Chapitre 16

Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

16.0.1 Calcul de primitives

Exercice 16.1 ★

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \cos x \sin x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 16.2 ★

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \tan x\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int x e^{x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \operatorname{th} x\,\mathrm{d}x$

Exercice 16.3 ★

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{1}{x(\ln x)^4}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{1}{\operatorname{th} x}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \cos x \sin^3 x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 16.4 ★

Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
6. $\int (2x-1)^2(x+1)\,\mathrm{d}x$

16.0.2 Calcul d'intégrales

Exercice 16.5 ★

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_1^{\operatorname{ch} 1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_{1+e}^{1+2e} \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$

16.0.3 Linéarisation

Exercice 16.6 ★

Déterminer les primitives suivantes :

2. En déduire : $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ et $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16.13 ★★

Calculer pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16.14 ★★

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

1. Justifier que pour tout entier $n > 0$, l'intégrale I_n existe.
2. Calculer pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n-2}$, I_0 et I_1.
3. En déduire la valeur de I_n pour tout entier n.

16.0.5 Fractions rationnelles

Cette section sera complétée à l'occasion du chapitre sur les fractions rationnelles.

Exercice 16.15

Calculer :

1. $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_2^3 \frac{2x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+4x-5}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+2x+5)(x+2)}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^2 \frac{x}{(x^2+x+1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$
8. $\int_0^{-1} \frac{1}{(x^2-3x+2)^2}\,\mathrm{d}x$
9. $\int_0^1 \frac{x-1}{(x^2+1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 16.16

Calculer la primitive (préciser l'intervalle)

$$\mathrm{F} = \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$$

16.0.6 Changement de variable

Exercice 16.17 ★

Déterminer les primitives suivantes en utilisant le changement de variable précisé :

1. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ en posant $u = \ln x$
2. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ en posant $u = \sqrt{x+1}$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ en posant $u = \cos x$.
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,\mathrm{d}x$ en posant $u = \tan x$.

1. $\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x$
2. $\int \cos^4 x \,\mathrm{d}x$
3. $\int \mathrm{sh}^5 x \,\mathrm{d}x$
4. $\int \cos^2 x \sin 2x \,\mathrm{d}x$
5. $\int \mathrm{ch}^2 x \,\mathrm{sh}^2 x \,\mathrm{d}x$
6. $\int \mathrm{sh}\, x \,\mathrm{ch}\, x \,\mathrm{d}x$.

16.0.4 Intégration par parties

Exercice 16.7 ★

Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^1 (x+2)\, e^x \,\mathrm{d}x$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x \,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^{\pi} (x-1) \cos x \,\mathrm{d}x$

Exercice 16.8 ★

Déterminer les primitives suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle elles sont définies :

1. $\int \ln x \,\mathrm{d}x$
2. $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$
3. $\int x \arctan x \,\mathrm{d}x$
4. $\int (x+1)\,\mathrm{sh}\, x \,\mathrm{d}x$
5. $\int \mathrm{argsh}\,(3x)\,\mathrm{d}x$
6. $\int \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$

Exercice 16.9 ★

Déterminer les primitives suivantes après avoir déterminé sur quel intervalle elles sont définies :

1. $\int x \,\mathrm{ch}^2 x \,\mathrm{d}x$
2. $\int x \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \mathrm{argth}\, x \,\mathrm{d}x$.
4. $\int \mathrm{ch}\, x \cos x \,\mathrm{d}x$
5. $\int \dfrac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int x \ln^2 x \,\mathrm{d}x$

Exercice 16.10 ★

Calculer $\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} t^2 \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16.11 ★

Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16.12 ★★

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une relation entre* $\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$ *et* $\int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$.

5. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ *en posant* $x = \cos u$.
6. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ *en posant* $u = \sqrt{x}$.

Exercice 16.18 ★

Déterminer les primitives suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

1. $\int \dfrac{1}{x + x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, x}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 16.19 ★

Calculer les intégrales suivantes en utilisant un changement de variable adéquat :

1. $\int_0^1 \dfrac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\dfrac{\arcsin x}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_1^4 \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 \dfrac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 16.20 ★

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer à l'aide de changements de variables, les intégrales

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \mathrm{I}_2 = \int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}, \quad \mathrm{I}_3 = \int_a^b (x-a)^n\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16.21 ★★

En utilisant un bon changement de variables, calculer pour $0 < a < b$, l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b (x-a)^3(b-x)^4\,dx$$

Exercice 16.22 ★★

Soit un réel $a > 0$. Calculer en utilisant un bon changement de variables, l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{1/a}^a \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Indication 16.0 : Comment laisser les bornes invariantes ?

