Chapitre 13

Dimension des espaces vectoriels

Table des matières

En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue.
John von Neumann.

Pour bien aborder ce chapitre

Après avoir mis en place les bases d'algèbre linéaire nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la notion de dimension. La dimension d'un espace vectoriel est liée au nombre de paramètres (ou parle aussi de degrés de liberté) qu'il faut considérer pour pouvoir le décrire. Ainsi pour choisir un couple de $\mathbb{R}^2$ il faut choisir une abscisse et une ordonnée. Il y a deux paramètres (ou deux degrés de liberté). On verra que $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. De même, pour choisir un polynôme $a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, il faut choisir a, b et c. On verra là aussi que $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est de dimension 3. Dans certains cas, il faut une infinité de paramètres pour décrire les vecteurs de l'espace considéré. Par exemple, pour choisir une suite $(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

il faut choisir chaque terme $u_0, u_1, \ldots$. Ou encore pour choisir une fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il faut choisir l'image de chaque point de $\mathbb{R}$ par f. Ces deux espaces sont de dimension infinie.
Même s'il sera utile de se souvenir de ces considérations, la définition précise de la notion de dimension demande quelques efforts qui nous en éloignent un moment. On peut remarquer que toute base du plan compte exactement deux vecteurs. De même toute base de l'espace en compte trois. Le plan est de dimension 2 et l'espace de dimension 3. Si on arrive à définir, pour un espace vectoriel quelconque ce qu'est une base (quand il en a) et qu'on parvient à montrer que deux bases sont toujours de même cardinal alors on tiendra notre définition. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs que contient une base donnée (quand ce nombre est fini).
Ceci est cohérent avec notre intuition initiale. Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de l'espace vectoriel considéré E, alors choisir un vecteur dans E revient à choisir ses n composantes sur la base, il y a bien n degrés de liberté.
Nous traiterons les notions de base et de dimension dans les premières sections de ce chapitre. Nous nous occuperons ensuite à étudier les conséquences de ces notions en algèbre linéaire. En particulier, nous démontrerons deux formules fondamentales :
- la formule de Grassmann
- la formule du rang

qui permettront de beaucoup simplifier les démonstrations de supplémentarité et celles de bijectivité (elles permettront de diviser par deux le travail à faire quand on n'en dispose pas).

13.1 Familles de vecteurs

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

13.1.1 Combinaisons linéaires

DÉFINITION 13.1 ★ **Combinaison linéaire**
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$. On appelle **combinaison linéaire de ces n vecteurs** tout vecteur $v \in E$ de la forme :

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot v_k$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

PROPOSITION 13.1 ★ **Image d'une combinaison linéaire par une application linéaire**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathfrak{L}(E, F)$. Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n-vecteurs de E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ alors

$$f(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n).$$

Démonstration *Par une récurrence immédiate.*

13.1.2 Familles libres

DÉFINITION 13.2 ★★★ **Famille liée**
On dit qu'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de E est *liée*, ou que les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ sont *linéairement dépendants* si et seulement si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres ou autrement dit si et seulement si il existe un p-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ de scalaires non tous nuls vérifiant $\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_p \cdot v_p = 0$.

Exemple 13.1
- Trois vecteurs du plan sont toujours liés. De même, 4 vecteurs de l'espace sont toujours liés. On comprend bien intuitivement ces deux affirmations. On les démontrera dans l'exemple 13.7 page 8.
- Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (3, -2, 2, -3)$ et $u_3 = (-1, 2, 0, 1)$ forment une famille liée. En effet, $u_2 = 2u_1 - u_3$.
- Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions $f_1 : x \mapsto \cos^2 x$, $f_2 : x \mapsto \sin^2 x$ et $f_3 : x \mapsto \cos 2x$ sont liées. En effet, $f_3 = f_1 - f_2$.

Pour définir une famille de vecteurs linéairement dépendants, il suffit de prendre la négation de la définition précédente : $v = (v_1, \ldots, v_p)$ est une famille liée de vecteurs de E si et seulement si pour toute famille de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, si $\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_p \cdot x_p = 0$ alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$. On a alors la définition suivante :

DÉFINITION 13.3 ★★★ **Famille libre**
On dit qu'une famille $(v_1,\ldots,v_p)$ de vecteurs de E est **libre**, ou que les vecteurs $v_1,\ldots,v_p$ sont **linéairement indépendants** si et seulement si la famille n'est pas liée ou autrement dit si et seulement si :

$$\forall(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p,\quad \lambda_1\cdot v_1+\ldots+\lambda_p\cdot v_p=0 \implies \lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$$

PLAN 13.1 : Pour montrer qu'une famille est libre

1. *Soit* $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ *tel que* $\lambda_1\cdot v_1+\ldots+\lambda_n\cdot v_n=0$.
2. *... alors* $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=0$
3. *Donc la famille est libre.*

PLAN 13.2 : Pour montrer qu'une famille est liée

1. *Posons* $\lambda_1=\ldots,\ldots,\lambda_p=\ldots$
2. *Un des* λ_i *pour* $i\in[\![1,p]\!]$ *au moins est non nul*
3. *On a bien par ailleurs :* $\lambda_1\cdot v_1+\ldots+\lambda_n\cdot v_n=0$.
4. *Donc la famille est liée.*

ille_libre *Exemple 13.2*
— Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,0),(0,1))$ est libre. En effet, soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(0,0)$. Alors $(\alpha,\beta)=(0,0)$ et donc $\alpha=\beta=0$.
— On démontre de même que dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est libre.
— Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la famille $(\sin,\cos,\exp)$ est libre. Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha\sin+\beta\cos+\gamma\exp=0$. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\sin x+\beta\cos x+\gamma\exp x=0$ ce qui s'écrit aussi $\forall x\in\mathbb{R}$, $\alpha\frac{\sin x}{\exp x}+\beta\frac{\cos x}{\exp x}+\gamma=0$. On montre facilement en utilisant le théorème des gendarmes que $\lim_{+\infty}\frac{\sin x}{\exp x}=\lim_{+\infty}\frac{\cos x}{\exp x}=0$. On en déduit que $\gamma=0$. On a alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\alpha\sin x+\beta\cos x=0$. Si on fait $x=0$ on obtient $\beta=0$ et si on fait $x=\pi/2$, il vient que $\alpha=0$. On a alors bien montré que $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Remarque 13.1 Soit $(v_1,\ldots,v_p)$ une famille de p vecteurs de E.
— Si l'un des vecteurs est nul, la famille est liée.
— Si l'un des vecteurs de la famille apparaît plus d'une fois dans la famille alors la famille est liée.
— Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre

13.1.3 Familles génératrices

DÉFINITION 13.4 ★★★ **Famille génératrice**
On dit qu'une famille $(v_1,\ldots,v_p)$ de p vecteurs de E *engendre* l'espace vectoriel E (ou est *génératrice de* E) si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire de la famille $(v_1,\ldots,v_p)$:

$$\forall v\in E,\quad \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p:\quad v=\sum_{k=1}^{p}\lambda_i\cdot v_i$$

Autrement dit : $\mathrm{V}ect(\{v_1,\ldots,v_p\})=E$.

PLAN 13.3 : Pour montrer qu'une famille est génératrice

1. *Soit* $v\in E$.
2. *Posons* $\lambda_1=\ldots,\ldots,\lambda_p=\ldots$
3. *On a bien :* $v=\sum_{k=1}^{p}\lambda_i\cdot v_i$

eneratrice *Exemple 13.3*
— Dans $\mathbb{R}^2$, soient $x_1=(1,0)$ et $x_2=(0,1)$. La famille (x_1,x_2) est génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, si $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ alors $v=x(1,0)+y(0,1)$.

— On montre de même que la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{R}^3$.
— La famille $((1,0,1),(0,1,1))$ engendre le plan vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y=z$. En effet $F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\} = \{(x,y,x+y) \mid x,y\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$.
— La famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, si $P\in\mathbb{K}_n[X]$ alors il existe $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}$ tels que $P = a_nX^n+\dots+a_0$.
— On considère l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ des fonctions en escaliers sur $[0,1]$. On considère les fonctions $f_{a,b}$ définies pour $a\leqslant b$ par $f_{a,b}(x)=1$ pour $a\leqslant x\leqslant b$ et $f_{a,b}(x)=0$ sinon. La famille $(f_{a,b})_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant 1}$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}$, mais n'est pas libre : $f_{0,1/2}+f_{1/2,1}-f_{0,1}-f_{1/2,1/2}=0$.

Remarque 13.2 Toute sur-famille d'une famille génératrice est encore génératrice.

