43.0.1
52.0.8

J. 5170

SESSION DE 1997

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

sections : mathématiques
breton

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche - éventuellement programmable et alphanumérique - à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Documents interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel strictement positif. On notera S_α la somme de la série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$, $\sigma_\alpha(n)$ la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\rho_\alpha(n)$ la somme de la série reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$.

L'objet du problème est l'étude de la fonction S, définie sur $\mathbf{R}_+^*$, qui à α associe S_α, et la détermination de développements asymptotiques pour $\rho_\alpha(n)$.

Pour chaque calcul numérique, on décrira la méthode de calcul utilisée et on justifiera le résultat en tenant compte des erreurs d'arrondi.

Les dérivées successives d'une fonction f seront notées $f^{(r)}$; par convention, on pose $f^{(0)} = f$.

I. ÉTUDE DE LA FONCTION S

I.1. Régularité et variations de la fonction S.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{R}_+^*, \quad f_k(\alpha) = \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

I.1.1. Montrer que, pour tout entier $r \geq 1$, la série de fonctions de terme général $f_k^{(r)}$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[\alpha_0, +\infty[$ avec $\alpha_0 > 0$.

I.1.2. En déduire que la fonction S est de classe C^∞.

I.1.3. Montrer que la fonction S est décroissante et convexe.

I.2. Étude aux bornes de la fonction S.

I.2.1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a les inégalités

$$\frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^\alpha}. \qquad (1)$$

I.2.2. Montrer que, pour n fixé, on a

$$S_\alpha = \sigma_\alpha(n) + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

quand α tend vers $+\infty$. On a en particulier $\lim_{\alpha \to \infty} S_\alpha = 1$.

1.2.3. *a.* Montrer que $S_\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$ est borné au voisinage de 0.

b. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{\alpha+1}}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$. En déduire un minorant de la dérivée de la fonction $\alpha \mapsto \rho_\alpha(3)$, puis la croissance de la fonction $\alpha \mapsto \rho_\alpha(3) - \dfrac{1}{\alpha}$.

c. En écrivant $S_\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = \sigma_\alpha(3) + \left(\rho_\alpha(3) - \dfrac{1}{\alpha}\right)$, montrer qu'il existe une constante γ telle que

$$S_\alpha = \frac{1}{\alpha} + \gamma + o(1)$$

quand α tend vers 0 par valeurs supérieures.

d. En utilisant l'encadrement (1), montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leq \gamma \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

En déduire que $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)\right)$.

[Ce nombre γ est appelé la constante d'Euler.]

I.3. **Valeurs numériques approchées de S_α et de γ.**

I.3.1. *a.* En utilisant l'encadrement (1), déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-3} près de S_α pour $\alpha = 0{,}5$.

b. Peut-on raisonnablement espérer trouver de la même manière la valeur décimale par défaut à 10^{-7} près de $S_{0,5}$? Pourquoi ?

I.3.2. On cherche un meilleur encadrement de $\rho_\alpha(n)$ dans l'espoir d'en déduire une meilleure approximation de S_α.

a. Pour tout $\alpha > 0$, on note h_α la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad h_\alpha(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$

Montrer que h_α est convexe.

b. Montrer, en utilisant la méthode des trapèzes, qu'on a

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}\right).$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la minoration

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \rho_\alpha(n). \qquad (2)$$

c. Montrer, en utilisant la méthode du milieu, qu'on a

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la majoration

$$\rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^\alpha}. \qquad (3)$$

Tournez la page S.V.P.

I.3.3. En utilisant l'encadrement résultant de (2) et (3), déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-7} près de $S_{0,5}$.

I.3.4. *a.* Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

b. Déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-6} près de γ.

II. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE $\rho_\alpha(n)$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement positif fixé.

On définit une suite de fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1[$ par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \varphi_0(x) = (1-x)^{-\alpha} - 1$$

et, pour tout entier $j \geq 1$, par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \varphi_j(x) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+j-1)\, x^j \left((1-x)^{-(\alpha+j)} - 1\right).$$

Étant donné une suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de réels, pour tout entier $p \geq 1$, on notera g_p la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad g_p(x) = \sum_{j=0}^{p-1} u_j \ \varphi_j(x) - x.$$

II.1. Détermination de $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ pour que $g_p(x) = O(x^{p+1})$ au voisinage de 0.

II.1.1. Montrer que, pour $r \leq j$, on a $\varphi_j^{(r)}(0) = 0$ et que, pour $r > j$, on a

$$\varphi_j^{(r)}(0) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)\frac{r!}{(r-j)!}.$$

II.1.2. Montrer que, pour tout entier r vérifiant $1 \leq r \leq p$, on a $g_p^{(r)}(0) = g_r^{(r)}(0)$. En déduire que la condition

$$\forall p \geq 1, \quad g_p(x) = O(x^{p+1}) \tag{4}$$

au voisinage de 0, est équivalente à la condition

$$\forall p \geq 1, \quad g_p^{(p)}(0) = 0.$$

II.1.3. Calculer $g_p^{(p)}(0)$. En déduire que la condition (4) est vérifiée si et seulement si la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie

$$u_0 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 2, \ \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{(p-j)!} = 0. \tag{5}$$

II.1.4. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifiant (5), donc telle que la condition (4) soit vérifiée. Quand ces conditions sont vérifiées, montrer que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, le nombre $\alpha\, u_j$ est rationnel.