Exercice 16.23 ★★

Calculer en utilisant un bon changement de variables l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Indication 16.0 : Comment laisser les fonctions $\sin x$, $\cos^2 x$ et les bornes invariantes ?

16.0.7 Calcul de primitives et d'intégrales - Techniques mélangées

Exercice 16.24 ★★

Calculer $I = \int_0^1 \frac{t^5}{(t^4+1)^2}\,dt$.

Exercice 16.25 ★★

Calculer $\int_0^1 \frac{t}{(t^4+t^2+1)^2}\,dt$.

Exercice 16.26 ★★

Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$$

Exercice 16.27 ★★

Calculer $\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,dx$.

Exercice 16.28 ★★

Calculer $\int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$.

Exercice 16.29 ★★

Calculer $\int \frac{x^4}{x^2+1}\arctan x\,dx$.

Exercice 16.30 ★★

Calculer $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ *sur* $\mathbb{R}$ *(justifier l'intervalle).*

Exercice 16.31 ★★

Calcul de $\int \frac{\operatorname{sh} x}{3+\operatorname{sh}^2 x}\,dx$.

Exercice 16.32 ★★

Calculer $\int \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\,dx$ *sur* $I = [0,1[$.

Exercice 16.33 ★★

Calculer $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$ *sur* $I =]1,+\infty[$.

Exercice 16.34 ★★

Calculer $\int \frac{2+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+2}}\,dx$.

Exercice 16.35 ★★

Calculer

$$\int_0^1 \arctan\left(\sqrt[3]{x}\right)\,dx$$

Exercice 16.36 ★★

Calculer

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+2x+3)^3}\,dx$$

Exercice 16.37 ★★

Calculer

$$I = \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Exercice 16.38 ★★

Calculer

$$I = \int \frac{dx}{5+4\sin x}$$

Exercice 16.39 ★★

Calculer

$$I = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}$$

Exercice 16.40 ★★

Calculer

$$\int \frac{x}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Exercice 16.41 ★★

Calculer

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{6+x-x^2}}$$

Exercice 16.42 ★★

Calculer

$$I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$$

Exercice 16.43 ★★

Calculer

$$I = \int_2^3 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$$

Exercice 16.44 ★★

Calculer

$$I = \int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$$

Exercice 16.45 ★★

Calculer

$$\int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

Exercice 16.46 ★★

Calculer

$$I = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2+2x}\,dx$$

Exercice 16.47 ★★

Calculer une primitive de

$$F = \int (x+1)^2 \sqrt{-x^2-2x+1}\,dx$$

(préciser l'intervalle)

Exercice 16.48 ★★

exo_majorations_d_integrales

Calculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\frac{dt}{t}$$

16.0.8 Propriétés de l'intégrale

Exercice 16.49 ★

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$
2. $f \leqslant 0$ *ou* $f \geqslant 0$.

Exercice 16.50 ★

Considérons une application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Montrer que f admet une et une seule primitive F vérifiant $\int_0^1 F(t)\,dt = 0$.

Exercice 16.51 ★ **Un théorème de point fixe**

On considère une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Indication 16.0 : Introduire la fonction $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)-t \end{array}\right.$.

Exercice 16.52 ★

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\exists c \in]a,b[, \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c)$$

Indication 16.0 : Poser $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ *et introduire la fonction* $\varphi : t \mapsto f(t) - \alpha$.

Exercice 16.53 ★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Trouver les fonctions f continues sur $[a,b]$ telles que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Exercice 16.54 ★★

Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que $g \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

Exercice 16.55 ★★★

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que $\forall k \in [0,n]$, $\int_a^b t^k f(t)\,dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

16.0.9 Majorations d'intégrales

Exercice 16.56 ★

Soit $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Peut-il y avoir égalité ?

Exercice 16.57 ★

Soit deux fonctions continues et positives $f, g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in [0,1]$, $f(x)g(x) \geqslant 1$. Montrer que

$$\left[\int_0^1 f(t)\,dt\right]\left[\int_0^1 g(t)\,dt\right] \geqslant 1$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 16.58 ★

Soit une fonction f continue sur le segment $[0,1]$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}$, on note

$$I_k = \int_0^1 x^k |f(x)|\,dx$$

Montrer que pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a $I_{p+q}^2 \leqslant I_{2p} I_{2q}$.