13.1.4 Bases

DÉFINITION 13.5 ★★★ **Base**
On dit qu'une famille $(v_1,\dots,v_p)$ de vecteurs de E est une *base* de E si et seulement si, à la fois :
1. $(v_1,\dots,v_p)$ est une famille libre de E.
2. $(v_1,\dots,v_p)$ est une famille génératrice de E.

emple_base

Exemple 13.4
— La famille $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. En effet, si $a,b\in\mathbb{R}$ sont tels que $a.1+b.i=0$ alors $a+ib=0$ et donc $a=b=0$. La famille est donc libre. Pour tout nombre complexe, il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $z=a+ib$. La famille est donc aussi génératrice de $\mathbb{C}$. C'est donc une base de $\mathbb{C}$.
— Dans le plan, deux vecteurs non colinéaires forment une base du plan.
— Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On a prouvé dans l'exemple 13.2 que cette famille est libre et dans l'exemple 13.3 qu'elle engendre $\mathbb{R}^3$.
— Dans $\mathbb{R}^3$, la famille formée des vecteurs $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(1,-1,1)$ et $e_3=(0,1,1)$ est une base. La famille est libre : soit $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3=0$. Alors $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 &=0\\ -\alpha_2+\alpha_3 &=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &=0\end{cases}$ ce qui amène $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.
La famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On cherche $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z)=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3=0$. On obtient alors le système $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2 &=x\\ -\alpha_2+\alpha_3 &=y\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 &=z\end{cases}$ et on trouve $\alpha_1=2x+y-z$, $\alpha_2=-x-y+z$ et $\alpha_3=-x+z$ donc (e_1,e_2,e_3) engendre $\mathbb{R}^3$. C'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

De manière plus générale, on a :

PROPOSITION 13.2 ★ **Base canonique de $\mathbb{K}^n$**
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E=\mathbb{K}^n$. Il existe une base privilégiée $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dite canonique et donnée par :

$$\begin{array}{ccc} e_1 & = & (1,0,0,\dots,0)\\ e_2 & = & (0,1,0,\dots,0)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ e_n & = & (0,0,0,\dots,1)\end{array}$$

Démonstration *La famille $e=(e_1,\dots,e_n)$ est génératrice. En effet, si $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ alors : $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$. Elle est de plus libre : Si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont n scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n\lambda_ke_k=0$, alors on a : $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=0$ ce qui prouve que $\forall k\in[\![1,n]\!],\quad \lambda_k=0$.*

PROPOSITION 13.3 ★ **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$**
Soit $n\in\mathbb{N}$. Considérons le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E=\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il existe une base privilégiée de $\mathbb{K}_n[X]$ dite canonique et donnée par : $(1,X,X^2,\dots,X^n)$.

Démonstration *Voir le chapitre sur les polynômes. Nous reviendrons sur cette proposition plus loin dans ce chapitre.*

PROPOSITION 13.4 ★ **Base de** $\mathbb{C}(X)$
La "réunion" des familles $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{(X-a)^n}\right)_{\substack{a\in\mathbb{C}\\ n\in\mathbb{N}^*}}$ est une base de $\mathbb{C}(X)$.

Démonstration *C'est exactement la traduction du théorème de décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{C}$ *en termes de combinaisons linéaires. On peut aussi trouver une base de* $\mathbb{R}(X)$.

THÉORÈME 13.5 ★★★ **Composantes d'un vecteur relativement à une base**
Une famille $e=(e_1,\dots,e_n)$ de E est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur $v\in E$, il $\boxed{\text{existe}}$ une $\boxed{\text{unique}}$ famille de scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ telle que :

$$\boxed{v=\sum_{k=1}^{p}\lambda_i\cdot e_i=\lambda_1\cdot e_1+\ldots+\lambda_n\cdot e_n}$$

Le n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est alors appelé famille des *composantes* (ou *coordonnées*) de v dans la base e.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

— $\boxed{\text{Existence}}$ *Comme la famille e est une base, elle est génératrice de* E *et donc pour tout* $v\in E$, *il existe un* n*-uplet de scalaires* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ *tel que :* $v=\sum_{k=1}^{p}\lambda_i\cdot e_i$

— $\boxed{\text{Unicité}}$ *Supposons qu'il existe deux* n*-uplets de scalaires :* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ *et* $\left(\lambda'_1,\dots,\lambda'_n\right)$ *tels que :*

$$v=\sum_{k=1}^{p}\lambda_i\cdot e_i=\sum_{k=1}^{p}\lambda'_i\cdot e_i.$$

On a donc : $\sum_{k=1}^{p}\left(\lambda'_i-\lambda_i\right)\cdot e_i=0$. *Mais e étant une base de* E, *elle est libre et cette dernière égalité n'est possible que si :* $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \lambda'_i-\lambda_i=0$ *c'est-à-dire :* $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \lambda'_i=\lambda_i$ *ce qui prouve l'unicité.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons que pour tout* $v\in E$, *il existe une unique famille de scalaires* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ *telle que :*

$$v=\sum_{k=1}^{p}\lambda_i\cdot e_i=\lambda_1\cdot e_1+\ldots+\lambda_n\cdot e_n$$

et montrons que e est une base de E. *Il est clair que e est génératrice. Montrons que e est libre. La seule décomposition de* 0_E *sur les vecteurs de la famille e est* $0_E=0e_1+\ldots 0e_n$. *Par conséquent, si le* n*-uplet* $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n$ *est tel que* $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k=0_E$, *on a nécessairement :* $\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \alpha_i=0$ *ce qui prouve que e est libre.*

13.2 Dimension d'un espace vectoriel

13.2.1 Espace vectoriel de dimension finie

DÉFINITION 13.6 ★ **Espace vectoriel de dimension finie**
On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est de *dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie*. De plus, par convention, on dit que $E=\{0\}$ est un espace de dimension finie.

Exemple 13.5
— K^n est de dimension finie car sa base canonique est une famille génératrice finie de K^n.
— De la même façon, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie.
— Par contre, $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Voir l'exemple 13.9 pour une démonstration.
— De la même façon, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont de dimension infinie. Voir l'exercice **??** page **??**.

lle_libre

LEMME 13.6 ★ **Augmentation d'une famille libre**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x\in E\setminus\{0\}$. On suppose que :

H1 $\mathcal{L}=(l_1,\dots,l_n)$ est une famille libre de vecteurs de E.

H2 $x\notin Vect(\mathcal{L})$

Alors $(l_1,\dots,l_n,x)$ est encore une famille libre de vecteurs de E.

Démonstration *Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha$ $n+1$ scalaires de $\mathbb{K}$ tels que : $\alpha_1 l_1+\dots+\alpha_n l_n+\alpha x=0$. Supposons que les $n+1$ scalaires ne sont pas tous nuls. Il y a alors deux possibilités :*

1. *$\alpha=0$ et donc $\alpha_1 l_1+\dots+\alpha_n l_n=0$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ non tous nuls, ce qui n'est pas possible car la famille $\mathscr{L}$ est, d'après la première hypothèse, libre dans* E.
2. *$\alpha\neq 0$. Dans ce cas, on peut alors écrire x comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{L}$ ce qui contredit la seconde hypothèse.*

On montre ainsi par l'absurde que la famille $(l_1,\dots,l_n,x)$ est libre.

LEMME 13.7 ★ **Diminution d'une famille liée**

ille_liee

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{G}=\left(g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\right)$ une famille de $n+1$ vecteurs de E. On suppose que :

H1 $g_{n+1}\in \mathrm{Vect}\left(g_1,\dots,g_n\right)$ (c'est-à-dire, g_{n+1} est combinaison linéaire des vecteurs $g_1,\dots,g_n$).

Alors :

$$\mathrm{Vect}\left(g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\right)=\mathrm{Vect}\left(g_1,\dots,g_n\right)$$

C'est-à-dire qu'on peut retirer le vecteur g_{n+1} à $\mathscr{G}$ sans modifier le sous-espace engendré par $\mathscr{G}$.

Démonstration *D'après l'hypothèse, il existe un n-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ de scalaires de $\mathbb{K}$ tels que : $g_{n+1}=\sum_{k=1}^n\alpha_k g_k$. Posons $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left(g_1,\dots,g_n\right)$ et montrons que la famille $\left(g_1,\dots,g_n\right)$ génère aussi F. Soit $x\in\mathrm{F}$. Il existe $(x_1,\dots,x_{n+1})$ un $(n+1)$-uplet de scalaires de $\mathbb{K}$ tels que :*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{n+1} x_i g_i \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_i g_i + x_{n+1} g_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_i g_i + x_{n+1}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k g_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(x_i+x_{n+1}\alpha_k\right) g_i \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathrm{Vect}\left(g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\right)\subset\mathrm{Vect}\left(g_1,\dots,g_n\right)$. Il est par ailleurs clair que $\mathrm{Vect}\left(g_1,\dots,g_n\right)\subset\mathrm{Vect}\left(g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\right)$ et l'égalité est alors établie.

THÉORÈME 13.8 ★ **Fondamental : On peut compléter une famille libre en une base en puisant dans une famille génératrice**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p,q,n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que :

H1 $\mathscr{L}=\left(l_1,\dots,l_p\right)$ est une famille libre de vecteurs de E.

H2 $\mathscr{G}=\left(g_1,\dots,g_q\right)$ est une famille génératrice de vecteurs de E.

alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E de la forme

$$\mathscr{B}=\left(l_1,\dots,l_p,l_{p+1},\dots,l_n\right)$$

où $l_{p+1},\dots,l_n\in\mathscr{G}$.

