rapport à Γ' peut se calculer grâce à la sécante (AB) et vaut donc $p_{\Gamma'}(S) = \overline{SA}\,.\,\overline{SB} = p_\Gamma(S) = p_{\mathscr{C}}(S)$. Puisque S a la même puissance par rapport au cercle $\mathscr{C}$ et par rapport au cercle Γ', et puisque ces deux cercles sont sécants par hypothèse, c'est que S est sur la droite (U_1U_2), d'après I-5°.

d) En admettant que le cercle Γ existe, il existe un point S ayant la même puissance par rapport à tout cercle passant par A et B. Pour construire ce point S, connaissant juste les points A et B, il suffit de tracer un cercle Γ' passant par A et B et rencontrant $\mathscr{C}$ (il suffit de choisir comme centre un point Ω' de la médiatrice de $[AB]$, suffisamment éloigné du milieu de ce segment, par exemple en choisissant $\Omega' A = R$). Ce cercle Γ' rencontre $\mathscr{C}$ en deux points U_1 et U_2. On trace la droite (U_1U_2) et la droite (AB), et ces deux droites passent nécessairement par S ; elles ne peuvent pas être confondues (sinon Γ' contient 4 points alignés, c'est absurde), elles sont donc sécantes en S. Remarquons que S est forcément distinct de O, puisqu'il appartient à la droite (AB) qui n'est pas un diamètre. Ce n'est pas non plus un point du cercle $mathscrC$, car appartenant à la droite (U_1U_2), qui ne coupe le cercle qu'en ces deux points, il faudrait qu'il soit confondu avec un de ces deux points, $S = U_1$ par exemple, mais comme il appartient aussi à la droite (AB), on aurait trois points distincts U_1, A, B du cercle Γ' qui seraient alignés, c'est absurde.
Connaissant ce point S, on peut ensuite tracer la droite (OS), qui est le diamètre de $\mathscr{C}$ coupant ce cercle en T_1 et T_2. Enfin, Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle ABT_1, intersection de deux médiatrices.

e) La construction qui précède montre l'unicité du Γ.
En effet, dans la question d), on a prouvé que le point S est forcément à l'intersection de la droite (AB) avec la droite (U_1U_2), donc l'unicité du point S est prouvée. La droite (OS) est donc elle aussi unique, donc à l'ordre près les points T_1 et T_2 sont parfaitement déterminés (la paire $\{T_1, T_2\}$ est unique), et comme Γ doit passer par A, B, T_1, le cercle Γ est unique.

Il reste à établir l'existence.
Justifions d'abord que la construction précédente est toujours possible : le seul problème est l'existence de S. Si les droites (U_1U_2) et (AB) étaient parallèles, puisque (U_1U_2) est perpendiculaire à la droite $(O\Omega')$ joignant les centres des cercles $\mathscr{C}$ et Γ' (c'est la médiatrice de $[U_1U_2]$), la corde (AB) serait perpendiculaire à $(O\Omega')$. Mais la médiatrice de $[AB]$ est perpendiculaire à (AB) et passe par Ω', donc ce serait la droite $(O\Omega')$ et on aurait $OA = OB$, ce qui a été exclu par hypothèse.
Une fois le point S placé (et forcément distinct de O, comme on l'a vu plus haut), on peut toujours tracer le diamètre (OS), et on trouve les deux points diamétralement opposés T_1 et T_2.

On a donc parfaitement déterminé un point Ω, centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABT_1. Il ne reste plus qu'à démontrer que ce cercle Γ passe par T_2.
Or par construction, le point S est tel que $p_{\mathscr{C}}(S) = p_{\Gamma'}(S) = \overline{SA}\,.\,\overline{SB}$. Mais puisque A et B sont deux points de Γ, on a aussi $\overline{SA}\,.\,\overline{SB} = p_\Gamma(S)$, donc on a $p_{\mathscr{C}}(S) = p_\Gamma(S) = \overline{SA}\,.\,\overline{SB}$. Mais en utilisant la droite (OS), on a aussi $p_{\mathscr{C}}(S) = \overline{ST_1}\,.\,\overline{ST_2}$, donc on a $p_\Gamma(S) = \overline{ST_1}\,.\,\overline{ST_2}$. A priori la droite (ST_1) (on a vu plus haut que $S \notin \mathscr{C}$ donc $S \neq T_1$) recoupe le cercle Γ en un point V tel que $p_\Gamma(S) = \overline{ST_1}\,.\,\overline{SV}$. Comme $S \neq T_1$, de $\overline{ST_1}\,.\,\overline{ST_2} = \overline{ST_1}\,.\,\overline{SV}$ on peut déduire $\overline{ST_2} = \overline{SV}$ donc $T_2 = V$ et on a bien $T_2 \in \Gamma$.

