

FICHE : INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Hypothèse de domination

On dit qu'une fonction

$$F: \begin{cases} A \times I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto F(x, t) \end{cases}$$

vérifie l'hypothèse de domination si et seulement s'il existe une fonction $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (H1) φ est continue par morceaux sur I ;
- (H2) φ est intégrable sur I ;
- (H3) $\forall (x, t) \in A \times I, |F(x, t)| \leq \varphi(t)$.

Continuité sous le signe somme

On considère une fonction

$$F: \begin{cases} A \times I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto F(x, t) \end{cases}$$

et on suppose que :

- (H1) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (H2) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est continue sur A ;
- (H3) F vérifie l'hypothèse de domination.

Alors,

1. $\forall x \in A$ fixé, la fonction $F_2: t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur I .
2. La fonction

$$f: \begin{cases} A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_I F(x, t) dt \end{cases}$$

est continue sur A .

Dérivation sous le signe somme

On considère une fonction

$$F: \begin{cases} A \times I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto F(x, t) \end{cases}$$

et on suppose que :

- (H1) Pour tout $x \in A$, la fonction $F_2: t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- (H2) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A
- (H3) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (H4) La fonction $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $A \times I$.

Alors :

1. La fonction

$$f: \begin{cases} A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_I F(x, t) dt \end{cases}$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .

2. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I .
3. $\forall x \in A, f'(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt$.

Hypothèse de domination locale

On dit qu'une fonction

$$F: \begin{cases} A \times I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto F(x, t) \end{cases}$$

vérifie l'hypothèse de domination locale si et seulement si pour tout segment $K \subset A$, il existe une fonction $\varphi_K: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (H1) φ_K est continue par morceaux sur I ;
- (H2) φ_K est positive sur I ;
- (H3) φ_K est intégrable sur I ;
- (H4) $\forall (x, t) \in K \times I, |F(x, t)| \leq \varphi_K(t)$

Théorème de continuité, extension à la domination locale

On considère une fonction

$$F: \begin{cases} A \times I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto F(x, t) \end{cases}$$

et on suppose que :

- (H1) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- (H2) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est continue sur A ;
- (H3) F vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$.

Alors,

1. $\forall x \in A$ fixé, la fonction $F_2: t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur I .
2. La fonction

$$f: \begin{cases} A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_I F(x, t) dt \end{cases}$$

est continue sur A .

Dérivation sous le signe somme, extension à la domination locale

On considère une fonction

$$F: \begin{cases} A \times I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto F(x, t) \end{cases}$$

et on suppose que :

- (H1) Pour tout $x \in A$, la fonction $F_2: t \mapsto F(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- (H2) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .
- (H3) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (H4) La fonction $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$.

Alors :

1. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I .
2. La fonction

$$f: \begin{cases} A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_I F(x, t) dt \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .

3. $\forall x \in A, f'(x) = \int_I \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) dt$.

Dérivations successives sous le signe somme

On considère une fonction

$$F: \begin{cases} A \times I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto F(x, t) \end{cases}$$

et on suppose que :

- (H1) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A ;
- (H2) Pour tout $x \in A$, les fonctions $t \mapsto F(x, t)$, $t \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, t)$, $\dots$, $t \mapsto \frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}}(x, t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I .
- (H3) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- (H4) La fonction $\frac{\partial^n F}{\partial x^n}$ vérifie l'hypothèse de domination (locale).

Alors :

1. La fonction

$$f: \begin{cases} A & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \int_I F(x, t) dt \end{cases}$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur A .

2. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in A$,

$$f^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i F}{\partial x^i}(x, t) dt$$