Démonstration *On va procéder de manière algorithmique. Si la famille $\mathscr{L}$ est génératrice, le théorème est démontré, sinon on construit une base ainsi. Posons $\mathscr{L}_0=\mathscr{L}$.*

- $\boxed{1^{\text{ère}}\ \textit{étape :}}$
  - *Si $g_1\in\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_0)$, on pose $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_0$. D'après le lemme 13.7, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_1)=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_0\cup\{g_1\}\right)$*
  - *Si $g_1\notin\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_0)$, on pose $\mathscr{L}_1=\mathscr{L}_0\cup\{g_1\}$. D'après le lemme 13.6, la famille $\mathscr{L}_1$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_1)=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_0\cup\{g_1\}\right)$.*

  Dans les deux cas, on a :

  $$\boxed{\mathrm{Vect}(\mathscr{L}_1)=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_0\cup\{g_1\}\right)\quad\text{et}\quad \mathscr{L}_1\text{ est libre}}$$
- *Soit $i\in\mathbb{N}$ tel que $i+1\leqslant q$.*
- $\boxed{i^{\text{ème}}\ \textit{étape :}}$ *On suppose que la famille $\mathscr{L}_i$ est construite en sorte que :*

  $$\boxed{\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_i\right)=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_{i-1}\cup\{g_i\}\right)=\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_0\cup\{g_1,\dots,g_i\}\right)}\quad\text{et}\quad\boxed{\mathscr{L}_i\text{ est libre}}$$
- $\boxed{i+1^{\text{ème}}\ \textit{étape :}}$ *On construit maintenant $\mathscr{L}_{i+1}$.*

- Si $g_{i+1} \in \mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_i\right)$, on pose $\mathscr{L}_{i+1} = \mathscr{L}_i$. D'après le lemme 13.7, on a $\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_{i+1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_i\right)$
- Si $g_{i+1} \notin \mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_i\right)$, on pose $\mathscr{L}_{i+1} = \mathscr{L}_i \cup \left\{g_{i+1}\right\}$. D'après le lemme 13.6, la famille $\mathscr{L}_{i+1}$ est libre et $\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_{i+1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_i \cup \left\{g_{i+1}\right\}\right)$.

Dans les deux cas, on a :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_{i+1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_i \cup \left\{g_{i+1}\right\}\right) \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_{i+1} \text{ est libre}}$$

- *On construit ainsi par récurrence les familles $\mathscr{L}_0, \dots, \mathscr{L}_q$.*

La famille $\mathscr{L}_q$ vérifie alors :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\left(\mathscr{L}_q\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{L} \cup \mathscr{G}\right) \supset \mathrm{Vect}\left(\mathscr{G}\right) = \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_q \text{ est libre}}$$

et est donc libre et génératrice de E. *$\mathscr{L}_q$ est donc une base de* E.

Remarque 13.3 Cette démonstration fournit un algorithme explicite pour fabriquer des bases dans un espace vectoriel de dimension finie.

ce_de_base

COROLLAIRE 13.9 ★ Existence de base
Tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ possède une base.

Démonstration *Par définition, un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ possède une famille génératrice finie $\mathscr{G}$. Soit $x \neq 0 \in \mathscr{G}$. La famille constituée du singleton $\{x\}$ est libre dans* E. *Par application de la proposition précédente, on peut la compléter en une base de* E *en la complétant par des vecteurs de $\mathscr{G}$ bien choisis.*

ncomplete

COROLLAIRE 13.10 ★ Théorème de la base incomplète
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{L} = \left(e_1, \dots, e_p\right)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors on peut compléter $\mathscr{L}$ en une base $\mathscr{B} = \left(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\right)$ de E.

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie, il possède une famille génératrice finie $\mathscr{G}$. D'après le théorème précédent appliqué à $\mathscr{L}$ et à $\mathscr{G}$, on prouve l'existence d'une base de* E *construite par complétion de la base $\mathscr{L}$.*

13.2.2 Dimension

e_steinitz

LEMME 13.11 Lemme de Steinitz
Soient $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathscr{T} = \left(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\right)$ deux familles de vecteurs de E. On suppose que :

H1 $\quad \forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad y_i \in \mathrm{Vect}\left(\mathscr{S}\right)$

alors $\mathscr{T}$ est liée.

Démonstration *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons P_n la propriété à démontrer. Nous allons effectuer une récurrence sur n.*

- *Si $n = 1$ alors $\mathscr{S} = \{x_1\}$ et $\mathscr{T} = \left\{y_1, y_2\right\}$. Par hypothèse, $y_1 = \alpha_1 x_1$ et $y_2 = \alpha_2 x_1$ où $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Ces deux scalaires ne sont pas tous deux nuls sinon $\mathscr{T}$ ne compte qu'un élément. On a alors $\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2 = 0$ et $\mathscr{T}$ est liée. Donc P_1 est vraie.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
- *Supposons que P_{n-1} est vraie et prouvons que c'est alors aussi le cas de P_n. Soient $\mathscr{S} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathscr{T} = \left(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}\right)$ des familles de vecteurs comme dans l'énoncé du lemme. On a :*

$$\begin{cases} y_1 & = \sum_{i=1}^n \alpha_i^1 x_i \\ \vdots & = \vdots \\ y_{n+1} & = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{n+1} x_i \end{cases}$$

où $\forall \left(i, j\right) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n+1]\!], \quad \alpha_i^j \in \mathbb{K}$. Il y a deux cas possibles :

- *Si $\boxed{\forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad \alpha_n^k = 0}$ alors $\left(y_1, \dots, y_n\right)$ est une famille de vecteurs qui sont tous combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \dots, x_{n-1})$. Par application de l'hypothèse de récurrence, on peut affirmer que $\left(y_1, \dots, y_n\right)$ est une famille liée. Il en est alors de même de $\left(y_1, \dots, y_{n+1}\right)$.*
- *Sinon $\boxed{\exists k \in [\![1, n+1]\!], \quad \alpha_n^k \neq 0}$. Quitte à ré-indicer les vecteurs de $\mathscr{T}$, on peut supposer que $\alpha_n^{n+1} \neq 0$. Posons alors : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad z_k = y_k - \dfrac{\alpha_k}{\alpha_n^{n+1}} y_{n+1}$. Chacun des vecteurs de la famille $(z_1, \dots, z_n)$ est alors élément de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_{n-1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(z_1, \dots, z_n)$ est donc liée. Il existe donc des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k z_k = 0$, ce qui s'écrit aussi $\sum_{k=1}^n \lambda_k \left(y_k - \dfrac{\alpha_k}{\alpha_n^{n+1}} y_{n+1}\right) = 0$ ou encore : $\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k - \dfrac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i}{\alpha_n^{n+1}} y_{n+1} = 0$ et prouve que la famille $\left(y_1, \dots, y_{n+1}\right)$ est bien liée.*
- *Le théorème est alors prouvé par application du théorème de récurrence.*

n_et_libre

THÉORÈME 13.12 ★ **Le cardinal d'une famille libre est toujours plus petit que celui d'une famille génératrice.**
Soient :

- $\mathscr{S}$ une famille libre de E.
- $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E.

alors : $\boxed{\operatorname{Card}\mathscr{L} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{G}}$.

Démonstration *Supposons que ce ne soit pas le cas :* $\operatorname{Card}\mathscr{L} > \operatorname{Card}\mathscr{G}$*. Posons* $m = \operatorname{Card}\mathscr{G}$ *et supposons que* $\mathscr{G} = (x_1, \dots, x_m)$ *et que* $(y_1, \dots, y_{m+1})$ *soient* $m+1$ *vecteurs de* $\mathscr{L}$*. Comme* $\mathscr{G}$ *est génératrice, on a :* $\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad y_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{G})$*. Par application du lemme de Steinitz 13.11, cela implique que* $(y_1, \dots, y_{m+1})$ *est une famille liée de* E*, ce qui contredit le fait que* $\mathscr{L}$ *est une famille libre de* E*. Le théorème est alors prouvé par l'absurde.*

THÉORÈME 13.13 ★ **Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal**
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie,* E *possède au moins une base. Soient* $\mathscr{B}_1$ *et* $\mathscr{B}_2$ *deux bases de* E*. Comme* $\mathscr{B}_1$ *est libre et* $\mathscr{B}_2$ *est génératrice, on a* $\operatorname{Card}\mathscr{B}_1 \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}_2$*. De même,* $\mathscr{B}_2$ *est libre et* $\mathscr{B}_1$ *est génératrice, donc* $\operatorname{Card}\mathscr{B}_2 \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}_1$*. Par conséquent :* $\operatorname{Card}\mathscr{B}_1 = \operatorname{Card}\mathscr{B}_2$*.*

Ce théorème, associé au théorème 13.9, permet de donner un sens à la définition suivante :

DÉFINITION 13.7 ★ **Dimension d'un espace vectoriel**

- Si $E = \{0\}$, on dit que E est de **dimension** 0 et on note $\dim E = 0$.
- Sinon, si E est un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, on appelle **dimension** de E le cardinal d'une base de E et on le note $\dim E$.

Exemple 13.6

- $\dim \mathbb{K}^n = n$.
- $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$.

_vecteurs

Application 13.7 Une famille f d'au moins $n+1$ vecteurs dans un espace E de dimension n est toujours liée. En effet, si elle était libre alors on aurait une famille libre f de cardinal plus grand que celui de n'importe quelle base e de E. Or e est une famille génératrice de E et le cardinal d'une famille libre est toujours plus petit que celui d'une famille génératrice.

_des_bases

THÉORÈME 13.14 ★ **Caractérisation des bases**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathscr{S}$ une famille de vecteurs de E de cardinal p.

1. Si $\mathscr{S}$ est libre alors $p \leqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathscr{S}$ est une base de E.
2. Si $\mathscr{S}$ est génératrice alors $p \geqslant n$ et on a égalité si et seulement si $\mathscr{S}$ est une base de E.