4° a) Soit Γ un cercle distinct de $\mathscr{C}$ tel que $p_\Gamma = -1$; d'après I-2° ou d'après I-7°, on a $p_{\mathscr{C}}(O) = p_\Gamma(O)$ donc si ces deux cercles se coupent en T_1 et en T_2, d'après I-5°, O est sur la droite (T_1T_2) donc T_1 et T_2 sont diamétralement opposés. Et il est impossible que ces deux cercles ne se coupent pas, car dans ce cas le cercle Γ serait inclus entièrement dans $\mathscr{I}(\mathscr{C})$ ou dans $\mathscr{E}(\mathscr{C})$, et lors du calcul de $p_\Gamma(O)$ en utilisant une sécante (AB) de Γ passant par O, on aurait $|p_\Gamma(O)| = OA\,.\,OB$ qui serait soit < 1 (si Γ est intérieur à $\mathscr{C}$) soit > 1 sinon.
Réciproquement, si Γ est un cercle qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points T_1 et T_2 diamétralement opposés, alors O est un point sur la droite qui joint les deux points d'intersection de ces cercles, il a donc la même puissance par rapport à ces deux cercles et on a $p_\Gamma(O) = p_{\mathscr{C}}(O) = -1$.

b) Soient (a, b) et (a', b') les coordonnées respectives des points A et B dans le repère $\mathscr{R}$. Un cercle Γ passe par deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$ si et seulement si son équation cartésienne est de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y - 1 = 0$ (d'après ce qui précède et I-7°).
Ce cercle passe par A et B si et seulement si on a le système

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 + \alpha a + \beta b - 1 = 0 \\ a'^2 + b'^2 + \alpha a' + \beta b' - 1 = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

Ce système linéaire de deux équations aux deux inconnues α et β admet une unique solution lorsque son déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est non nul, ce qui correspond exactement au fait que A et B ne sont pas alignés avec O.
En conclusion, on retrouve que si A et B ne sont pas situés sur un même diamètre, il existe un unique cercle Γ passant par A et B et coupant $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés : c'est le cercle d'équation $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y - 1 = 0$ avec (α, β) solutions du système (2). Son centre est alors le point $\Omega(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$.

Partie III : Un problème de lieu géométrique.

1° a) En appliquant plusieurs fois Pythagore,

$$\Omega T_i^2 = \Omega O^2 + OT_i^2 = \Omega\Omega_0^2 + \Omega_0 O^2 + R^2 = \Omega\Omega_0^2 + \Omega O^2 + OT_0^2 = \Omega\Omega_0^2 + \Omega_0 T_0^2 = \Omega\Omega_0^2 + \Omega_0 A^2 = \Omega A^2$$

b) On vient de montrer que pour tout point Ω de Δ, le cercle Γ de centre Ω passant par A passe aussi par les deux points diamétralement opposés T_1 et T_2, donc Ω est un centre de cercle passant par A et coupant $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés : $\Omega \in \mathscr{L}$. On a donc établi que $\Delta \subset \mathscr{L}$.

2° Réciproquement, soit Γ un cercle (de centre $\Omega \in \mathscr{L}$) passant par A et par deux points diamétralement opposés T_1 et T_2 de $\mathscr{C}$. La médiatrice de $[T_1T_2]$ coupe Δ en un point Ω' qui est d'après l'étude qu'on vient de faire le centre d'un cercle qui passe par T_1, T_2 et A, puisque par construction le diamètre (T_1T_2) est perpendiculaire à $(\Omega' A)$. Ω' est donc le centre du cercle circonscrit au triangle AT_1T_2, or Γ est le cercle circonscrit à ce triangle ; par unicité, $\Gamma = \Gamma'$ et $\Omega = \Omega' \in \Delta$. On a établi l'inclusion réciproque $\mathscr{L} \subset \Delta$ et donc $\mathscr{L} = \Delta$.

3° Soient deux points A et B de $\mathscr{I}(\mathscr{C})$, non situés sur un même diamètre de $\mathscr{C}$, on construit pour chacun d'eux la droite Δ qu'on vient de définir :
On trace le diamètre perpendiculaire à (OA) qui coupe $\mathscr{C}$ en T_A et T'_A. On trace la médiatrice de $[AT_A]$ qui coupe (OA) en Ω_A (qui est le centre du cercle circonscrit à $AT_AT'_A$), puis la perpendiculaire Δ_A à (OA) qui passe par Ω_A.
On répète l'opération pour le point B, ce qui permet de tracer une droite Δ_B perpendiculaire à (OB). Comme (OB) et (OA) ne sont pas parallèles, Δ_A et Δ_B se coupent en un point Ω qui est tel que le cercle de centre Ω et passant par deux points diamétralement opposés T_1 et T_2 (obtenus en traçant la perpendiculaire à (ΩO) passant par O) passe aussi à la fois par A et par B.
Au lieu de répéter l'opération on peut aussi tout simplement tracer la médiatrice de $[AB]$ qui forcément coupera Δ_A en un point Ω qui convient comme centre d'un cercle passant par A, B et deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$.

Partie IV : Un «plan» étonnant.

