FICHE : DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Les petits o...

$$\boxed{\underset{x\to 0}{o}(1)=\varepsilon(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)=x^n\varepsilon(x)}$$

où $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Définition

Soient une fonction $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ et $x_0\in\mathrm{I}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. On dit que f admet un **développement limité à l'ordre** n au voisinage de x_0 s'il existe :

$$\begin{cases}\text{un polynôme P de degré} \leqslant n\\ \text{une fonction } \varepsilon:\mathrm{I}\to\mathbb{R} \text{ vérifiant } \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} 0\end{cases}$$

tels que

$$\forall x\in\mathrm{I}, f(x)=\mathrm{P}(x)+\underbrace{(x-x_0)^n\varepsilon(x)}_{=\underset{x\to a}{o}(x^n)}$$

— P est appelé **partie régulière** ou **partie principale** du développement limité de f en x_0.
— $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ est appelé **reste** du développement limité de f en x_0.

Propriétés

Soit f une fonction admettant un DL d'ordre n en 0 alors :

- la partie régulière du DL d'ordre n en 0 de f est unique.
- Si f est paire (resp. impaire) sur un voisinage (symétrique) de 0 alors la partie principale de son DL à l'ordre n en 0 ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Formule de Taylor-Young

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a\in\mathrm{I}$. Il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$\forall x\in\mathrm{I},\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+(x-a)^n\varepsilon(x)$$

et

$$\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Autrement dit, on a : $\boxed{\forall x\in\mathrm{I},\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\underset{x\to a}{o}\left((x-a)^n\right)}$.

Opérations sur les DLs

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur I admettant en 0 des DL d'ordre n :

$$\forall x\in\mathrm{I},\quad f(x)=\mathrm{P}(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\quad\text{et}\quad g(x)=\mathrm{Q}(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

où P et Q sont des polynômes réels de degré n alors

- $f+g$ admet un Dl d'ordre n en 0 donné par, pour tout $x\in\mathrm{I}$:
$$(f+g)(x)=(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$
- fg admet un Dl d'ordre n en 0 donné par, pour tout $x\in\mathrm{I}$:
$$(fg)(x)=\mathrm{R}(x)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$
où $\mathrm{R}(x)$ est égal au produit $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)$ auquel on a retiré tout les terme de degré $>n$.
- Si de plus $\boxed{f(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$ alors $g\circ f$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$ dans le polynôme $\mathrm{G}\circ\mathrm{F}$.
- Si g admet une limite non nulle en 0 alors $\frac{f}{g}$ admet un DL d'ordre n en 0.

Comment inverser un DLs

On suppose que $g(x)=1+a_1x+\ldots+a_nx^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{1-u}\text{ avec } u=-\left(a_1x+\ldots+a_nx^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\right)\\ &= 1+u+u^2+\ldots+u^n+\underset{x\to 0}{o}\left(u^n\right)\\ &= 1-\left(a_1x+\ldots+a_nx^n\right)+\left(a_1x+\ldots+a_nx^n\right)^2+\ldots+(-1)^n\left(a_1x+\ldots+a_nx^n\right)^n+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\end{aligned}$$

qu'on développe et tronque en ne gardant que les termes de degré $\leqslant n$.

Primitivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$. Si :

H1 f est dérivable sur I.

H2 f' admet un DL d'ordre n en 0 :

$$\forall x\in\mathrm{I},\quad f'(x)=\overbrace{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}^{\mathrm{P}'(x)}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)$$

alors f admet un DL d'ordre $n+1$ en 0 obtenu en primitivant la partie régulière du DL de f' et en ajoutant $f(0)$. Pour tout $x\in\mathrm{I}$:

$$\boxed{f(x)=\underbrace{f(0)+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}}_{\mathrm{P}(x)}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)}$$

ATTENTION ! ! ! On ne peut pas, en général, dériver un DL