Démonstration *Comme* E *est de dimension* n*, il possède une base* $\mathscr{B}$ *de cardinal* n*.*

- *Si* $\mathscr{S}$ *est libre alors appliquant la proposition 13.12, on a :* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}$*.*
  - $\Rightarrow$ *Supposons de plus que* $p = n$ *et montrons que* $\mathscr{S}$ *est génératrice. Si ce n'était pas le cas, il existerait un vecteur* $x_0 \in E$ *tel que* $x_0 \not\in \mathrm{Vect}(\mathscr{S})$*. La famille* $\mathscr{S} \cup \{x_0\}$ *est, d'après le lemme d'augmentation d'une famille libre 13.6, encore libre. On doit donc encore avoir, en vertu de la proposition 13.12,* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \cup \{x_0\} \leqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}$*. Mais cette dernière égalité est équivalente à* $n+1 \leqslant n$*. On a ainsi montré par l'absurde que* $\mathscr{S}$ *est génératrice.*
  - $\Leftarrow$ *Réciproquement, si* $\mathscr{S}$ *est génératrice, alors on a, par application de la proposition 13.12,* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \geqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}$ *et donc* $p = n$
- *Si* $\mathscr{S}$ *est génératrice, alors en appliquant la proposition 13.12, on a :* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \geqslant \operatorname{Card}\mathscr{B}$ *et donc* $p = n$*.*
  - $\Rightarrow$ *Supposons de plus que* $p = n$ *et montrons que* $\mathscr{S}$ *est libre. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe* $x_0 \in \mathscr{S}$ *tel que* $x_0 \in \mathrm{Vect}(\mathscr{S} \setminus \{x_0\})$*. Par application du lemme de réduction d'une famille liée 13.7,* $\mathscr{S} \setminus \{x_0\}$ *est encore génératrice mais on a alors* $n-1 = \operatorname{Card}\mathscr{S} \setminus \{x_0\} \geqslant n$ *ce qui contredit la proposition 13.12.*
  - $\Leftarrow$ *Réciproquement, si* $\mathscr{S}$ *est une base alors elle est libre et on a* $\operatorname{Card}\mathscr{S} \leqslant n$ *et donc* $p = n$*.*

Remarque 13.4 Comme on va le voir dans les exemples suivants, ce théorème permet de diviser par deux le travail à entreprendre pour montrer qu'une famille est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel donné.

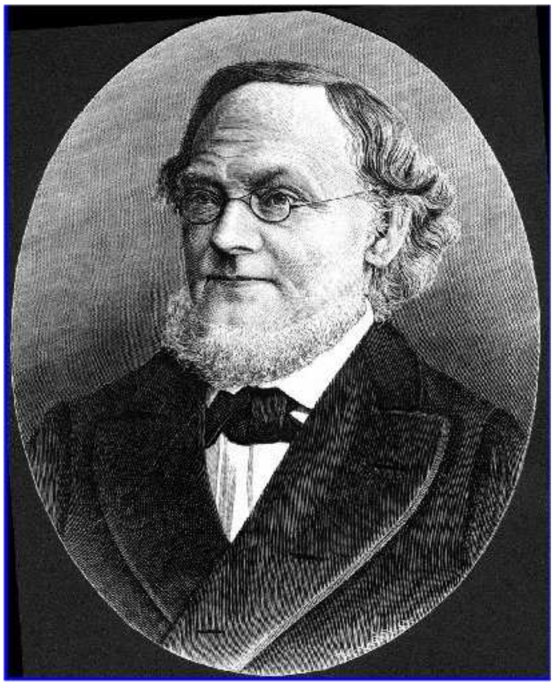
Exemple 13.8

— Reprenons le quatrième point de l'exemple 13.4. Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ et montrons que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On montre comme dans l'exemple 13.4 que cette famille est libre. On conclut en remarquant que $\operatorname{Card}(e) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc e est une base de $\mathbb{R}^3$. On n'a pas besoin de montrer que e est génératrice de $\mathbb{R}^3$! C'est automatique.

— Montrons que la famille $P = (P_1, P_2, P_3)$ avec $P_1 = 5$, $P_2 = 2X - 1$ et $P_3 = X^2 - 4X + 1$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. On commence par montrer que la famille est libre. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$. Alors $\alpha_3 X^2 + (2\alpha_2 - 4\alpha_3)X + (5\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = 0$. Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls et on obtient le système : $\begin{cases} 5\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_3 & = 0 \end{cases}$ dont l'unique solution est $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. La famille est bien libre. De plus $\operatorname{Card}(P) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ donc P est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exemple 13.9 Montrons que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $E_n = (1, X, \dots, X^n)$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est libre et $\operatorname{Card}(E_n) = n+1$. Supposons que $\mathbb{K}[X]$ soit de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\mathbb{K}[X]$ contient une famille libre, E_{n+1} qui est de cardinal $n+1$, ce qui est impossible. Donc $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

BIO 1 Hermann Günther Grassmann, né le 15 avril 1809 à Stettin et mort le 26 septembre 1877 à Stettin (Allemagne).



Hermann Grassmann est le troisième enfant d'une famille de douze. Son père enseigne les mathématiques. Devant les piètres qualités intellectuelles de son fils (mémoire peu fiable, trouble de la concentration, ...), il pense faire de lui un jardinier ou un bijoutier. Hermann Grassmann se rend néanmoins à Berlin en 1927 pour étudier la théologie. Peu à peu, il se passionne pour les mathématiques qu'il découvre au travers des ouvrages écrit par son père. En 1830, il retourne dans sa ville natale en tant que professeur de mathématiques. Ayant raté son examen, il ne peut enseigner que dans les premières classes du secondaire. Il commence en même temps ses recherches en mathématiques. En 1840 il reçoit l'habilitation à enseigner dans les différentes classes de lycée et en 1844, il publie son ouvrage majeur "*Die lineale Ausdenungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*". Grassmann y donne les fondements de l'algèbre linéaire. Son idée est de mettre l'algèbre au service de la géométrie. Il articule les choses autour de la notion de vecteurs. Cette citation est éclairante sur ses motivations : « La première impulsion est venue de considération sur la signification des nombres négatifs en géométrie. Habitué à voir AB comme une longueur, j'étais néanmoins convaincu que $AB = AC + CB$, quelle que soit la position de A, B, C sur une droite ». Il introduit les notions d'indépendance linéaire, de sous-espace vectoriel, de base et de dimension. Ses écrits sont confus et difficiles à suivre, aussi le livre n'aura que peu de lecteurs. Grassmann est très frustré de ce fait car il pense que son travail est révolutionnaire et qu'il mérite un poste à l'université. Il écrit une seconde version de son livre qu'il publie en 1862. Mais malgré ses efforts de présentation, elle ne connaît pas plus de succès que la première. Aigri, Grassmann se tourne alors vers la linguistique et apprend le Sanscrit et le Gothique. Grâce à d'importants travaux de traduction, il entre enfin à l'université. Il faut attendre 1888 pour que le mathématicien Giuseppe Peano reprenne le travail de Grassmann et en précise toute la portée.

13.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

On va maintenant étudier ce que la notion de dimension apporte dans l'étude des sous-espaces vectoriels.

13.3.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

THÉORÈME 13.15 ★ **Dimension d'un sous-espace vectoriel**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E. On a :

1. F est de dimension finie et $\boxed{\dim F \leqslant \dim E}$.

2. $(\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}) \Longleftrightarrow \mathrm{F} = \mathrm{E}$

Démonstration

1. *Si* $\mathrm{F} = \{0\}$, *le résultat est immédiat. Sinon, notons* L *l'ensemble des familles libres de* F. L *est non vide car* F *est non trivial et un vecteur de* F *à lui seul constitue une famille libre de* F. *Toute famille libre de* F *est une famille libre de* E *donc possède au plus* n *éléments. Notons* $p = \max\{\mathrm{Card}\mathscr{L} \mid \mathscr{L} \in \mathrm{L}\}$. *On a donc* $p \leqslant n$ *et si une famille libre* $\mathscr{L}$ *de* E *vérifie à la fois :* $\mathrm{Card}\mathscr{L} = p$ et $\mathscr{L} \in \mathrm{L}$ *alors nécessairement* $\mathscr{L}$ *est une base de* F. *En effet :*
   - $\mathscr{L}$ *est libre.*
   - $\mathscr{L}$ *est génératrice de* F. *Si ce n'était pas le cas, alors d'après le lemme d'augmentation d'une famille libre 13.6, il existerait un vecteur* $x \in \mathrm{F}$ *tel que* $\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup \{x\}$ *soit encore libre. Mais* $\tilde{\mathscr{L}} \in \mathrm{L}$ et $\mathrm{Card}\tilde{\mathscr{L}} = p+1 > p$ *ce qui constituerait une contradiction. La famille* $\mathscr{L}$ *est donc nécessairement génératrice et est donc une base de* F.
2. *Le sens indirect est trivial. Réciproquement, si* $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$ *alors* F *possède une base* $\mathscr{B}$ *de cardinal* n. *Mais* $\mathscr{B}$ *est, par application de la proposition 13.14, aussi une base de* E *et donc :* $\mathrm{F} = \mathrm{V}ect(\mathscr{B}) = \mathrm{E}$.

On utilise très souvent cette propriété...Elle permet de diviser par deux le travail à effectuer pour montrer que deux sous-espaces vectoriels E et F sont égaux. D'habitude on montre que $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ puis que $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$. Il suffira donc de montrer la première inclusion puis que les deux sous-espaces ont même dimension.