1° Ce résultat est une conséquence directe de la partie II. En effet, si A et B sont deux points situés sur un même diamètre (T_1T_2) de $\mathscr{C}$, alors $]T_1T_2[$ est une Π-droite qui passe par A et B et la question II-1° montre qu'il n'y en a pas d'autres. Et si A et B ne sont pas situés sur le même diamètre, l'intersection de l'unique cercle Γ qui passe par A et B et coupe $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés avec Π est clairement la seule Π-droite qui passe par A et B.

2° a) Soient U et V deux Π-droites dont les supports se coupent en deux points diamétralement opposés T_1 et T_2. Leurs supports sont des droites ou cercles qui sont soit confondus, soit sécants en les deux points T_1 et T_2. Puisque l'intersection de deux cercles ou droites distincts ne peut pas contenir plus de deux points. Ces supports n'ont donc pas d'autres points d'intersection que T_1 et T_2, et a fortiori, $U \cap V$ est vide.

b) On a déjà vu que la puissance de O par rapport à Γ est -1. O est donc un point intérieur à Γ et toute droite passant par O est donc sécante à Γ en deux points. En particulier, le diamètre $(T_0T'_0)$ rencontre Γ en deux points M et N tels que $p_\Gamma(O) = \overline{OM}\ .\ \overline{ON} = -1$. Puisque M et N ne peuvent être confondus avec T_0 et T'_0, il est impossible que $OM = ON = 1$, donc une de ces deux longueurs, disons par exemple OM, est inférieure à 1 alors que l'autre est supérieure à 1. L'intersection des supports de U et V consiste donc en une paire de points $\{M, N\}$ dont un seul est dans Π. On a donc $U \cap V = \{M\}$.

c) Soit $x^2 + y^2 + ax + by - 1 = 0$ l'équation de Γ et $x^2 + y^2 + a'x + b'y - 1 = 0$ l'équation de Γ'. La recherche analytique de l'intersection de Γ et Γ' amène à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by - 1 = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y = 0 \end{cases}$$

Soit Ω de coordonnées $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ le centre de Γ et Ω' de coordonnées $(-\frac{a'}{2}, -\frac{b'}{2})$ le centre de Γ'. Le fait que $(T_1T_2) \neq (T'_1T'_2)$ implique entre autres que $\Omega \neq \Omega'$ donc on n'a pas simultanément $a = a'$ et $b = b'$. L'équation $(a - a')x + (b - b')y = 0$ caractérise donc une droite qui est un diamètre de $\mathscr{C}$ (elle passe par O). La recherche de l'intersection de Γ et de Γ' se ramène donc

à la recherche de l'intersection du cercle Γ avec le diamètre de $\mathscr{C}$ qu'est la droite Δ d'équation $(a-a')x+(b-b')y=0$. Or cette droite ne passe pas par T_1 et T_2, (sinon ces points seraient aussi des points de Γ' : en effet, si (u,v) sont les coordonnées de T_i, on a $u^2+v^2+au+bv-1=0$ et on aurait $au+bv=a'u+b'v$ donc $u^2+v^2+a'u+b'v-1=0$ et $T_i\in\Gamma'$) donc on peut appliquer le résultat de la question précédente, qui a montré que dans cette situation, l'intersection d'un tel diamètre de $\mathscr{C}$ et d'un tel cercle qui passe par deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$ est formée de deux points $\{M,N\}$ dont un seul est dans Π.
Or $\Gamma\cap\Gamma'=\Gamma\cap\Delta$, donc le résultat est établi.

d) Soient U et V deux Π-droites non confondues et parallèles.
Si leurs supports respectifs sont deux cercles Γ et Γ', et si ces cercles coupaient $\mathscr{C}$ en des couples différents de points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$, alors d'après c), l'intersection de U et V serait non vide : elle consisterait en le point qui est dans Π de $\Gamma\cap\Gamma'$.
Si un des deux supports, disons celui de U est une droite Δ, l'autre étant un cercle Γ, et si ces supports coupaient $\mathscr{C}$ en des couples différents de points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$, alors le résultat de la question b) permet d'affirmer que U et V ne seraient pas d'intersection vide.
Et si les deux supports étaient des diamètres différents, U et V se rencontreraient évidemment en O.
Donc si on affirme que $U\cap V=\emptyset$, on est certain que les supports de U et V rencontrent $\mathscr{C}$ au même couple de points diamétralement opposés (T_1,T_2), et donc l'intersection de ces deux supports est cette paire de points.

e) On a établi que le Π-parallélisme est caractérisé par le fait que les supports rencontrent $\mathscr{C}$ en le même couple de points diamétralement opposés. Avec cette caractérisation, le fait que le Π-parallélisme est une relation d'équivalence devient trivial.

3° On a déjà presque complètement établi ce résultat, dans le cas où un des supports est une droite et l'autre un cercle en 2° b) et dans le cas où les deux supports sont des cercles comme conséquence immédiate de 2° c). Il ne reste que le cas banal où les deux supports sont des droites, qui sont donc des diamètres qui se coupent évidemment en O s'ils ne sont pas confondus, O étant évidemment aussi le point d'intersection unique des Π-droites considérées.