Exercice 16.59 ★

Soit l'ensemble $E = \{f \in \mathscr{C}([a,b]) \mid \forall x \in [a,b], f(x) > 0\}$. Déterminer

$$\alpha = \inf_{f\in E}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$$

Exercice 16.60 ★★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer les fonctions $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \int_a^b f^3(x)\,dx = \int_a^b f^4(x)\,dx$$

Exercice 16.61 ★★

Soient deux fonctions strictement positives $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1])$. Montrer que

$$\int_0^1 \left(\frac{f(t)}{g(t)} + \frac{g(t)}{f(t)}\right)dt \geqslant 2$$

Exercice 16.62 ★★

Soit une fonction convexe φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. *Si f est une fonction en escalier sur $[0,1]$, montrer que*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. *Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, montrer que*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\circ f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16.63 ★★★

Pour $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, on note $\overline{f}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sa valeur moyenne. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de a et b telle que pour toute fonction $f\in\mathscr{C}^1([a,b])$,

$$\int_a^b \left|f(x)-\overline{f}\right|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{C}\int_a^b (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$$

_int

16.0.10 Limite de fonctions définies par une intégrale

Exercice 16.64 ★

Soit une fonction $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ continue. Trouver la limite de la suite de terme général

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16.65 ★

A l'aide de majorations simples, trouver les limites des suites suivantes :

1. $\mathrm{I}_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+e^{nx}}\,dx$;
2. $\mathrm{I}_n=\int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+x}\,dx$;
3. $\mathrm{I}_n=\int_0^1 x^n\sin(nx)\,dx$;
4. $\mathrm{I}_n=\int_0^1 e^{-nx}(1+x^n)\,dx$;
5. $\mathrm{I}_n=\dfrac{1}{n}\int_n^{2n}\arctan x\,dx$;
6. $\mathrm{I}_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x^2)\,dx$.

r_t ***Exercice 16.66*** ★★

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{-2x}^{2x}\cos\left(t^4\right)\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{3x}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^{2x}\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}\,\mathrm{d}t$

6. $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$

Indication 16.0 : Pour la dernière, penser à une intégration par parties.

Exercice 16.67 ★★

Soit la suite de fonctions (g_n) définies sur $[0,1]$ par $g_n(x)=0$ si $x\in]\frac{1}{n},1]$ et $g_n(x)=n$ si $x\in[0,\frac{1}{n}]$. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Trouver la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1 f(t)g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 16.68 ★★

On définit une fonction I en posant, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\mathrm{I}(x)=\frac{1}{x}\int_0^\pi\sin(x^2\sin t)dt$. Trouver la limite de $\mathrm{I}(x)$ lorsque $x\to0$.

Exercice 16.69 ★★★

Soit une fonction $f:[0,1]\to\mathrm{R}$ continue. Trouver la limite des suites de terme général :

1. $\mathrm{H}_n=\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\mathrm{I}_n=n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 16.70 ★★★

Soit une fonction $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ continue et un réel $a\in[0,1]$. Trouver la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1 f(ax^n)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16.71 ★★★

Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer la limite lorsque $x\to0$ de la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{I}(x)=\int_0^x\frac{x}{x^2+t^2}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication 16.0 : Faire un changement de variables qui fera apparaître la variable x à l'intérieur de f.

16.0.11 Théorème fondamental, étude de fonctions définies par une intégrale

Exercice 16.72 ★

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les fonctions $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle à déterminer et calculer leur dérivée en fonction de f :

1. $g(x)=\int_{2x}^{x^2}f(t)\,\mathrm{d}t$
2. $g(x)=\int_0^{x^2}\operatorname{sh}t\,f(\operatorname{ch}t)\,\mathrm{d}t$
3. $g(x)=\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$
4. $g(x)=\int_1^x\frac{f(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 16.73 ★

Soit une fonction f continue et positive sur le segment $[a,b]$. En utilisant la fonction $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$, alors $\forall x\in[a,b]$, $f(x)=0$.

Exercice 16.74 ★★

Soit une fonction f continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1)=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe un réel $c\in]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 16.75 ★

Montrer que la fonction définie par

$$\varphi(x)=\int_{\frac{x-1}{x}}^{\frac{x}{x+1}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}+\int_1^{2x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

est constante.

Exercice 16.76 ★

Déterminer le domaine de définition et la parité de l'application

$$g:x\mapsto\int_x^{3x}e^{t^2}\,dt$$

Exercice 16.77 ★★

On considère $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sh}t}{t} & \text{si } t\neq0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $f(x)=\int_x^{2x}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Montrer que f est impaire.*
3. *Déterminer la dérivée de F et en déduire ses variations.*
4. *Déterminer la limite de f en $+\infty$.*
5. *Tracer la tangente à l'origine, puis la courbe représentative de f.*

Exercice 16.78 ★★

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\int_0^x\sin(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que*

$$f'(x)=\int_0^x\cos(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.
3. Résoudre cette équation différentielle.