PLAN 13.4 : ...pour montrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont égaux

1. *On montre que* $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$
2. *On montre que* $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G}$
3. *Alors* $\mathrm{F} = \mathrm{G}$

Exemple 13.10 Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ et

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,1,\lambda,3),(0,1,1,2)) \qquad \mathrm{G} = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \mid x-y+z=0, x+2y-t=0\}$$

Cherchons à quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $\mathrm{F} = \mathrm{G}$?

— Supposons tout d'abord que $\mathrm{F} = \mathrm{G}$. Alors $(1,1,\lambda,3) \in \mathrm{G}$ et doit satisfaire en particulier l'équation $x-y+z=0$. On trouve alors que $\lambda = 0$.

— Montrons que si $\lambda = 0$ alors $\mathrm{F} = \mathrm{G}$. On sait que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,1,0,3),(0,1,1,2))$. Les vecteurs $(1,1,0,3),(0,1,1,2)$ engendrent F et ils sont non colinéaires donc ils forment une famille libre. Par suite, c'est une base de F et $\dim \mathrm{F} = 2$. Par ailleurs $\mathrm{G} = \{(x,y,z,t) \in \mathrm{E} \mid x-y+z=0, x+2y-t=0\} = \{(x,y,y-x,x+2y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,-1,1),(0,1,1,2))$, on montre alors de la même façon qu'avant que $\dim \mathrm{G} = 2$. De plus $(1,1,0,3)$ et $(0,1,1,2)$ vérifient le système $\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ x+2y-t &= 0 \end{cases}$ donc $(1,1,0,3),(0,1,1,2) \in \mathrm{G}$ et comme G est un sous-espace vectoriel, $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}((1,1,\lambda,3),(0,1,1,2)) \subset \mathrm{G}$. Enfin, comme $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G}$ on obtient $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.

13.3.2 Somme directe

Le théorème suivant sera souvent bien commode pour montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.

_avec_base

THÉORÈME 13.16 ★ **Un caractérisation de la supplémentarité en termes de bases**
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E munis d'une base $(e_1,\dots,e_p)$ pour F et d'une base $(f_1,\dots,f_q)$ pour G. On a équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E : $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
2. $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_q)$ est une base de E.

Démonstration

— *Prouvons le sens direct. On suppose que* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
- *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est libre : soient* $\alpha_1,\dots,\alpha_p,\alpha_{p+1},\dots,\alpha_n$ *des scalaires de* $\mathbb{K}$ *tels que* $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q = 0$. *On a alors :* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p = -(\alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q)$. *Comme* e *est une base de* F, *on a* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p \in \mathrm{F}$ *et comme* f *est une base de* G, *on a :* $x = -(\alpha_{p+1} f_1 + \dots + \alpha_n f_q) \in \mathrm{G}$. *Mais* F *et* G *étant en somme directe, on a :* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ *et donc* $x = 0$. *Comme* e *est une base de* F *et* f *une base de* G, *ceci implique que* $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \dots = \alpha_n = 0$ *et donc que* $\mathscr{B}$ *est libre.*
- *Montrons que* $\mathscr{B}$ *est génératrice de* E. *Soit* $x \in \mathrm{E}$. *Comme* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, *il existe un vecteur* $x_1 \in \mathrm{F}$ *et un vecteur* $x_2 \in \mathrm{G}$ *tels que* $x = x_1 + x_2$. *De plus :*
  — *Comme* e *est une base de* F *et que* $x_1 \in \mathrm{F}$, *il existe* $\alpha_1,\dots\alpha_p \in \mathbb{K}$ *tels que* $x_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p$.

— *Comme f est une base de* G *et que $x_2 \in$* G*, il existe $\beta_1, \dots \beta_q \in \mathbb{K}$ tels que $x_2 = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q e_q$.*
Par conséquent : $x = x_1 + x_2 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_p e_p + \beta_1 f_1 + \dots + \beta_q e_q \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ et $\mathscr{B}$ est donc bien génératrice de E.

On a ainsi prouvé que $\mathscr{B}$ est une base de E.

— *Prouvons la réciproque. On suppose que $\mathscr{B}$ est une base de* E.

- *On a $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. En effet si $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ alors il existe $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{K}$ tels que $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p = y_1 f_1 + \dots + y_q f_q$. Mais alors $x_1 e_1 + \dots + x_p - y_1 f_1 - \dots - y_q f_q = 0$. Mais la famille $\mathscr{B}$ est libre donc $x_1 = \dots = xp = y_1 = \dots = y_q = 0$ et $x = 0$.*
- *On a $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$. En effet, si $x \in \mathrm{E}$ alors comme $\mathscr{B}$ engendre* E*, il existe $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{K}$ tels que*

$$x = \underbrace{x_1 e_1 + \dots + x_p e_p}_{\in \mathrm{F}} + \underbrace{y_1 f_1 + \dots + y_q f_q}_{\in \mathrm{G}} \in \mathrm{F} + \mathrm{G}.$$

Donc $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

ne_directe

COROLLAIRE 13.17 ★ Dimension d'une somme directe
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Si E_1 et E_2 sont supplémentaires : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$, alors

$$\boxed{\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2}.$$

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie, il en est de même de ses deux sous-espaces supplémentaires E_1 et E_2. Posons $n_1 = \dim \mathrm{E}_1$ et $n_2 = \dim \mathrm{E}_2$. Il existe donc une base $(e_1, \dots, e_{n_1})$ de E_1 et une base $(f_1, \dots, f_{n_2})$ de E_2. D'après la proposition précédente, $(e_1, \dots, e_{n_1}, f_1, \dots, f_{n_2})$ est une base de* E *et est donc de cardinal $n = \dim \mathrm{E}$. Par suite : $\dim \mathrm{E}_1 + \dim \mathrm{E}_2 = n_1 + n_2 = n = \dim \mathrm{E}$.*

ementaire

COROLLAIRE 13.18 ★ Existence d'un supplémentaire en dimension finie
Soit E un espace vectoriel de $\boxed{\text{dimension finie}}$. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F possède des supplémentaires dans E.

Démonstration *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E*. Comme* E *est de dimension finie il en est de même de* F *et* F *possède donc une base $(e_1, \dots, e_p)$ où $p = \dim \mathrm{F}$. D'après le théorème 13.10, on peut compléter cette base en une base $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ de* E *où q est un entier tel que $p + q = \dim \mathrm{E}$. Posons $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\{f_1, \dots, f_q\})$. Montrons que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E*. La famille $(f_1, \dots, f_q)$ est libre comme sous-famille d'une famille libre et elle engendre* G *par construction. Donc c'est une base de* G*. Donc d'après le théorème 13.16, on sait que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.*

mentaires

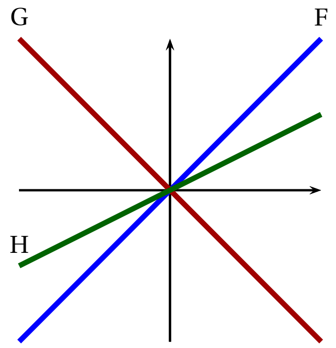


FIGURE 13.1 – Deux supplémentaires G et H d'un s.e.v F

Attention 13.11 Il ne faut pas parler **du** supplémentaire d'un sous-espace vectoriel. Il en existe en général une **infinité**. Voir l'exercice **??** page **??**.

_somme_sev

THÉORÈME 13.19 ★★★ Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels, formule de Grassmann
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E alors :

$$\boxed{\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})}$$

Démonstration
Comme que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ est un sous-espace vectoriel de E *et que* E *est de dimension finie, $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ possède, par application de la proposition précédente, un supplémentaire F' dans* F*. Montrons que F' est un supplémentaire de* G *dans $\mathrm{F} + \mathrm{G}$, c'est-à-dire que $\mathrm{F}' \oplus \mathrm{G} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$.*

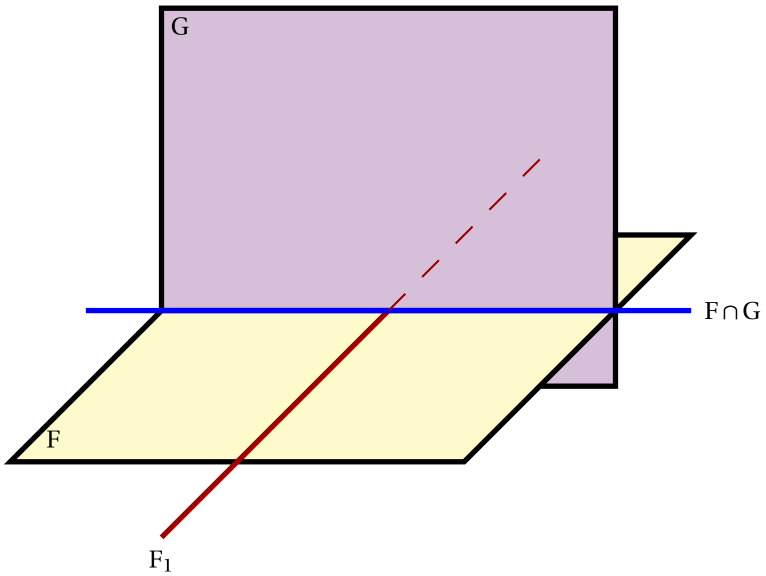


FIGURE 13.2 – Dimension de $F+G$: $F = F_1 \oplus (F\cap G)$ et $F+G = G\oplus F_1$

- *Soit* $x\in F'\cap G$. *Comme* $F'\subset F$, $x\in F\cap G$ *et comme* F' *et* $F\cap G$ *sont supplémentaires,* $x=0$. *Donc* $F'\cap G=\{0\}$.
- *Soit* $x\in F+G$. *Il existe donc* $x_1\in F$ *et* $x_2\in G$ *tels que* $x=x_1+x_2$. *Comme* $x_1\in F$, *il existe* $x_1'\in F'$ *et* $x_1''\in F\cap G$ *tels que* $x_1=x_1'+x_1''$. *Par conséquent :*
$$x=\underbrace{x_1'}_{\in F'}+\underbrace{\underbrace{x_1''}_{\in F\cap G}+\underbrace{x_2}_{\in G}}_{\in G}$$
et donc $x\in F'+G$. *Ce qui prouve que* $F'+G=F+G$.