4° Soient T_1 et T_2 les deux points d'intersection, diamétralement opposés, du support de U avec $\mathscr{C}$. Une Π-droite parallèle à U a nécessairement son support qui passe par T_1 et T_2.
Si $A\in]T_1T_2[$, ces trois points sont distincts et alignés, donc il n'existe aucun cercle qui passe par A, T_1 et T_2 donc $V=]T_1T_2[$ est l'unique Π-droite qui passe par A et qui est Π-parallèle à U.
Si $A\notin]T_1T_2[$, ces trois points n'étant pas alignés ils forment un triangle, et le cercle Γ circonscrit à ce triangle est le seul qui passe par ces trois points. Γ est le support de la Π-droite $V=\Gamma\cap\Pi$, qui passe par A, et qui est Π-parallèle à U, et c'est bien sûr la seule.

Partie V : Grands cercles d'une sphère et droites d'un plan.

1° Soient C_1 et C_2 deux grands cercles non confondus de Σ. Il existe donc deux plans distincts P_1 et P_2 qui passent par O et tels que $C_i=P_i\cap\Sigma$ pour $i=1,2$.
P_1 et P_2 sont deux plans distincts d'intersection non vide (O appartient à ces deux plans) : leur intersection est donc une droite Δ qui passe par O, c'est-à-dire un diamètre de la sphère Σ. L'intersection de Σ avec Δ consiste donc en deux points diamétralement opposés de Σ, $\{M,N\}$.

$$C_1\cap C_2=(P_1\cap\Sigma)\cap(P_2\cap\Sigma)=(P_1\cap P_2)\cap\Sigma=\Delta\cap\Sigma=\{M,N\}$$

2° L'intersection de $\mathscr{Q}$ avec Σ est par définition un grand cercle distinct de $\mathscr{C}$ puisque $\mathscr{Q}$ est distinct de $\mathscr{P}$. Son intersection avec Σ^+ est donc l'intersection de ce grand cercle avec le demi-espace caractérisé par $z > 0$. C'est un « demi-grand cercle ». L'intersection de $\mathscr{Q}$ avec $\mathscr{C}$ est l'intersection de deux grands cercles distincts de Σ, c'est donc une paire de points diamétralement opposés de Σ et aussi de $\mathscr{C}$.

3° Le problème est simplement de montrer que l'intersection de Σ^+ et de la droite (OM) est toujours un singleton. Or le point M' défini par $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ est par construction un point de $\Sigma \cap (OM)$ et puisque l'ordonnée de M vaut 1, celle de M' est $\dfrac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|} > 0$, donc ce point M' est dans Σ^+. Réciproquement, soit N un point de $\Sigma^+ \cap (OM)$. Il est tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM}$. Puisque $N \in \Sigma$, on a $\|\overrightarrow{ON}\| = 1$ donc $|\lambda| = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|}$. Or si $\lambda = -\dfrac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|}$, l'ordonnée de N serait négative, donc si $N \in \Sigma^+$, nécessairement $\lambda > 0$ et donc $N = M'$. On a établi que $\Sigma^+ \cap (OM) = \{M'\}$, donc l'application φ est bien définie.

Soit $N \in \Sigma^+$. D'après le calcul que l'on vient de faire, pour tout point M de Π_0, on a l'équivalence

$$N = \varphi(M) \iff \overrightarrow{ON} = \frac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|}\overrightarrow{OM}$$

Soient (x, y, z) les coordonnées de N dans $\mathscr{R}'$. On a par hypothèse $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $z > 0$. Le point M a pour coordonnées $(x', y', 1) = \|\overrightarrow{OM}\|(x, y, z)$ d'où $\|\overrightarrow{OM}\|\ z = 1$ et nécessairement $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{z}\overrightarrow{ON}$.

Le point N ne peut donc avoir qu'un antécédent par φ qui est donc bien injective.

On vérifie que le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{z}\overrightarrow{ON}$ est un point de Π_0 (sa troisième coordonnée vaut $\dfrac{z}{z} = 1$) et que son image par φ est bien N puisque $\|\overrightarrow{OM}\| = \dfrac{1}{z}$ donc le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|}\overrightarrow{OM}$ vérifie en fait $\overrightarrow{OM'} = z\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ donc $\varphi(M) = N$ et φ est bien surjective.

4° On appellera demi grand cercle l'intersection d'un grand cercle de Σ (distinct de $\mathscr{C}$) avec le demi-espace $z > 0$; c'est aussi, bien entendu l'intersection d'un grand cercle de Σ distinct de $\mathscr{C}$ avec Σ^+.