Exercice 16.79 ★★

On considère la fonction f donnée par $f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est impaire.
3. Déterminer la dérivée de f et en déduire ses variations.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.

Exercice 16.80 ★★

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. En effectuant un changement de variable, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) = f\left(\frac{1}{2x}\right)$.
3. En déduire un équivalent simple de f en $+\infty$.

Exercice 16.81 ★★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \neq 0, \quad g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g peut-être prolongée par continuité en 0. On appellera encore g la fonction ainsi définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

Exercice 16.82 ★★★

On se propose d'étudier la fonction définie par $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que le domaine de définition de g est $\mathbb{R}^*$.
2. Etudier la parité de la fonction g.
3. Calculer la dérivée de la fonction g et dresser son tableau de variations.
4. Calculer la limite de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

exo_suites_et_integration

Exercice 16.83 ★★★

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On suppose que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant \mathrm{C} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

où C est une constante strictement positive.

1. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant \mathrm{C}\exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

C'est le lemme de Gronwall, très utile pour étudier des équations différentielles.

2. Que peut-on dire si $f(x) \leqslant \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$?

Indication 16.0 : Introduire la fonction $\varphi(x) = \mathrm{C} + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et calculer sa dérivée.

Exercice 16.84 ★★

Étudier la fonction définie par

$$g(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 16.85 ★★

Soient deux fonctions continues f et g sur $[0,1]$. On suppose que $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f et g sont $\mathscr{C}^\infty$;
2. Montrer que $f = g = 0$.

Exercice 16.86 ★★

Soit la fonction définie par

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étudier la parité de g.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $1 - x^2 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
4. Prolonger g par continuité en 0.
5. Montrer que g ainsi prolongée est dérivable en 0 ?
6. Trouver $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

16.0.12 Suites dont le terme général est défini par une intégrale

Exercice 16.87 ★

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Étudier la monotonie de (I_n).
3. En déduire que (I_n) est convergente.
4. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

5. En déduire la limite de (I_n).
6. En déduire un équivalent de la suite

$$\mathrm{J}_n = \int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{d}x$$

Exercice 16.88 ★

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n (1-x)^n \,\mathrm{d}x$.

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$.
2. En déduire celles de (I_n).
3. En déduire que (I_n) est convergente.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

5. En déduire la limite de (I_n).

Exercice 16.89 ★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite de terme général

exo_integrale_de_Wallis

$$\mathrm{I}_n = \int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < \mathrm{I}_n < \frac{e}{n+1}$$

puis la limite de (I_n).

4. En déduire un équivalent de I_n.

stirling 1c

Exercice 16.90 ★★

On considère la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$ où $n \in \mathbb{N}^*$..

1. Étudier la monotonie de (I_n).
2. En déduire que (I_n) est convergente.
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. En déduire la limite de (I_n) ainsi qu' un équivalent simple de I_n.

stirling 1d

stirling 1e

Exercice 16.91 ★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite de terme général :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} \mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right) \mathrm{d}x$$

2. En déduire que

$$\mathrm{I}_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 16.92 ★

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} \,\mathrm{d}t$$

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$;
2. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n ;
3. En déduire la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Exercice 16.93 ★★ Intégrale de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t.$$

Une telle intégrale est appelée intégrale de Wallis.

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \mathrm{I}_n$$

4. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une expression de I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles.
5. Montrer que (I_n) est décroissante et positive. En déduire que (I_n) est convergente.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_{n+2}} \leqslant \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n+2}}.$$

7. Montrer que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{I}_{n+1}$.
8. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad (n+1)\,\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \frac{\pi}{2}$.

9. En déduire que : $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 16.94 ★★★

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[0,1]$ vérifiant $f(1)=f'(1)=0$. Étudier la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = n^2\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 16.95 ★★★

Soit deux réels $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$ et une fonction $f:[a,b]\mapsto\mathbb{R}$ continue et positive. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = \left[\int_a^b f^n(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{n}}$$

Indication 16.0 : On étudiera d'abord le cas où f est une fonction constante.

