FICHE : LIMITES ET ÉQUIVALENTS USUELS

Limites usuelles

$\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ $\quad x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ $\quad \dfrac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$ $\quad \dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$\dfrac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ $\quad xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ $\quad \dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

De manière plus générale

Soient α, β et γ des **réels strictement positifs**.

- En $+\infty$:

$$\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{e^{\gamma x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

- En 0 et $-\infty$:

$$x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad |x|^\alpha e^{\gamma x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

Suite géométrique

$$a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \text{diverge si } a\in\,]-\infty,-1] \\ 0 \text{ si } a\in\,]-1,1[\\ 1 \text{ si } a=1 \\ +\infty \text{ si } a\in\,]1,+\infty[\end{cases}$$

Comparaison des suites de référence

Soient $a>1$, $\alpha>0$ et $\beta>0$ alors :

$$(\ln n)^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^\beta\right) \qquad n^\beta = \underset{n\to+\infty}{o}\left(a^n\right) \qquad a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$$

Équivalents classiques pour les suites

Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors :

$$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad [1-\cos u_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$$

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \left[e^{u_n}-1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \left[(1+u_n)^\alpha - 1\right] \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n \quad (\alpha\in\mathbb{R}^*).$$

Comparaison des fonctions usuelles

Soient α, β et γ des **réels strictement positifs**.

- En $+\infty$:

$$(\ln x)^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right) \quad \text{et} \quad x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\gamma x}\right)$$

- En 0 et $-\infty$:

$$|\ln x|^\beta = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad e^{\gamma x} = \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

Équivalents classiques pour les fonctions en 0

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{argsh} x \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \operatorname{argth} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{ch} x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

De manière plus générale

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ alors :

$$\ln\left(1+f(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \sin\left(f(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \tan\left(f(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

$$\cos\left(f(x)\right) - 1 \underset{x\to a}{\sim} -\frac{\left(f(x)\right)^2}{2} \qquad e^{f(x)} - 1 \underset{x\to a}{\sim} f(x) \qquad \left(1+f(x)\right)^\alpha - 1 \underset{x\to a}{\sim} \alpha f(x) \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$