Soit Δ_0 une droite affine de Π_0 ; Δ_0 ne passe pas par l'origine O. Soit $\mathscr{Q}$ le plan défini par la droite Δ_0 et l'origine O. Soit D l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec Σ^+. Par construction, D est un « demi grand cercle ». Montrons que l'image de Δ_0 par φ est égale à D. Tout d'abord, si $M \in \Delta_0$, on a $(OM) \subset \mathscr{Q}$, donc $M' = \varphi(M)$ qui est à l'intersection de (OM) avec Σ^+ est dans l'intersection de $\mathscr{Q}$ avec Σ^+, c'est-à-dire que $M' = \varphi(M) \in D$. On a établi que $\varphi(\Delta_0) \subset D$.

Réciproquement, soit $N \in \Delta_0$. Si (x, y, z) sont les coordonnées de N dans le repère $\mathscr{R}$, on a vu que $M = \varphi^{-1}(N)$ est le point tel que $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{z}\overrightarrow{ON}$. Comme N et O sont deux points de $\mathscr{Q}$, il est clair que M est dans $\mathscr{Q}$. D'autre part, il appartient à Π_0 d'après la définition de φ, donc il appartient à $\Pi_0 \cap \mathscr{Q} = \Delta_0$ puisque ces deux plans ne sont pas confondus et contiennent tous les deux cette droite. Donc $\varphi^{-1}(D) \subset \Delta_0$ et on a bien $\varphi(\Delta_0) = D$.

L'image par φ de la droite Δ_0 : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ est à l'intersection avec Σ^+ du plan contenant

Δ_0 et O, qui a clairement comme équation $ax+by+cz=0$. Une caractérisation analytique de $D=\varphi(\Delta_0)$ est donc $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ z>0 \end{cases}$.

Partie VI : Une autre correspondance entre sphère et plan.

1° Il suffit de montrer que pour tout point M de Σ^*, la droite (SM) est sécante avec le plan $\mathscr{P}$. Or S est le seul point de Σ dont la troisième coordonnée vaut -1, et donc tous les autres ont une troisième coordonnée $z>-1$. La droite (SM) n'est donc pas « horizontale », c'est-à-dire parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation $z=0$, donc elle coupe $\mathscr{P}$ en un unique point M'. ψ est donc bien définie.
Pour tout point N de P, la droite (SN) coupe la sphère Σ en S, donc en un deuxième point M qui ne peut être confondu avec S, puisque la droite (SN) qui joint deux points de cotes différentes (0 et -1) n'est pas « horizontale », et que le plan tangent à Σ en S est « horizontal ». Puisque $M\neq S$ et $N\neq S$, et que ces trois points sont alignés, on a $(MS)=(SN)$ de sorte que clairement $N=\psi(M)$ (la droite (SM) coupe $\mathscr{P}$ en N). On a montré que ψ était surjective.
De plus, un antécédent de $N\in\mathscr{P}$ est forcément un point de la droite (SN) et aussi un point de Σ^* donc le point M intersection de (SN) et de Σ^* est le seul possible et ψ est aussi injective.

2° Puisque S,M,N sont des points alignés, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $N=S+\lambda\overrightarrow{SM}$. Traduisant ceci au niveau des coordonnées, on obtient

$$\begin{cases} x'=0+\lambda x \\ y'=0+\lambda y \\ z'=-1+\lambda(z+1) \end{cases}$$

Or $N\in\mathscr{P}$ donc $z'=0$ et $\lambda=\dfrac{1}{z+1}$ (remarquons que $z>-1$ car $M\neq S$).
D'où $\begin{cases} x'=\dfrac{x}{z+1} \\ y'=\dfrac{y}{z+1} \\ z'=0 \end{cases}$

3° Soit un point $N(x,y,0)\in\mathscr{P}$. Son antécédent unique (puisque φ est bijective) est le point $M(X,Y,Z)$ de la droite (SN) qui appartient à Σ^*. Ses coordonnées vérifient donc

$$\begin{cases} X=\lambda x \\ Y=\lambda y \\ Z=\lambda-1 \\ X^2+Y^2+Z^2=1 \end{cases} \qquad (\lambda\in\mathbb{R}^*).$$

On a donc $\lambda^2x^2+\lambda^2y^2+\lambda^2-2\lambda+1=1$ d'où $\lambda=\dfrac{2}{x^2+y^2+1}$ et

$$\begin{cases} X=\dfrac{2x}{x^2+y^2+1} \\ Y=\dfrac{2y}{x^2+y^2+1} \\ Z=\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ce point M est bien sur Σ^* car

$$\begin{aligned} X^2+Y^2+Z^2 &= \frac{4x^2}{(x^2+y^2+1)^2}+\frac{4y^2}{(x^2+y^2+1)^2}+\frac{1+x^4+y^4-2x^2-2y^2+2x^2y^2}{(x^2+y^2+1)^2} \\ &= \frac{1+x^4+y^4+2x^2+2y^2+2x^2y^2}{(x^2+y^2+1)^2}=1 \end{aligned}$$

et que $\varphi(M)$ a pour coordonnées $(X',Y',0)$ avec $X'=\dfrac{X}{Z+1}=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2+y^2+1}}{\dfrac{2}{x^2+y^2+1}}=x$ et de même $Y'=y$, donc on a bien $\psi(M)=N$.