On a prouvé que $F'\oplus G=F+G$. *D'après le théorème 13.17, on a :* $\dim(F+G)=\dim\left(F'\oplus G\right)=\dim F'+\dim G$. *Mais comme* $F'\oplus F\cap G=F$, *on a aussi :* $\dim F'+\dim F\cap G=\dim F$ *et donc :* $\dim F+G=\dim F+\dim G-\dim F\cap G$.

COROLLAIRE 13.20 ★ **Caractérisation des supplémentaires**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G des sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre :

1. F et G sont supplémentaires dans E.
2. $F\cap G=\{0\}$ et $\dim F+\dim G=\dim E$.
3. $F+G=E$ et $\dim F+\dim G=\dim E$.

Démonstration

- 1 $\Longrightarrow$ 2 *Si* F *et* G *sont supplémentaires dans* E, *il est clair que* $F\cap G=\{0\}$ *et, d'après la proposition 13.17, que :* $\dim F+\dim G=\dim E$.
- 2 $\Longrightarrow$ 3 *Il suffit de montrer que* $F+G=E$. *Mais d'après la proposition 13.19, on a :* $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)=\dim F+\dim G=n=\dim E$ *car* $F\cap G=\{0\}$. *Par conséquent, d'après la proposition 13.15, on a :* $F+G=E$.
- 3 $\Longrightarrow$ 1 *Il suffit de prouver que* $F\cap G=\{0\}$ *ce qui provient de :* $\dim F\cap G=\dim E-\dim F-\dim G=0$.

Remarque 13.5 La formule de Grassmann permet de diviser par deux le travail à effectuer pour prouver une supplémentarité.

Exemple 13.12 Reprenons le second point de l'exemple **??** page **??**. Dans l'espace $E=\mathbb{R}^3$, on considère la droite F donnée par le système $\begin{cases}x+y-z&=0\\2x-y+z&=0\end{cases}$ et le plan G d'équation $z=0$. Montrons que $E=F\oplus G$. On a déjà vu que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E. Le vecteur $(x,y,z)\in F\cap G$ si et seulement si $\begin{cases}x+y-z&=0\\2x-y+z&=0\\z&=0\end{cases}$ qui admet comme unique solution $(0,0,0)$. Donc $\dim(F\cap G)=0$. De plus $\dim F+\dim G=2+1=\dim E$. On en déduit, d'après le corollaire précédent, que $E=F\oplus G$.

13.4 Applications linéaires en dimension finie

Dans cette section, on s'intéresse aux implications de la notion de dimension en ce qui concerne les applications linéaires.

13.4.1 Bases et applications linéaires

La proposition suivante permet de comprendre qu'une application linéaire entre un espace vectoriel de dimension n et un autre de dimension m est entièrement déterminée par une famille de mn scalaires. Cette famille de scalaires, rangée convenablement dans un tableau, forme ce qu'on appellera dans le prochain chapitre une matrice.

THÉORÈME 13.21 ★ **Une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que :

H1 $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

H2 $f = (f_1, \dots, f_n)$ est une famille de vecteurs de F.

alors il existe une et une seule application linéaire $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = f_i \quad (\star)$$

Démonstration

- $\boxed{\text{Unicité}}$ *Soit $v : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une autre application linéaire vérifiant $(\star)$. Prouvons que $u = v$. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme e est une base de E, il existe des scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$. Par linéarité, on a :*

$$u(x) = u\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k u(e_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$$

et

$$v(x) = v\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k v(e_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k.$$

Par conséquent, $u(x) = v(x)$ et $u = v$.

- $\boxed{\text{Existence}}$ *On construit une application $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ satisfaisant $(\star)$ de la façon suivante. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe un unique n−uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$. Posons alors $u(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_i f_i$. u est bien définie car le n−uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ associé à x est unique. u est de plus linéaire. Soit $x' = \sum_{k=1}^n \lambda'_k e_k$ et soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{K}$. On a $\alpha x + \alpha' x' = \sum_{k=1}^n \left(\alpha\lambda_k + \alpha'\lambda'_k\right) e_k$ et par définition de u :*

$$\begin{aligned} u(\alpha x + \alpha' x') &= \sum_{k=1}^n \left(\alpha\lambda_k + \alpha'\lambda'_k\right) f_k \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha\lambda_k f_k + \sum_{k=1}^n \alpha'\lambda'_k f_k \\ &= \alpha u(x) + \alpha' u(x'). \end{aligned}$$

On a de plus bien : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad u(e_k) = f_k$.

Remarque 13.6 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, $x \in \mathrm{E}$ et $y = f(x)$. On suppose que :

H1 $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

H2 $f = (f_1, \dots, f_m)$ est une base de F.

H3 Il existe une famille de scalaires $\left(\alpha_{ij}\right)_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,m]\!]}$ de $\mathbb{K}$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_j$.

H4 Dans la base e, $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ et dans la base f, $y = \sum_{j=1}^m y_i \cdot f_j$

alors : $\forall j \in [\![1, m]\!], \quad y_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \cdot xi$. D'après la proposition, la famille de scalaire $\left(\alpha_{i,j}\right)_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,m]\!]}$ caractérise complètement l'application linéaire u. Cette remarque est à la base de la théorie des matrices qu'on développera dans le prochain chapitre.

PROPOSITION 13.22 **Caractérisation vectorielle de l'injectivité ou la surjectivité d'une application linéaire**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de E. Soit $u : E \to F$ l'application linéaire tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = f_i$. On a :

1. u est injective si et seulement si f est libre.
2. u est surjective si et seulement si f est génératrice.

Démonstration ★★★

1. *On a :*

$$\begin{aligned}
u \text{ est injective} &\iff (\forall x \in E, \quad u(x) = 0 \implies x = 0)\\
&\iff \left(\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\right)\\
&\iff \left(\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k) = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\right)\\
&\iff \left(\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\right)\\
&\iff f \text{ est libre}
\end{aligned}$$

2. *On a :*

$$\begin{aligned}
u \text{ est surjective} &\iff (\forall y \in F, \quad \exists x \in E : \quad f(x) = y)\\
&\iff \left(\forall y \in F, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \quad u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = y\right)\\
&\iff \left(\forall y \in F, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k) = y\right)\\
&\iff \left(\forall y \in F, \quad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = y\right)\\
&\iff f \text{ est génératrice}
\end{aligned}$$

Remarque 13.7 C'est un excellent exercice que de refaire seul cette preuve.

13.4.2 Dimension et isomorphisme

PROPOSITION 13.23 ★ **Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F est isomorphe à E si et seulement si $\dim F = \dim E = n$.

Démonstration

— $\boxed{\Rightarrow}$ *Supposons que* E *et* F *sont isomorphes. Alors il existe $u \in \mathfrak{L}(E, F)$ bijective. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de* E. *Alors $\mathscr{C} = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est, d'après la proposition précédente :*
  - *libre car u est injective.*
  - *génératrice car u est surjective.*

  $\mathscr{C}$ forme donc une base de F *et $\dim F = \operatorname{Card} \mathscr{C} = n = \dim E$.*

— $\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si $\dim F = \dim E = n$, considérons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de* E *et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de* F. *On définit une application linéaire u entre* E *et* F *en posant : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = f_i$. Par application de la proposition précédente, u est :*
  - *injective car $\mathscr{C}$ est libre.*
  - *surjective car $\mathscr{C}$ est génératrice.*

  Par conséquent u est un isomorphisme de E *dans* F.

COROLLAIRE 13.24 ★
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Alors E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.

Démonstration *En effet, ces deux espaces vectoriels sont de même dimension.*

COROLLAIRE 13.25 ★
Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie alors $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et :

$$\boxed{\dim (E_1 \times E_2) = \dim E_1 + \dim E_2}$$

Démonstration *Supposons que* $\dim E_1 = n_1 \in \mathbb{N}$ *et* $\dim E_2 = n_2 \in \mathbb{N}$. *Appliquant le corollaire précédent, on a :* $E_1 \simeq \mathbb{K}^{n_1} =$ *et* $E_2 \simeq \mathbb{K}^{n_2}$. *On montre facilement qu'alors :* $E_1 \times E_2 \simeq K^{n_1} \times \mathbb{K}^{n_2} = \mathbb{K}^{n_1+n_2}$. *Mais* $\dim \mathbb{K}^{n_1+n_2} = n_1 + n_2$. *Par conséquent :* $\dim (E_1 \times E_2) = n_1 + n_2$.

13.4.3 Rang

DÉFINITION 13.8 ★★★ **Rang d'une famille de vecteurs**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle **rang** de la famille de vecteurs $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$. On notera : $\operatorname{rg} \mathscr{F} = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.