II.2. **Développements asymptotiques de** $\rho_\alpha(n)$**.**

On suppose maintenant que la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie (5).

II.2.1. Montrer que, pour $p \geq 1$ fixé, la série de terme général $\frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right)$, avec $k \geq 2$, est convergente et que la série reste vérifie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+p}}\right)$$

pour n au voisinage de l'infini.

II.2.2. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, il existe un polynôme G_p tel que

$$\forall\, k \geq 2, \quad \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(k-1)^\alpha} G_p\left(\frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{k^\alpha} G_p\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

En déduire que

$$\forall\, n \geq 1, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n^\alpha} G_p\left(\frac{1}{n}\right) - \rho_\alpha(n)$$

et que, pour n au voisinage de l'infini, on a donc

$$\rho_\alpha(n) = \frac{1}{n^\alpha} G_p\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+p}}\right).$$

II.3. **Propriétés de la suite** $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ **vérifiant la récurrence** (5).

On suppose encore que la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie (5).

Soit θ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\theta(0) = 1$ et

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^*, \quad \theta(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1}.$$

II.3.1.*a*. Montrer que la fonction θ admet au voisinage de 0 des développements limités à tout ordre. Pour tout $p \geq 1$, on notera

$$\theta(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_p x^p + \mathrm{o}(x^p)$$

ce développement limité.

b. Expliciter v_0, v_1, v_2 et v_3.

II.3.2. Montrer que, pour tout $j \geq 0$, on a $v_j = \alpha\, u_j$.

II.3.3.*a*. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\theta(x) = \frac{x}{2}\left(\coth\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).$$

b. En déduire que pour tout $i \geq 1$, on a $v_{2i+1} = 0$.

II.3.4.*a*. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a l'égalité

$$\operatorname{th}(x) + \coth(x) = 2\coth(2x)\,.$$

b. Exprimer les coefficients des développements limités de la fonction th au voisinage de 0 en fonction de ceux de la fonction θ .

c. Montrer que pour tout entier $i \geq 1$, la dérivée $\operatorname{th}^{(2i-1)}(0)$ est non nulle et du signe de $(-1)^{i-1}$. [On pourra raisonner par récurrence et dériver, à l'aide de la formule de Leibniz, l'identité $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.]

d. En déduire que, pour tout $i \geq 1$, le coefficient v_{2i} est du signe de $(-1)^{i-1}$.

II.4. **Développements asymptotiques de $\rho_\alpha(n)$ (suite).**

On suppose toujours que la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie (5).

II.4.1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, on a $g_{2p+1} = g_{2p+2}$.

II.4.2. En déduire que, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\rho_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{p} (\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+2i-1)\frac{v_{2i}}{n^{\alpha+2i}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p+2}}\right)$$

pour n au voisinage de l'infini.

III. NON-CONVERGENCE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE $\rho_\alpha(n)$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement positif fixé. On se propose de montrer que la partie régulière des développements asymptotiques de $\rho_\alpha(n)$ n'a pas de limite finie lorsque p tend vers l'infini.

III.1. Pour $x \in \mathbf{R}^*$ fixé, on considère la fonction 2π-périodique f telle que pour $t \in \,]-\pi, \pi]$ on ait $f(t) = \operatorname{ch}(xt)$.

III.1.1. Montrer que la fonction f est paire, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$.

III.1.2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.

III.1.3. Justifier l'égalité entre f et la somme de sa série de Fourier. En écrivant cette égalité pour $t = \pi$, montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\pi\coth(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}\,.$$

III.2. On rappelle que, pour tout entier N et pour tout réel $X \neq -1$, on a

$$\frac{1}{1+X} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k + (-1)^{N+1} \frac{X^{N+1}}{1+X}. \tag{6}$$

III.2.1. En appliquant (6) aux quantités

$$\frac{2x}{x^2+n^2} = \frac{2x}{n^2}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1},$$

montrer qu'au voisinage épointé de 0 on a

$$\pi \coth(\pi x) - \frac{1}{x} = 2 \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} S_{2i-1}\, x^{2i-1} + \mathrm{O}(x^{2p+1}).$$

III.2.2. En déduire que, pour tout $i \geq 1$, on a

$$v_{2i} = 2(-1)^{i-1} \frac{S_{2i-1}}{(2\pi)^{2i}}.$$

III.3. Déduire des questions précédentes que, pour $\alpha > 0$ et $n > 0$ fixés, on a

$$\lim_{p \to \infty} \left[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+2p-1)\frac{|v_{2p}|}{n^{\alpha+2p}}\right] = +\infty.$$

Conclure.