

FICHE : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS DES FONCTIONS USUELLES

Formule de Taylor avec reste intégrale ♡

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $(a, x) \in I^2$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Formule de Taylor-Young ♡

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

et

$$\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Autrement dit, on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

$$\heartsuit \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$$

Fonctions exponentielle et hyperboliques

$$\heartsuit \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\heartsuit \quad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\heartsuit \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\rightsquigarrow \quad \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

Fonctions trigonométriques

$$\heartsuit \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

$$\heartsuit \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\rightsquigarrow \quad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o_{x \rightarrow 0}(x^6)$$

Fonction logarithme

$$\rightsquigarrow \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\heartsuit \quad \ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\heartsuit \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Cette dernière formule appliquée à $\alpha = \frac{1}{2}$ et $n = 2$ donne :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Fonctions réciproques

$$\rightsquigarrow \quad \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\rightsquigarrow \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\rightsquigarrow \quad \operatorname{argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

$$\rightsquigarrow \quad \arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} - \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2})$$

La dernière s'obtient en remarquant que $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

Légende : ♡ = à savoir par coeur, $\rightsquigarrow$ = à savoir retrouver rapidement.