SESSION DE 1995

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude d'un algorithme, voisin de celui de Salamin (1976), qui donne une suite convergeant très rapidement vers π.

Étant donné deux nombres réels positifs ou nuls a et b, on notera (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour $n \geqslant 0$, par :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Si $a = 1$ et $b = x$, avec $x \geqslant 0$, alors a_n et b_n sont des fonctions de x qu'on notera respectivement u_n et v_n.

I. LA MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE M (a, b)

I.1. Convergence des suites (a_n) et (b_n).

I.1.1. Démontrer que pour $n \geqslant 1$ et $a \neq b$, on a :

$$\begin{cases} 0 \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \\ a_{n+1} - b_{n+1} < \dfrac{1}{2}(a_n - b_n). \end{cases}$$

Que deviennent ces inégalités si $a = b$?

I.1.2. Démontrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et qu'elles ont la même limite.

On notera $\mathrm{M}(a, b)$ cette limite commune et f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{M}(1, x)$.

I.2. Propriétés de la moyenne arithmético-géométrique.

Démontrer que, quels que soient les réels $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ et quel que soit l'entier naturel n, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{M}(a_n, b_n) = \mathrm{M}(a, b) \\ \mathrm{M}(a, b) = \mathrm{M}(b, a) \\ \mathrm{M}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathrm{M}(a, b). \end{cases}$$

En déduire que, pour $a > 0$, on a $\mathrm{M}(a, b) = af\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

I.3. Continuité de la fonction f.

I.3.1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n et v_n sont continues.

I.3.2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, on a :

$$0 \leqslant u_n(x) - f(x) \leqslant 2^{-n}|1 - x|.$$

I.3.3. En déduire que la fonction f est continue.

I.4. Étude de la fonction f au voisinage de 1.

Démontrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $\sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1 + x}{2}$. En déduire que la fonction f est dérivable au point $x = 1$.

I.5. **Étude aux bornes de la fonction f.**

I.5.1. Calculer $f(0)$. La fonction f est-elle dérivable en ce point ? Le graphe de f a-t-il une tangente au point d'abscisse nulle ?

I.5.2. Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

I.5.3. Démontrer que le graphe de f présente une branche parabolique, dont on précisera la direction, quand x tend vers $+\infty$.

I.6. **Sens de variation de la fonction f.**

Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n et v_n sont croissantes. En déduire que la fonction f est croissante.

I.7. **Représentation graphique de la fonction f.**

I.7.1. Calculer les valeurs décimales par défaut à 10^{-5} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x :

0,01 0,1 0,2 0,4 0,6 0,8 2 3 10 100.

I.7.2. Donner une représentation graphique sur l'intervalle $[0, 3]$ de la fonction f ainsi que des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1+x}{2}$ (on prendra 5 cm pour unité).

II. EXPRESSION DE M (a, b) PAR UNE INTÉGRALE ELLIPTIQUE

Étant donné deux réels strictement positifs a et b, on pose :

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}, \quad \mathrm{J}(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}.$$

II.1. **Convergence et propriétés des intégrales I (a, b) et J (a, b).**

II.1.1. Démontrer que les intégrales $\mathrm{I}(a, b)$ et $\mathrm{J}(a, b)$ sont convergentes et qu'on a $\mathrm{J}(a, b) = 2\mathrm{I}(a, b)$.

On notera g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{I}(1, x)$.

II.1.2. Démontrer, en utilisant le changement de variable $t = b \tan \theta$, que :

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

En déduire que la fonction g est continûment dérivable.

II.1.3. Démontrer que, quels que soient $a > 0$, $b > 0$ et $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{I}(a, b) = \mathrm{I}(b, a) \\ \mathrm{I}(\lambda a, \lambda b) = \lambda^{-1}\,\mathrm{I}(a, b). \end{cases}$$

En déduire que $\mathrm{I}(a, b) = \frac{1}{a}\, g\left(\frac{b}{a}\right)$.

Tournez la page S.V.P.

II.2. **Expression de M** (a, b) **en fonction de** I (a, b).

II.2.1. Démontrer, en utilisant le changement de variable $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$, qu'on a $J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = 2\,I(a, b)$.

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $I(a_n, b_n) = I(a, b)$.

II.2.2. Démontrer que $I(a, b) = \frac{\pi}{2\,M(a, b)}$.

En déduire que la fonction f est continûment dérivable sur $]0, +\infty[$.

II.3. **Comportement asymptotique des fonctions** f **et** g.

II.3.1. Démontrer, en utilisant le changement de variable $s = \frac{x}{t}$, que :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(s^2+1)(s^2+x^2)}}.$$

En déduire que $g(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}$.

II.3.2. Démontrer, en encadrant $t^2 + 1$ sur l'intervalle $[0, \sqrt{x}]$, que g est équivalente au voisinage de 0^+ à la fonction h définie pour $x > 0$ par :

$$h(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+x^2}}.$$

II.3.3. Calculer $h(x)$. En déduire que g est équivalente au voisinage de 0^+ à la fonction $x \mapsto -\ln x$.

II.3.4. En déduire des équivalents de f au voisinage de 0^+ et de $+\infty$.