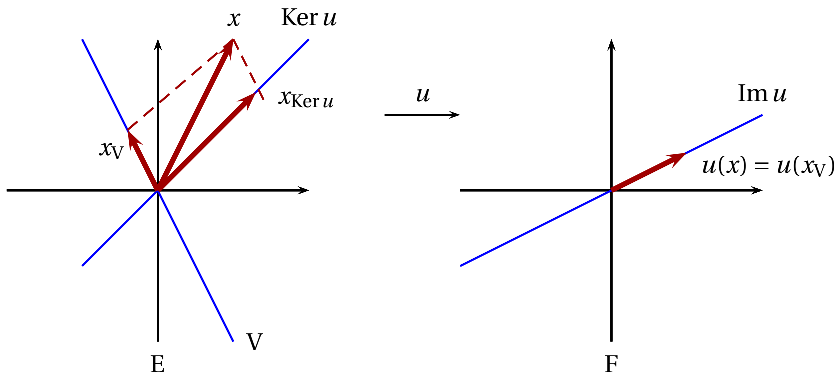
DÉFINITION 13.9 ★★★ **Rang d'une application linéaire**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On appelle **rang de l'application linéaire** $u \in \mathfrak{L}(E, F)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} u$: $\operatorname{rg} u = \dim (\operatorname{Im} u)$.

PROPOSITION 13.26 ★★★
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathfrak{L}(E, F)$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Démonstration *Soit* $(e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E. *On a* $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$. *En effet :*

$$\begin{aligned}
y \in \operatorname{Im} u &\iff \exists x \in E : \quad y = u(x) \\
&\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \quad y = u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) \\
&\iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : \quad y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k) \\
&\iff y \in \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))
\end{aligned}$$

et $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \operatorname{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.



mule_rang

FIGURE 13.3 – Formule du rang : $E = \operatorname{Ker} u \oplus V$ et $V \approx \operatorname{Im} u$

le_du_rang

THÉORÈME 13.27 ★★★ **Formule du rang**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathfrak{L}(E, F)$. On suppose que :

(H1) E est de dimension finie.

Alors on a la **formule du rang** :

$$\boxed{\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u}$$

Démonstration *Comme* E *est de dimension finie, d'après la proposition 13.18,* $\operatorname{Ker} u$ *possède un supplémentaire* G*. Montrons que* G *et* $\operatorname{Im} u$ *sont isomorphes. Pour ce faire, montrons que* $u_{|\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \operatorname{Im} u$ *est un isomorphisme.*

— $u_{|\mathrm{G}}$ *est surjective : Soit* $y \in \operatorname{Im} u$*. Il existe* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $u(x) = y$*. Comme* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \mathrm{G}$*, il existe* $x_1 \in \operatorname{Ker} u$ *et* $x_2 \in \mathrm{G}$ *tels que :* $x = x_1 + x_2$*. Comme* $u(x_1) = 0$*, on a :* $y = u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2)$*. Par conséquent,* y *possède un antécédent pour* $u_{|\mathrm{G}}$ *dans* G*. et* $u_{|\mathrm{G}}$ *est surjective.*

— $u_{|\mathrm{G}}$ *est injective : Soit* $x \in \mathrm{G}$ *tel que* $u_{|\mathrm{G}}(x) = 0$*. Alors* $x \in \operatorname{Ker} u$ *et donc* $x \in \mathrm{G} \cap \operatorname{Ker} u$*. Comme* $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} u \oplus \mathrm{G}$*,* $x = 0$ *et donc* $u_{|\mathrm{G}}$ *est injective.*

Par conséquent, G *et* $\operatorname{Im} u$ *sont isomorphes et, d'après la proposition 13.17, on a :* $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{E} - \dim \operatorname{Ker} f$.

Remarque 13.8

— On montre dans cette preuve que $\operatorname{Im} u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. Il faut bien prendre garde qu'en général, si u est un endomorphisme, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires. Essayez par exemple de trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.

— La formule du rang permet de connaître la dimension du noyau (resp. de l'image) de u dés qu'on connaît la dimension de son image (resp. de son noyau). Là encore, on dispose d'un outil puissant qui va permettre de beaucoup simplifier les démonstrations.

⚠ *Attention 13.13* Il y a deux erreurs classiques à commettre en appliquant cette formule. La première, grossière, est de prendre pour E l'espace d'arrivée de u plutôt que son espace de départ. La seconde est d'oublier de vérifier que E est de dimension finie. En dimension infinie, la formule du rang n'a tout simplement pas de sens...En effet, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ peuvent être de dimension infinie.

Exemple 13.14 On considère l'application linéaire $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x-z) \end{array} \right.$. Déterminons son image et son noyau.

— On sait que $\operatorname{Im} u = \left\{ (x-y+z, x-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ x(1,1) + y(-1,0) + z(1,-1) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (-1,0)$ et $f_3 = (1,-1)$. Trois vecteurs dans le plan sont nécessairement liés. Les vecteurs f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. D'après le lemme de réduction d'une famille liée, on a $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$. On vérifie que les vecteurs f_1 et f_2 forment une famille libre. On a donc montré que (f_1, f_2) est une base de $\operatorname{Im} u$ et que $\operatorname{Im} u$ est de dimension 2. On remarque que comme $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}^2$ et que $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}^2$ alors $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$ et u est surjective.

— On applique la formule du rang et on trouve que $\dim \operatorname{Ker} u = 1$. Le noyau de u est alors une droite vectorielle et une base de cette droite est formée d'un seul vecteur. On vérifie que $(1,2,1) \in \operatorname{Ker} u$. Donc $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(1,2,1)$.

norphismes

COROLLAIRE 13.28 ★ **Caractérisation des isomorphismes**

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$ et $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. On a équivalence entre :

1. u est injective.
2. u est surjective.
3. u est un isomorphisme.

Démonstration *On a :*

— *u est injective* $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ $\Longrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} u = 0$ $\Longrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathrm{E} = n$ $\Longrightarrow$ *u est surjective* $\Longrightarrow$ *u est un isomorphisme.*

— *u est surjective* $\Longrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathrm{E} = n$ $\Longrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} u = 0$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ $\Longrightarrow$ *u est injective* $\Longrightarrow$ *u est un isomorphisme.*

m15:26:38

COROLLAIRE 13.29 ★ **Caractérisation des automorphismes**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ On a équivalence entre :

1. u est injective.
2. u est surjective.
3. u est un automorphisme.

Démonstration *C'est une conséquence directe de la dernière proposition.*

THÉORÈME 13.30 ★ **Inverses à gauche et à droite**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme $u \in \mathrm{L(E)}$. On dit que

1. u est inversible à gauche si et seulement si il existe $v \in \mathrm{L(E)}$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}$;
2. u est inversible à droite si et seulement si il existe $w \in \mathrm{L(E)}$ tel que $u \circ w = \mathrm{id}$;
3. u est inversible si et seulement si il existe $u^{-1} \in \mathrm{L(E)}$ tel que $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{id}$.

On a la caractérisation :

$$(u \text{ inversible à gauche }) \Longleftrightarrow (u \text{ inversible à droite }) \Longleftrightarrow (u \text{ inversible })$$

Démonstration *Supposons que u est inversible à gauche et montrons que u est bijective. Il existe donc $v \in \mathrm{L(E)}$ telle que $v \circ u = \mathrm{id_E}$. Alors $v \circ u$ est bijective (c'est l'application identique !) et d'après le théorème* **??** *page* **??***, on sait alors que u est injective. Mais d'après la proposition de caractérisation des automorphismes, u est bijective. On fait de même si u est inversible à droite.*

Remarque 13.9

— Là encore, on divise par deux le travail à réaliser pour montrer qu'une application linéaire $u \in \mathrm{L(E)}$ est bijective. Dans le cas général, il faut exhiber une application $v \in \mathrm{L(E)}$ tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{id_E}$. Si E est de dimension finie, il suffit de montrer que $u \circ v = \mathrm{id_E}$ ou que $v \circ u = \mathrm{id_E}$.

— Ce résultat est faux en dimension infinie comme le montre le contre-exemple suivant. Soit $\mathscr{S}$ l'espace des suites réelles. On définit deux endomorphismes (le « shift » à gauche et à droite) :

$$s_g : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots)$$

$$s_d : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots)$$

Étudier l'injectivité, la surjectivité de s_g, s_d. Calculer $s_g \circ s_d$ et $s_d \circ s_g$.

13.5 Récurrences linéaires

On considère les suites de nombres réels ou complexes vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \qquad \text{avec } a \neq 0.$$

Des liens avec la résolution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ vont apparaître. Il est donc bon de revoir le théorème **??** p. **??**.

13.5.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. On considère l'espace vectoriel E des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

PROPOSITION 13.31
Soit a, b, et $c \in \mathbb{K}$, avec $a \neq 0$.
L'ensemble F des suites de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration *Pour cela on considère* $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$ *avec* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$.
On vérifie simplement que Φ est un endomorphisme de E. On en déduit que F, en tant que noyau de Φ, est un sous-espace vectoriel de E.

PROPOSITION 13.32
F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\leqslant 2$.

Démonstration Soit $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$.
*On vérifie simplement que Ψ est linéaire. Maintenant, Ψ est injectif. En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Ker}\Psi$, on vérifie par une récurrence double (Théorème **??** p. **??**) $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n : u_n = 0$.*
On a H_0 et H_1 puisque $u \in \operatorname{Ker}\Psi$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(H_n \text{ et } H_{n+1}) \Longrightarrow H_{n+2})$ puisque $a \neq 0$.
On en déduit que F est de dimension finie. Toute famille libre de F a pour image une famille libre de $\mathbb{K}^2$ puisque Ψ est injectif. Donc toutes les familles libres de F ont moins de deux éléments. C'est bien dire que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\leqslant 2$.