4° Un grand cercle de Σ étant l'intersection de Σ avec un plan passant par l'origine O du repère, et un tel plan ayant une équation du type $ax+by+cz=0$, il est clair que le système proposé caractérise un grand cercle et réciproquement.

5° Soit $\mathscr{D}$ un grand cercle de Σ, caractérisé par le système $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$

Remarquons tout d'abord que ce grand cercle est inclus dans Σ^* si et seulement si il ne passe pas par S, c'est-à-dire lorsque $c\neq 0$.

Si $c\neq 0$, déterminons $\psi(\mathscr{D})$ par une caractérisation analytique ; nous utiliserons les notations de 2°. Le point N générique de $\psi(\mathscr{D})$ a pour coordonnées $(X,Y,0)$ tandis que le point M générique de $\mathscr{D}$ a pour coordonnées (x,y,z). Les questions 2° et 3° nous ont permis de lier (x,y,z) et $(X,Y,0)$ lorsque $N=\psi(M)$: $\begin{cases} x=\dfrac{2X}{X^2+X^2+1} \\ y=\dfrac{2Y}{X^2+X^2+1} \\ z=\dfrac{1-X^2-X^2}{1+X^2+Y^2}. \end{cases}$

$N\in\psi(\mathscr{D}) \iff M\in\psi(\mathscr{D}) \iff \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a\,\dfrac{2X}{X^2+X^2+1}+b\,\dfrac{2Y}{X^2+X^2+1}+c\dfrac{1-X^2-X^2}{1+X^2+Y^2}=0 \\ \left(\dfrac{2X}{X^2+X^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{2Y}{X^2+X^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{1-X^2-X^2}{1+X^2+Y^2}\right)^2=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2aX+2bY+c-cX^2-cY^2=0 \\ 4X^2+4Y^2+(1-X^2-X^2)^2=(X^2+X^2+1)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X^2+Y^2-2\dfrac{a}{c}X-2\dfrac{B}{c}Y-1=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

(La deuxième condition n'en est plus une.)

$\Psi(\mathscr{D})$ est caractérisé par la seule équation $X^2+Y^2-2\dfrac{a}{c}X-2\dfrac{B}{c}Y-1=0$, c'est un cercle Γ de $\mathscr{P}$ dont l'équation est $x^2+y^2-2\dfrac{a}{c}x-2\dfrac{b}{c}y-1=0$. Puisque le terme constant est -1, d'après

II-4° a), $\Gamma = \psi(\mathscr{D})$ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés (ou qui est égal au cercle $\mathscr{C}$).

Si $c = O$, on raisonne de la même façon :

$$N \in \psi(\mathscr{D}) \iff M \in \psi(\mathscr{D}) \iff \begin{cases} ax + by = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a\,\dfrac{2X}{X^2 + X^2 + 1} + b\,\dfrac{2Y}{X^2 + X^2 + 1} = 0 \\ \left(\dfrac{2X}{X^2 + X^2 + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{2Y}{X^2 + X^2 + 1}\right)^2 + \left(\dfrac{1 - X^2 - X^2}{1 + X^2 + Y^2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2aX + 2bY = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas $\Psi(\mathscr{D})$ est caractérisé par la seule équation $aX + bY = 0$, c'est une droite Γ de $\mathscr{P}$ qui passe par l'origine et qui coupe aussi le cercle $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés.

6° On a vu que $\varphi(\mathscr{D})$ était soit un diamètre de $\mathscr{C}$ qui coupe ce cercle en deux points diamétralement opposés, soit un cercle Γ de $\mathscr{P}$ rencontre $\mathscr{C}$ en deux points diamétralement opposés (à moins que Γ ne soit égal à $\mathscr{C}$, ce qui se produira si $\mathscr{D} = \mathscr{C}$, dans le cas où le plan qui contient $\mathscr{D}$ est $\mathscr{P}$).

7° Soit $M \in \Sigma^*$ et $N(X, Y) \in \mathscr{P}$. Les coordonnées de M dans $\mathscr{R}'$ sont de Σ^* et celles de N dans $\mathscr{R}$ sont (X, Y).
Pour montrer que ψ^+ est une bijection de Σ^+ sur Π, il suffit d'établir l'équivalence des caractérisations de ces deux ensembles, sachant que $(X, Y) = (\dfrac{x}{z+1}, \dfrac{y}{z+1})$ et aussi bien sûr que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avec $z \neq -1$.
Or Σ^+ est caractérisé par $z > 0$ et Π par $X^2 + Y^2 < 1$.

$$X^2 + Y^2 < 1 \iff x^2 + y^2 < (z+1)^2 \iff 1 - z^2 < z^2 + 2z + 1 \iff 2z(z+1) > 0 \iff z > 0$$

(puisque $z + 1 > 0$).

