FICHE : SUITES RÉELLES

4 techniques de calcul de limites

- Par factorisation par les termes dominants
- Par multiplication par la quantité conjuguée
- Par utilisation du théorème de la limite séquentielle et par usage des limites usuelles.
- En utilisant les équivalents.

Théorème d'opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) des suites convergeant respectivement vers l et l".

- $$\boxed{|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|}$$
- $$\boxed{\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l + \mu l'}$$
- $$\boxed{u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l l'}$$
- Si $l' \neq 0$, on peut supposer qu'à partir d'un certain rang N, les termes de la suite (v_n) sont non nuls. Alors la suite $(\frac{1}{v_n})_{n\geqslant \mathrm{N}}$ est bien définie et de plus :

$$\boxed{\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l}.}$$

$$\boxed{\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{l}{l'}.}$$

Théorème des gendarmes

On considère trois suites : (u_n), (v_n) et (w_n) . On suppose que :

H1 $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang.

H2 Les deux suites encadrantes (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite l

alors la suite (u_n) converge vers l.

De même, si :

H1 $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang.

H2 $\lim v_n = +\infty$

alors $\lim u_n = +\infty$.

Critère de divergence d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe deux suites extraites $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\tilde{\varphi}(n)}$ telles que :

H1 $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \overline{\mathbb{R}}$.

H2 $u_{\tilde{\varphi}(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tilde{a} \in \overline{\mathbb{R}}$.

H3 $a \neq \tilde{a}$

alors (u_n) est divergente.

Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que :

H1 (u_n) est croissante.

H2 Si (u_n) est majorée par un réel $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$

alors (u_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ et $l \leqslant \mathrm{A}$.

Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** lorsque :

H1 (u_n) est croissante

H2 (v_n) est décroissante

H3 $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ces deux suites sont convergentes et convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n}$$

Théorème de la limite séquentielle

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a \in \bar{\mathrm{I}}$. Soit une suite (u_n) de points de I. Soit $l \in \bar{l}$. On suppose que :

H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

H2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$

alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Convergence d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $a \in \mathbb{R}$ et de premier terme 1 : $\forall n, \quad u_n = a^n$.

$$\boxed{a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \text{diverge si } a \leqslant -1 \\ 0 \text{ si } a \in]-1,1[\\ 1 \text{ si } a = 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \end{cases}}$$

Suites négligeable devant une autre

Définition : Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) **convergent vers 0** et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant N \quad u_n = \varepsilon_n v_n$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

Proposition : Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :

$$\boxed{u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Croissances comparées

Soient $a > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ alors :

$$\boxed{(\ln n)^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}(n^\alpha)} \quad \boxed{n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}(a^n)} \quad \boxed{a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)} \quad \boxed{n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)}$$

Suites équivalentes

Définition : Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) lorsqu'il existe une suite (α_n) **convergent vers 1** et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geqslant N \quad u_n = \alpha_n v_n$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Proposition : Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Opérations sur les équivalents

— Soit (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) des suites telles que :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \quad \text{et} \quad c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n$$

Alors :

$$\boxed{a_n c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n d_n}$$

Si de plus (c_n) et (d_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang :

$$\boxed{\frac{a_n}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b_n}{d_n}}$$

— Soit (u_n) et (v_n) deux suites et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si les expressions u_n^α et v_n^α ont un sens à partir d'un certain rang, alors :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha}$$

Par contre, il ne faut pas :
— Sommer des équivalents.
— Composer des équivalents. En particulier, il ne faut par :
  — Prendre des logarithmes d'équivalents.
  — Prendre des exponentielles d'équivalents.

Équivalents usuels

Soit (u_n) une suite telle que

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

alors :

1. $\boxed{\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
2. $\boxed{\tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
3. $\boxed{\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
4. $\boxed{[1-\cos u_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}}$
5. $\boxed{[e^{u_n}-1] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$
6. $\boxed{[(1+u_n)^\alpha - 1] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$.

Suites définies par récurrence

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que I est un intervalle stable par f. On considère la suite récurrente (u_n) construite par $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

- Si f est croissante sur I alors (u_n) est monotone et :
  1. Si $u_0 \leqslant f(u_0)$ alors (u_n) est croissante.
  2. Si $u_0 \geqslant f(u_0)$ alors (u_n) est décroissante.
- Si f est décroissante sur I alors (u_n) a ses deux sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) monotones et de sens contraire.