III. EXPRESSION DE π EN FONCTION DE f ET f'

On restreindra désormais les fonctions u_n et v_n à l'intervalle $]0, 1[$. On notera w_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $w_n = \sqrt{u_n^2 - v_n^2}$ et k_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $k_n = 2^{-n} \ln\left(\frac{u_n}{w_n}\right)$.

Justifier l'existence des fonctions w_n et k_n.

III.1. **Convergence de la suite des fonctions** k_n.

III.1.1. En remarquant que $M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ (cf. I.2.) et que $w_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2}$, démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$2\,M(u_{n+1}, w_{n+1}) = M(u_n, w_n).$$

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$2^n M(u_n(x), w_n(x)) = f(\sqrt{1-x^2}).$$

III.1.2. Démontrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} 2^n f\left(\frac{w_n(x)}{u_n(x)}\right) = \frac{f(\sqrt{1-x^2})}{f(x)}.$$

III.1.3. Démontrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{w_n(x)}{u_n(x)} = 0$.

En remplaçant f par un équivalent dans le résultat de la question précédente, en déduire que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} k_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})}.$$

III.2. **Convergence de la suite des fonctions dérivées k'_n.**

III.2.1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$, les fonctions u_n, v_n, w_n et k_n sont continûment dérivables sur $]0, 1[$ et que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u'_n > 0$ et $v'_n > 0$.

III.2.2. Démontrer que la fonction $\dfrac{k'_n}{v_n^2}$ est indépendante de n (on pourra utiliser la relation $w_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{2}$).

III.2.3. Déduire du résultat précédent que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in]0, 1[$, on a $k'_n(x) = \dfrac{v_n^2(x)}{x(1-x^2)}$.

III.2.4. Démontrer que la suite de fonctions (k'_n) converge, uniformément sur tout compact de $]0, 1[$, vers la fonction :

$$x \mapsto \frac{f^2(x)}{x(1-x^2)}.$$

III.3. **Une expression de π.**

III.3.1. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{2} \dfrac{f(x)}{f(\sqrt{1-x^2})}$.

III.3.2. Calculer directement cette dérivée et en déduire, en faisant $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, que :

$$\pi = 2\sqrt{2} \frac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

IV. APPROXIMATION DE π

Pour tout $n \geqslant 1$, on notera y_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $y_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ et z_n la fonction définie sur $]0, 1[$ par $z_n = \dfrac{v'_n}{u'_n}$.

IV.1. **Convergence des suites des fonctions u'_n et v'_n.**

On note K un compact de $]0, 1[$.

IV.1.1. Démontrer que $y_n \geqslant 1$ et que la suite de fonctions (y_n) converge uniformément vers 1 sur K.

IV.1.2. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{cases} y_{n+1} = \dfrac{1 + y_n}{2\sqrt{y_n}} \\[2ex] z_{n+1} = \dfrac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n)\sqrt{y_n}}. \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

IV.1.3. Démontrer que $z_n \geqslant 1$. En déduire que $u'_n \leqslant v'_n$ et que la suite de fonctions (u'_n) est croissante.

IV.1.4. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $y_{n+1} \leqslant z_{n+1} \leqslant \sqrt{y_n} \leqslant y_n$.
En déduire que la suite de fonctions (z_n) converge uniformément vers 1 sur K.

IV.1.5. Démontrer que $v'_{n+1}(x) \leqslant v'_n(x)$ si $(\sqrt{y_n(x)} - 1)^2 \leqslant \dfrac{z_n(x) - 1}{z_n(x)}$ et que cette dernière inégalité est satisfaite à partir d'un rang n_0 indépendant de x dans K. En déduire que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u'_n \leqslant u'_{n+1} \leqslant v'_{n+1} \leqslant v'_n$ sur K et que les suites (u'_n) et (v'_n) convergent uniformément sur K.

IV.2. **Construction d'une suite (π_n) convergeant vers π.**

IV.2.1. Démontrer que $\pi = 2\sqrt{2} \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{v_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) u_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{u'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

IV.2.2. En déduire que π est limite de la suite (π_n) définie par $\pi_0 = 2 + \sqrt{2}$ et, pour tout $n \geqslant 1$, par :

$$\pi_n = \pi_{n-1} \frac{1 + y_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 + z_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

IV.3. **Rapidité de convergence de la suite (π_n).**

IV.3.1. Démontrer que $0 \leqslant y_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{8}(y_n - 1)^2$. En déduire que :

$$0 \leqslant y_{n+1} - 1 \leqslant \frac{(y_1 - 1)^{2^n}}{8^{2^n - 1}}$$

et qu'on a donc :

$$0 \leqslant y_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 \leqslant 8\,(500)^{-2^n}.$$

IV.3.2. Démontrer que :

$$0 \leqslant \pi_p - \pi_{p+1} \leqslant \frac{\pi_p}{2}\left(z_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \leqslant \frac{\pi_0}{2}\left(y_p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - y_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

En déduire que :

$$0 \leqslant \pi_{n+1} - \pi = \sum_{i=1}^{+\infty} (\pi_{n+i} - \pi_{n+i+1}) \leqslant \frac{\pi_0}{2}\left(y_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1\right) \leqslant 4\pi_0\,(500)^{-2^n}.$$

IV.3.3. Évaluer n pour que l'erreur commise en remplaçant π par π_{n+1} soit inférieure à $10^{-1\,000\,000}$.