8° Soit $\mathscr{D}'$ un demi grand cercle de Σ^+. Il existe un grand cercle $\mathscr{D}$ tel que $\mathscr{D}' = \mathscr{D} \cap \Sigma^+$. Supposons d'abord que $\mathscr{D}$ ne passe pas par S. On a donc $\psi^+(\mathscr{D}') = \psi(\mathscr{D}') = \psi(\mathscr{D} \cap \Sigma^+) = \psi(\mathscr{D}) \cap \psi(\Sigma^+)$ (pour une application f injective, il est correct que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$).
Or $\psi(\Sigma^+) = \Pi$ et $\psi(\mathscr{D})$ est un cercle Γ qui passe par deux points diamétralement opposés de $\mathscr{C}$ d'après 5° ; L'intersection d'un tel cercle avec Π est par définition une Π-droite.
Si $\mathscr{D}$ passe par S, considérons $\mathscr{D}^* = \mathscr{D} \setminus \{S\}$; on a aussi $\mathscr{D}' = \mathscr{D}^* \cap \Sigma^+$ de sorte que par le même raisonnement, $\psi^+(\mathscr{D}') = \Pi \cap \psi(\mathscr{D}^*)$. Or $\psi(\mathscr{D}^*)$ est un diamètre de $\mathscr{C}$, dont l'intersection avec Π est aussi une Π-droite.

Partie VII : Synthèse et Application.

1° D'après la partie V, φ est une bijection de Π_0 sur Σ^+ et d'après la partie VI, ψ^+ est une bijection entre Σ^+ et Π, donc $h = \psi^+ \circ \varphi$ est une bijection de Π_0 sur Π.
Or φ transforme les droites de Π_0 en des demi grands cercles de Σ^+, les quels sont transformés en Π-droites de Π : h transforme donc les droites de Π en des Π-droites de Π.
Il reste à vérifier que h induit bien une bijection entre l'ensemble des droites de Π_0 et l'ensemble des Π-droites. Pour cela, on considère une Π-droite G de Π et deux points distincts tels que cette Π-droite puisse s'écrire $G = ((AB))$. Puisque h est une bijection, il existe deux points C

et D de Π_0 tels que $h(C) = A$ et $h(D) = B$. Si une droite Δ_0 de Π a pour image G, elle doit passer par les antécédents C et D de A et B, donc nécessairement $\Delta_0 = (CD)$; l'image par h de cette droite de Π_0 est une Π-droite qui doit passer par $A = h(C)$ et par $B = h(D)$: c'est donc bien la Π-droite $G = ((AB))$ (on a établi dans la partie IV l'unicité de cette Π-droite). D'où $h(\Delta_0) = G$, et on a bien établi l'existence et l'unicité d'un antécédent de G par l'application induite par h sur l'ensemble des droites de Π_0.

Puisque h est une bijection, deux droites sans point commun de Π_0 sont nécessairement transformées par h en deux Π-droites sans point commun de Π, c'est-à-dire en Π-droites Π-parallèles. De même deux droites confondues étant transformées en Π-droites confondues, h «conserve le parallélisme». (Remarquons qu'il en est de même par le même raisonnement pour h^{-1}).

2° Soit $N = \varphi(M)$ et (X, Y, Z) les coordonnées de N dans $\mathscr{R}'$. On a vu dans la question V-3° qu'on avait $\overrightarrow{ON} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{OM}\|}\overrightarrow{OM}$, donc

$$\begin{cases} X = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \\ Y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \\ Z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \end{cases}$$

Et bien sûr $M' = h(M) = \psi^+(N) = \psi(N)$, donc d'après la partie VI, on a

$$\begin{cases} x' = \dfrac{X}{Z+1} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \\ y' = \dfrac{Y}{Z+1} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \end{cases}$$

3° Si M est un point de Π de coordonnées (x, y) (telles que $x^2 + y^2 < 1$), soit $N = h^{-1}(M)$ et soient $(x', y', 1)$ les coordonnées de N. Puisque $M = h(N)$, d'après la question précédente, on a

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+1}+1} \\ y = \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+1}+1} \end{cases}$$

Remarquons tout d'abord que $(x, y) = (0, 0) \iff (x', y') = (0, 0)$. Nous supposerons dans la suite que ces deux couples sont non nuls.
Il est alors pertinent de poser ici $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $r' = \sqrt{x'^2+y'^2}$, et comme x et y ont les mêmes signes respectivement que x' et y', comme leurs rapports sont égaux, on a $x = r\cos\theta$, $y = r\cos\theta$, $x' = r'\cos\theta$ et $y' = r'\sin\theta$ pour le même θ (modulo 2π).
On a donc $r = \frac{r'}{\sqrt{r'^2+1}+1}$ d'où $r\sqrt{r'^2+1} = r' - r$ et nécessairement $r^2r'^2 + r^2 - r'^2 - r^2 + 2rr' = 0$ et $r'\Big[r'(r^2-1) + 2r\Big] = 0$. Comme $r' \neq 0$, on en déduit que $r' = \dfrac{2r}{1-r^2}$, et en multipliant par

$\cos\theta$ puis par $\sin\theta$, on obtient

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2x}{1-(x^2+y^2)} \\ y' = \dfrac{2y}{1-(x^2+y^2)} \end{cases}$$

(Cette formule est encore valable si x et y sont simultanément nuls).
Remarque : pour vérifier ces formules, on peut se lancer dans le calcul des coordonnées de $h(N)$, en remarquant que $\sqrt{x'^2+y'^2+1} = \sqrt{r'^2+1} = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$ ce qui simplifie bien les calculs.

