

FICHE : INTÉGRATION

Subdivision

Soit $[a, b]$ un segment. On appelle **subdivision** du segment $[a, b]$ toute famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels tels que :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Fonction continue par morceaux

— Soit $[a, b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \dots < x_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que :

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.
2. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, φ restreinte à $]x_k, x_{k+1}[$ admet une limite finie strictement à droite en x_k et strictement à gauche en x_{k+1} . Autrement dit, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

— Une telle subdivision est dite **adaptée** ou **subordonnée** à φ .

Théorème fondamental

Si

(H1) f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$

alors $\int_a^b f(x) dx$ existe.

Autrement dit, si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors elle est intégrable sur $[a, b]$.

Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$

1

$$f \leq g \implies \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$$

2 Soit $c \in]a, b[$.

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

3 Comme f est une fonction réelle continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, il existe des

réels m et M tels que $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$. On a alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

4

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

5 On a l'**inégalité de la moyenne** :

$$\left| \int_{[a,b]} f g \right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$$

Primitive

Soit f une fonction définie sur une partie I à valeurs dans \mathbb{R} . On appelle **primitive** de f sur I toute fonction $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(H1) F est dérivable sur I .

(H2) $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $G = F + c$.

Une formule essentielle

$$\int u' u^\alpha = \begin{cases} \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \ln|u| & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

Théorème fondamental de l'analyse

(H1) Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

(H2) Soit f une fonction continue sur I

Soit $a \in I$ alors la fonction :

$$\begin{aligned} F: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur I et est la seule primitive de f qui s'annule en a :

$$F' = f \quad \text{et} \quad F(a) = 0.$$

Corollaire du TFA

Soient :

- (H1) Soit I un intervalle de \mathbb{R} .
- (H2) Soit f une fonction continue sur I

alors f admet une primitive F sur I.

Autrement dit : toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive sur ce segment.

Formule d'intégration par parties

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On suppose que :

- (H1) u et v des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I. On a :

alors :

$$\int_a^b \overbrace{u'(t)}^{\text{intégrer}} \underbrace{v(t)}_{\text{dérive}} dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Changement de variable

Pour calculer $\int_a^b f(t) dt$:

1. On vérifie que $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow I$ est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[\alpha, \beta]$ et que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
2. On pose $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{cases}$
3. On écrit : $\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

Attention de bien penser à transformer les bornes

Formule de Taylor

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle I de \mathbb{R} . Si $(a, x) \in I^2$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

— Le polynôme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

est appelé **polynôme de Taylor de f de degré n** .

— L'intégrale

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

est appelée **reste intégral**.

Somme de Riemann

Soit une fonction f continue sur le segment $[0, 1]$. On définit les suites de termes généraux

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx \quad \text{et} \quad T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx$$

