

FICHE : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Dans toute la fiche, X est un ensemble non vide et I est un intervalle non trivial de \mathbb{R} .

SUITES DE FONCTIONS

Convergence simple d'une suite de fonctions

On dit que la suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$ dans \mathbb{R} . Autrement dit :

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Convergence uniforme d'une suite de fonctions

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies [\forall x \in X, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon]$$

Caractérisation de la convergence uniforme avec $\| \cdot \|_{\infty}$

Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ si et seulement si :

- À partir d'un certain rang, les fonctions $(f_n - f)$ sont bornées.
- $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

CV uniforme \implies CV simple

Soit une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f , alors la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvu}} f \implies f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cvs}} f$$

Convergence uniforme sur tout segment

Soit une partie $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Alors la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment vers la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si et seulement si pour

tout segment $K = [a, b] \subset I$:

- À partir d'un certain rang $f - f_n$ est bornée sur K ;
- $\|f_n - f\|_{\infty, K} = \sup_{x \in K} |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

\triangleleft La convergence uniforme sur tout segment de I n'implique pas la convergence uniforme sur I .

Pour la convergence uniforme sur I (resp. sur tout segment de I), la limite d'une suite de fonctions continues

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) toutes les fonctions f_n sont continues sur I ;
- (H2) la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur I (resp. sur tout segment de I).

Alors la fonction f est continue sur I .

Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues

On considère une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ continues sur un segment $[a, b]$. On suppose que

- (H1) La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sur le segment $[a, b]$.

Alors la fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, et

$$\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Dérivation et convergence uniforme sur I (resp. sur tout segment)

On considère une suite d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.
- (H2) La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

H3 La suite de fonctions $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur I (resp. sur tout segment de I) vers une application $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors :

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.
2. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur I
3. $f' = g$.

Généralisation

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I)$;

H2 $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *simplement* vers une application f_i ;

H3 la suite de fonctions dérivées kièmes, $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge *uniformément sur tout segment* vers une application g .

Alors :

1. La fonction $f = f_0$ est de classe \mathcal{C}^k sur I ;
2. $f^{(k)} = g$.
3. $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la suite de fonction $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f^{(i)}$ sur tout segment de I.

Théorème de convergence dominée de Lebesgue

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

H1 $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I.

H2 La suite de fonctions (f_n) converge *simplement* sur I vers une fonction f .

H3 La fonction f est continue par morceaux sur I.

H4 **Hypothèse de domination** : Il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, *indépendante de n* qui

est continue par morceaux et *intégrable sur I* telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Alors :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I.

2. La fonction f est intégrable sur I.

3. $\int_I f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(x) dx$.

Séries de fonctions

Série de fonctions

Soit $(f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On appelle *série de fonctions de terme général f_n* la suite (S_n) de terme général

$$S_n : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sum_{k=0}^n f_k(x) \end{cases}$$

On note $\sum f_n$ une telle série de fonctions. La fonction S_n s'appelle la *nième somme partielle* de la série $\sum f_n$.

Convergence simple d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* sur l'intervalle I si et seulement si pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Si $\sum f_n$ est simplement convergente sur I , on définit alors la fonction

$$S : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{cases}$$

1. La fonction S s'appelle la *somme de la série de fonctions* et est notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $S - S_n$ s'appelle le *reste d'ordre n* de la série de fonctions et est noté

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$$

Dire qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I revient à dire que la *suite de fonctions* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction S .

Convergence absolue d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge *absolument* sur I si et seulement si pour tout $x \in I$ fixé, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.

Convergence uniforme d'une série de fonctions

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sommes partielles) converge uniformément sur I .

Une condition nécessaire de convergence uniforme d'une série de fonctions

Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

Caractérisation pratique de l'uniforme convergence

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si :

- (H1) La série $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- (H2) La suite de fonctions des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

Convergence normale

On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ bornée sur I converge *normalement* sur I , si et seulement si la série numérique

$$\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}$$

converge où $\|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

Caractérisation de la convergence normale, série majorante

Une série $\sum f_n$ est normalement convergente sur I si et seulement si il existe une suite réelle (a_n) vérifiant les deux conditions suivantes :

- (H1) $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{\infty} \leq a_n$;
- (H2) la série $\sum a_n$ converge.

La série $\sum a_n$ est dite être une *série majorante* de la série $\sum f_n$.

Comparaison des modes de convergence

$$\sum f_n \text{ CV normalement sur } I \implies \begin{cases} \sum f_n & \text{CV uniformément sur } I \\ \sum f_n & \text{CV absolument sur } I \end{cases} \implies \sum f_n \text{ CV simplement sur } I.$$

Pour étudier les modes de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$

Pour étudier les modes de convergence d'une série de fonctions $\sum f_n$:

- 1 Commencer par étudier la convergence *normale* : si
 - $\|f_n\|_{\infty} \leq \alpha_n$,
 - la série numérique $\sum \alpha_n$ converge,alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément (absolument), donc simplement.

- 2 Si on n'arrive pas à montrer la convergence normale, étudier d'abord la convergence simple (ou absolue).
- 3 S'il y a convergence simple, étudier la convergence uniforme :
- La suite de fonctions $\|f_n\|_\infty$ converge-t-elle vers la fonction nulle ? Si ce n'est pas le cas, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément.
 - Essayer de montrer que la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle. Pour cela, majorer-minorer le reste $R_n(x)$. On peut :
 - utiliser une comparaison avec une intégrale,
 - utiliser le critère spécial des séries alternées, qui majore $|R_n(x)|$ par le premier terme négligé,
 - majorer la série $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x)$ en faisant apparaître des séries plus simples (géométriques, ...)

CV uniforme et continuité

Soit une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I ;
- (H2) la série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur I (resp. *uniformément sur tout segment de I*).

Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

CV uniforme et intégration, théorème d'intégration terme à terme

Soit une série de fonctions $\sum f_n$ définies sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$;
- (H2) la série de fonctions $\sum f_n$ converge *uniformément* sur le segment $[a, b]$.

Alors :

1. La fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur le segment $[a, b]$;
2. La série numérique $\sum \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$ converge;
3. On peut inverser les signes sommes : $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$.

CV uniforme et dérivation, théorème de dérivation terme à terme

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle I .
- (H2) La série de fonctions $\sum f_n$ converge *simple* sur I .
- (H3) La série de fonctions $\sum f_n'$ converge *uniformément* sur I (resp. *uniformément sur tout segment de I*).

Alors :

1. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;
2. La fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;
3. On peut inverser dérivation et signe somme : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

CV uniforme et dérivation d'ordre k

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^k(I)$;
- (H2) $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ converge *simple* sur I ;
- (H3) la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge *uniformément sur tout segment de I* .

Alors,

1. $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum f_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I ;
2. La fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k sur I ;
3. $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$.

Intervention des signes sommes sur un intervalle

On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I ;
- (H2) La série de fonctions $\sum f_n$ converge *simple* sur I ;

H3 La fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I.

H4 La série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors :

1. La fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I.

$$2. \int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|.$$

3. On peut permuter les signes sommes :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right)$$