4° Soient $A' = h^{-1}(A)$, $B' = h^{-1}(B)$, $C' = h^{-1}(C)$. On considère le point D' tel que $A'C'B'D'$ soit un parallélogramme (D' est à l'intersection de la droite Δ'_1 qui passe par B' et qui est parallèle à $(A'C')$ et de la droite Δ'_2 qui passe par A' et qui est parallèle à $(B'C')$). Par conservation du parallélisme, on a nécessairement $D = h(D')$. Puisque $A'C'B'D'$ est un parallélogramme, ses diagonales $(A'B')$ et $(C'D')$ se coupent en leur milieu I', donc ne sont pas parallèles, et par conséquent les images par h de ces droites qui sont les Π-droites $((AB))$ et $((CD))$ ne peuvent pas être Π-parallèles et se coupent en $I = h(I')$.
Si on choisissait un autre point que C, disons C_1, non situé sur $((AB))$, le même raisonnement dans Π_0 ferait construire un paralllógramme $A'C'_1B'D'_1$ dont les diagonales se couperaient encore en I' milieu de $[A'B']$, de sorte que $((C_1D_1))$ coupe aussi $((AB))$ en I : la construction est bien indépendante de C.

5° On peut utiliser n'importe quel point C. Le plus simple est d'utiliser le point O, car alors les Π-droites $((AO))$ et $((BO))$ sont des diamètres de $\mathscr{C}$ (plus précisément : leurs supports sont des diamètres). La Π-droite Π-parallèle à $((AO))$ qui passe par B est un arc du cercle (inclus dans Π) qui passe par B et les deux extrémités T_0 et T'_0 du diamètre (AO), le centre Ω_1 de ce cercle est à l'intersection de l'axe des abscisses (BO) et de la médiatrice de $[BT_0]$. On trace de même la Π-droite Π-parallèle à $((BO))$ qui passe par A : c'est un arc du cercle dont le centre Ω_2 est à l'intersection de (OA) et de la médiatrice de $[AT_1]$ où T_1 est une des extrémités du diamètre (OB). D est à l'intersection de ces deux arcs de cercle (D appartient à Π). La Π-droite $((OD))$ admet aussi comme support le diamètre (OD) de $\mathscr{C}$.
Il reste à tracer la Π-droite $((AB))$, en utilisant une des deux méthodes proposées dans les parties II et III. Ici, la méthode la plus simple est la méthode de la partie III, puisqu'on a déjà les centres Ω_1 et Ω_2 des cercles dont on a besoin. Il suffit de tracer la parallèle à (OA) qui passe par Ω_1 et la parallèle à (OB) qui passe par Ω_2. À l'intersection de ces deux droites, on trouvera le centre Ω du cercle support de $((AB))$. On trouve ensuite le Π-milieu I de $\{A, B\}$ à l'intersection de $((AB))$ et $((OD))$.

6° Puisque $x_A = 0$ et $y_A = \frac{1}{2}$, les coordonnées de A' sont $x_{A'} = \dfrac{2x_A}{1-(x_A^2+y_A^2)} = 0$, $y_{A'} = \dfrac{2y_A}{1-(x_A^2+y_A^2)} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$ (et bien sûr $z_{A'} = 1$).
De même, on a $x_{B'} = \dfrac{2x_B}{1-(x_B^2+y_B^2)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}} = \dfrac{8}{15}$, $y_{B'} = \dfrac{2y_B}{1-(x_B^2+y_B^2)} = 0$ (et $z_{B'} = 1$)
On en déduit les coordonnées de I' qui est le milieu de $[AB]$:
$x_{I'} = \dfrac{4}{15}$ et $y_{I'} = \dfrac{2}{3}$.
Enfin, puisque $I = h(I')$, les coordonnées de I sont

$$
\begin{aligned}
x_I &= \frac{x_{I'}}{\sqrt{x_{I'}^2 + y_{I'}^2 + 1} + 1} = \frac{\frac{4}{15}}{\sqrt{\frac{16}{225} + \frac{4}{9} + 1} + 1} = \frac{4}{\sqrt{16 + 100 + 225} + 15} = \frac{4}{\sqrt{341} + 15} \\
y_I &= \frac{y_{I'}}{\sqrt{x_{I'}^2 + y_{I'}^2 + 1} + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{16}{225} + \frac{4}{9} + 1} + 1} = \frac{10}{\sqrt{16 + 100 + 225} + 15} = \frac{10}{\sqrt{341} + 15}
\end{aligned}
$$