

FICHE : INÉGALITÉS CLASSIQUES

Avec des identités remarquables

Pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$4ab \leq (a+b)^2$$

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$2|ab| \leq a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ si } a, b \geq 0$$

$$1 + nx \leq (1+x)^n \text{ pour } x > -1 \text{ (Inégalité de Bernoulli)}$$

$$||a| - |b|| \leq |a+b| \leq |a| + |b| \text{ (Inégalités triangulaires)}$$

Fonctions usuelles

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \leq \tan x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\forall x \geq 0, \quad \arctan x \leq x$$

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \quad \text{et} \quad \forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$$

$$\forall x > 0, \quad \ln x < x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x$$

$$\forall x \geq 0, \quad \operatorname{sh} x \geq x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$$

Inégalités de Cauchy-Schwarz et applications

Dans un préhilbertien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, pour tout $x, y \in E$ on a :

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Il en résulte que :

- $\forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2};$
- $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}), \quad \left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt};$
- Pour toutes fonctions f, g continues et de carré intégrable sur $I : \left| \int_I f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_I |g(t)|^2 dt};$

Inégalité des accroissements finis - Version I

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) f est continue sur $[a, b]$
- (H2) f est dérivable sur $]a, b[$
- (H3) Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in]a, b[, \quad m \leq f'(x) \leq M$$

Alors on a :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Inégalité des accroissements finis - Version II

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que :

- (H1) f est continue sur $[a, b]$
- (H2) f est dérivable sur $]a, b[$
- (H3) $|f'|$ est majorée sur $]a, b[: \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq \alpha$

Alors on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{x \in]a, b[} |f'(x)| |b - a|$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Si $x \in I$, on peut, d'après la formule de Taylor avec reste intégrale, écrire $f(x)$ sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= T_n(x) + R_n(x) \end{aligned}$$

On a alors

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

où M_{n+1} est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, x]$ (qui existe car $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, x]$)

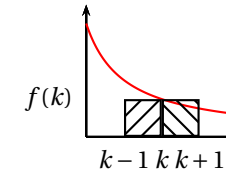
Comparaison séries-intégrales

Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux ($a \in \mathbb{N}$). On suppose que :

- (H1) f est à valeurs positives.
- (H2) f est décroissante.

Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $(\int_a^n f(t) dt)$ sont de même nature. De plus, si elles convergent :

$$\int_{a+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=a+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_a^{+\infty} f(t) dt$$



Critère spécial des séries alternées (TSA)

On considère une série $\sum \underbrace{(-1)^n v_n}_{u_n}$.

- (H1) À partir d'un certain rang $v_n \geq 0$.
- (H2) La suite (v_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
- (H3) $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors :

- la série alternée $\sum (-1)^n v_n$ converge ;
- On dispose d'une majoration du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ par la valeur absolue du premier terme négligé $|u_{n+1}|$:

$$|R_n| \leq v_{n+1}$$

- Le signe du reste R_n est le même que celui du premier terme négligé : $\text{sg}(R_n) = \text{sg}(u_{n+1})$.
- En notant respectivement S et S_n la somme et la n ème somme partielle de la série, comme (S_{2n}) est décroissante, que (S_{2n+1}) est décroissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, on a les inégalités sur les sommes partielles :

$$S_1 \leq S_3 \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq \dots \leq S \leq \dots \leq S_{2n} \leq \dots \leq S_2 \leq S_0$$