Exercice 16.96 ★

Trouver la limite de la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (\arcsin x)^n\,dx$$

Exercice 16.97 ★★

1. *Soit un entier $k\geqslant 1$. Encadrer l'intégrale $\mathrm{I}_k=\int_k^{k+1}\ln t\,\mathrm{d}t$.*
2. *En déduire un équivalent de la suite de terme général $u_n=\ln n!$.*

Exercice 16.98 ★★ **Suite de Mercator**

On considère la suite de terme général

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

1. *Trouver $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$*
2. *Trouver une relation de récurrence simple entre I_n et I_{n-1} pour $n\geqslant 1$.*
   On considère ensuite la suite, dite de Mercator, de terme général

$$\mathrm{S}_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

3. *Exprimer pour $n\geqslant 1$, S_n en utilisant I_n.*
4. *En déduire que la suite (S_n) converge et préciser sa limite.*

Exercice 16.99 ★★★

Étudier la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \int_\pi^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Indication 16.0 : On commencera par déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n$, puis $u_{n+2}-u_n$ et l'on s'intéressera ensuite aux deux suites extraites u_{2n} et u_{2n+1}.

Exercice 16.100 ★★★

On note pour un entier n non-nul :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{i+j+1} \text{ et } \mathrm{I}_n = \int_0^n\left(\int_0^n\frac{\mathrm{d}y}{x+y+1}\right)\mathrm{d}x$$

1. *Calculer l'intégrale I_n pour $n>0$.*
2. *Déterminer un équivalent de la suite (I_n).*
   Indication 16.0 : On pourra utiliser un développement limité à l'ordre 1 de ln en 0.
3. *Encadrer S_n à l'aide de I_n pour $n>0$.*
4. *En déduire un équivalent de (S_n).*

Exercice 16.101 ★★★

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1\frac{t^n-t^{2n}}{1-t}\,dt$$

1. *Justifier l'existence de I_n pour $n\geqslant 1$.*
2. *Déterminer la limite de la suite (I_n)* [1].

16.0.13 Algèbre linéaire et intégration

Exercice 16.102 ★★

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $f\in\mathrm{E}$, on note $\mathrm{T}(f)=g$ l'application définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g(x)=\int_0^x t f(t)\,dt$$

1. *Montrer que T est un endomorphisme de E.*
2. *Déterminer $\operatorname{Ker}\mathrm{T}$ et $\operatorname{Im}\mathrm{T}$.*

Exercice 16.103 ★★

Soient le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{E}=\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et les applications :

$$\varphi:\begin{cases}\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}\\ f & \longmapsto & f'\end{cases} \quad\text{et}\quad \psi:\begin{cases}\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E}\\ f & \longmapsto & \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\end{cases}$$

1. Une autre solution de cet exercice utilisant les sommes de Riemann est proposée dans l'exercice **??** page **??**

1. Prouver que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
2. Calculer $\varphi\circ\psi$ et $\psi\circ\varphi$.
3. Déterminer les noyaux et images de φ et ψ.

16.0.14 Formules de Taylor

Exercice 16.104 ★

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left|e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}\,e^{|x|}}{(n+1)!}$$

2. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

Exercice 16.105 ★

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln 2$$

Exercice 16.106 ★

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}=f''(a)$$

En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)-2}{x^2}$.

Exercice 16.107 ★

Trouver

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

Exercice 16.108 ★

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$. On pose pour $x\in]0,1[$,

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0))}{\sin(\pi x)}$$

Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0 et 1.

Exercice 16.109 ★★

1. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre 0 et $X\in\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire l'existence d'une constante $C>0$ telle que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\forall x\in[0,1],\quad\left|\left(1+x^2\right)^{1/n}-1-\frac{1}{n}\ln\left(1+x^2\right)\right|\leqslant\frac{C}{n^2}.$$

3. Trouver alors deux réels $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad\int_0^1\left(1+x^2\right)^{1/n}\mathrm{d}x=a+\frac{b}{n}+\frac{\varepsilon_n}{n}$$

où $\varepsilon_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

16.0.15 Sommes de Riemann

Exercice 16.110 ★

Étudier la suite de terme général

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 16.111 ★

Étudier la suite de terme général

$$u_n=\sum_{p=n}^{2n}\frac{1}{p}$$

Exercice 16.112 ★

Étudier la suite de terme général

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$$

Exercice 16.113 ★

Étudier la suite de terme général

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$$

Exercice 16.114 ★

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n=n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n/k}}{k^2}$$

Exercice 16.115 ★

Trouver la limite des suites de termes général

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$$

Exercice 16.116 ★

Soient deux réels $\alpha > 0, \beta > 0$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha n + \beta k}$$

Exercice 16.117 ★★

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{k+n}}$$

Exercice 16.118 ★★

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\,dt$$

1. *Justifier l'existence de I_n pour $n \geqslant 1$.*
2. *Déterminer la limite de la suite (I_n).*

Exercice 16.119 ★★

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}\left(n^2+k^2\right)^{1/n}$$

Exercice 16.120 ★★

Trouver un équivalent de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n(k^2+n^2)}}{n}$$

Exercice 16.121 ★★★

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$$