13.5.2 Suites géométriques solutions

Comme pour les équations différentielles où l'on cherchait des solutions de la forme $x \longmapsto e^{rx}$, on va chercher des solutions sous la forme de suites géométriques. Là encore on va travailler dans $\mathbb{C}$ dans un premier temps.
On considère l'équation caractéristique

$$a\, r^2 + b\, r + c = 0.$$

Si r est une racine, alors la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F.

PROPOSITION 13.33
Soit a, b, et $c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$.
► Si r_1 et r_2 sont des racines distinctes de $a\, r^2 + b\, r + c = 0$, alors les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.
► Si r est une racines double de $a\, r^2 + b\, r + c = 0$, alors les suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

Dans les deux cas, F est un espace de dimension 2.
Démonstration ► *Dans le cas des racines distinctes, les deux suites géométriques ont pour image par Ψ respectivement $(1, r_1)$ et $(1, r_2)$ qui forment une famille libre de $\mathbb{C}^2$. Donc les deux suites géométriques forment une famille libre d'un espace de dimension au plus deux, donc c'est une base.*
► *Dans le cas d'une racine double, les deux suites ont pour image par Ψ respectivement $(1, r)$ et $(0, r)$ qui forment à nouveau une famille libre de $\mathbb{C}^2$.*

Exemple 13.15 On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$, elle admet deux racines distinctes

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Donc il existe deux complexes a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = ar_1^n + br_2^n$. Les conditions initiales nous donnent $u_0 = 0 = a+b$ et $u_1 = 1 = ar_1 + br_2$. On résout ce système en (a, b) pour trouver

$$a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

soit

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \text{Formule de Binet .}$$

13.6 Polynômes

Comme promis, nous revenons sur les polynômes en nous attachant plus à l'aspect espace vectoriel qu'à l'aspect anneau. Pour commencer, un rappel.

PROPOSITION 13.34 ★ **Structure de $\mathbb{K}[X]$**
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

THÉORÈME 13.35 ★ **Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$**
Soit $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors :
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- La famille $\boxed{(1, X, X^2, \ldots, X^n)}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration

- *Montrons que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.Comme $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\alpha P + \beta Q$ est encore un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Reste à montrer que ce polynôme est de degré $\leqslant n$. On a clairement : $\deg(\alpha P) \leqslant \deg P \leqslant n$ et $\deg(\beta Q) \leqslant \deg Q \leqslant n$ et appliquant le théorème **??**, on a aussi $\deg(\alpha P + \beta Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$.*
- *Montrons que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre : soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\alpha_0.1 + \alpha_1.X + \dots + \alpha_n.X^n = 0$. Transcrivant cette égalité avec la notation initiale des polynômes, on a donc : $(\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, \dots) = (0, \dots, 0, 0, \dots)$ et par identification : $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ce qui prouve que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre.*
- *Montrons que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$: Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre donc $\mathbb{K}_n[X]$.*

Remarque 13.10 Nous avons démontré au passage que $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

PROPOSITION 13.36 ★ **Famille échelonnée en degré**
Soit $\mathscr{S} = (P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \deg(P_i) = i$$

alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Démonstration *Soit $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n = 0$ une combinaison linéaire nulle de (P_k). Supposons les λ_k non tous nuls et considérons p le plus grand indice i pour lequel $\lambda_k \neq 0$. On aurait alors $P_p = -\sum_{i=0}^{p-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_p} P_i$. Le membre de gauche est un polynôme de degré p et celui de droite un polynôme de degré $\leqslant p-1$. Contradiction. Donc la famille $\mathscr{S}$ est libre. Comme elle admet $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, elle est aussi génératrice. C'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Remarque 13.11 La famille $\left(1, (X-a), \dots, \frac{(X-a)^n}{n!}\right)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\left(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)\right)$ représente les composantes de P dans cette base.
C'est la formule de Taylor.

On démontre de même :

PROPOSITION 13.37 **Famille échelonnée en valuation**

- Soit $\mathscr{S} = (P_0, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \operatorname{val}(P_i) = i$$

  alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Soit $\mathscr{S} = (P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ telle que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{val}(P_i) = i$$

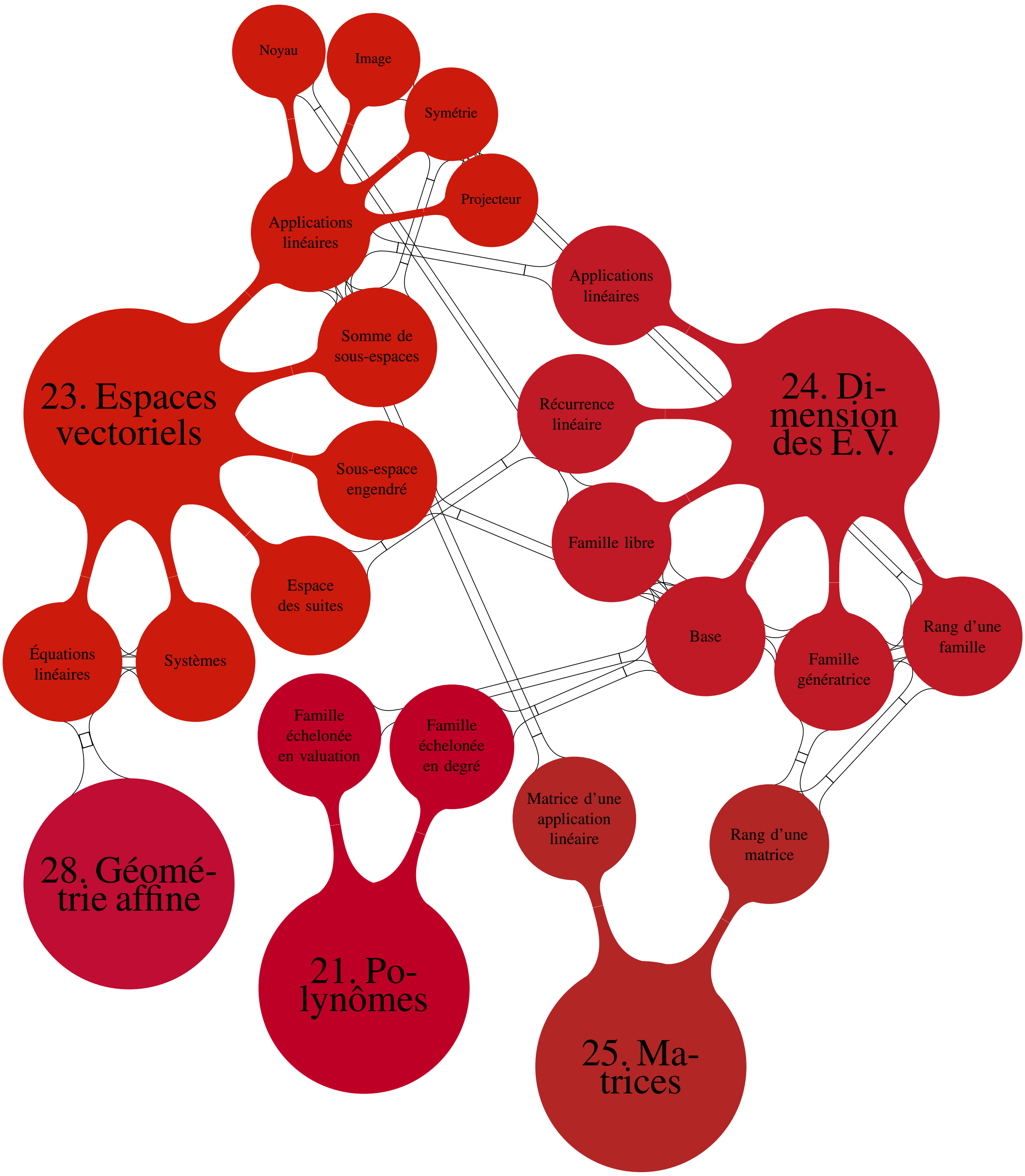
  alors $\mathscr{S}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

En résumé

Ce chapitre doit être parfaitement maîtrisé, il contient différentes notions fondamentales en algèbre linéaire :

1. Familles libres, liées, génératrices.
2. Bases.
3. Théorème de la base incomplète.
4. Dimension.
5. Formule de Grassmann.
6. Formule du rang.
7. Image d'une base par une application linéaire.

Les démonstrations vous sembleront sans doute difficiles dans un premier abord mais là encore, petit à petit, vous allez vous les approprier et vous comprendrez au final qu'elles sont pour la plupart très naturelles. Il est important de bien les assimiler et de savoir les refaire car les techniques utilisées re-serviront.


Noyau
Image
Symétrie
Projecteur
Applications linéaires
Somme de sous-espaces
23. Espaces vectoriels
Sous-espace engendré
Espace des suites
Équations linéaires
Systèmes
28. Géométrie affine
Famille échelonée en valuation
Famille échelonée en degré
21. Polynômes
Applications linéaires
24. Dimension des E.V.
Récurrence linéaire
Famille libre
Base
Famille génératrice
Rang d'une famille
Matrice d'une application linéaire
Rang d'une matrice
25. Matrices