Chapitre 6

Suites et séries de fonctions

6.0.1 Suites de fonctions

Exercice 6.1 ★ ***Une limite simple de fonctions convexes est convexe***

Montrer que la limite simple d'une suite convergente de fonctions convexes de I *dans* $\mathbb{R}$ *est encore convexe.*

ntes

Exercice 6.2 ★ ***Une limite simple de fonctions croissantes est croissante***

Montrer que la limite simple d'une suite convergentes de fonctions croissantes de I *dans* $\mathbb{R}$ *est encore croissante.*

Exercice 6.3 ★ ***La suite produit de deux suites de fonctions uniformément convergentes et bornées est uniformément convergente***

Soient (f_n) *et* (g_n) *deux suites de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *qui convergent uniformément vers respectivement* $f:\mathrm{I}\rightarrow\mathbb{R}$ *et* $g:\mathrm{I}\rightarrow\mathbb{R}$*. On suppose que* f *et* g *sont bornées. Montrez alors que* $(f_n g_n)$ *converge uniformément vers* fg*.*

conv

Exercice 6.4 ★ ***Une combinaison linéaire de suites de fonctions uniformément convergentes est uniformément convergente***

Soient (f_n) *et* (g_n) *deux suites de fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *qui convergent uniformément vers respectivement* $f:\mathrm{I}\rightarrow\mathbb{R}$ *et* $g:\mathrm{I}\rightarrow\mathbb{R}$*. Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*. Montrez alors que* $(\alpha f_n+\beta g_n)$ *converge uniformément sur* I *vers* $\alpha f+\beta g$*.*

Exercice 6.5 ★

Soient $a,b\in\mathbb{R}$*,* $a<b$ *et soit* (f_n) *une suite de fonctions* $f_n:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ *continues sur* $[a,b]$ *qui converge uniformément vers* $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$*. Montrer que* $(\inf_{[a,b]} f_n)$ *converge vers* $\inf_{[a,b]} f$*.*

Exercice 6.6 ★

Soit (f_n) *une suite de fonctions de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément vers* $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ *continue sur* $[a,b]$*. Soit* (x_n) *une suite de points de* $[a,b]$ *qui converge vers* $x\in[a,b]$*. Montrer que* $f_n(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$*.*

Exercice 6.7 ★

Soit $\sum f_n$ *une série de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$*. Montrer que la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément sur* I *vers la fonction nulle.*

Indication 6.0 : On pourra utiliser l'exercice **??**.

6.0.2 Étude de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 6.8 ★

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) *définies par*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\quad f_n(x)=\frac{\sin x\cos^n x}{1-\cos x}.$$

Exercice 6.9 ★

Montrer que la suite de fonctions (f_n) *de terme générale :*

$$f_n:\left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^n(1-x)\end{array}\right.$$

converge uniformément vers 0 *sur* $[0,1]$*.*

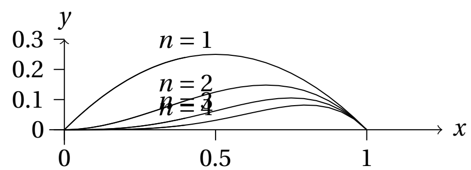

FIGURE 6.1 – graphes de f_1, f_2, f_3, f_4

Exercice 6.10 ★

Montrer que la suite de fonctions (f_n) de terme générale :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \sin(\pi x) \end{array} \right.$$

converge uniformément vers 0 *sur* $[0,1]$.
Indication 6.0 : On pourra utiliser l'exercice précédent.

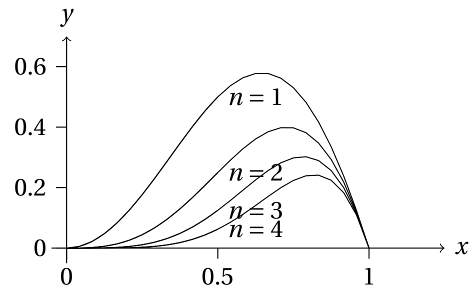

FIGURE 6.2 – graphes de f_1, f_2, f_3, f_4

Exercice 6.11 ★

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

Montrer que chaque f_n *est* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$, *que la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une certaine fonction* f, *mais que* f *n'est pas* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$.

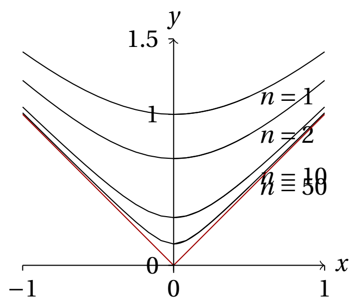

FIGURE 6.3 – graphes de f, f_1, f_2, f_{10}, f_{50}

Exercice 6.12 ★

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur l'intervalle* I *pour :*

1. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$.
2. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$.
3. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+nx)}{1+nx}$.
4. $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+1}{n+x^2}$.
5. $\mathrm{I} = [0,1]$ *et pour* $f_n(x) = \begin{cases} x\sqrt{n} & \text{si } x \in [0,1/n[\\ \dfrac{n(x-1)}{1-n\sqrt{n}} & \text{si } x \in [1/n,1] \end{cases}$.
6. $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ *et pour* $x \in \mathrm{I}$, $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

Exercice 6.13 ★

On considère la suite de fonctions (f_n) *avec*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^n \ln x & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Étudier la convergence uniforme de cette suite de fonctions sur $[0,1]$.

Exercice 6.14 ★

Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ *de la suite* (f_n) *avec*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n(1+x^n)} \end{array} \right. .$$

Exercice 6.15 ★ Oral CCP MP 2015

1. *Démontrer que, pour tout entier* n, *la fonction* $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$.
2. *On pose* $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6.16 ★ Oral CCP MP 2015

On pose : $\forall\, x \in]0;+\infty[$ *et* $\forall\, t \in]0;+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

1. *Démontrer que,* $\forall\, x \in]0,+\infty[$, *la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur* $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.
2. *Démontrer que,* $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. *Démontrer que* Γ *est de classe* C^1 *sur* $]0;+\infty[$ *et exprimer* $\Gamma'(x)$ *sous forme d'intégrale.*

Exercice 6.17 ★

Démontrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$:

1. *converge simplement sur $\mathbb{R}_+$;*
2. *que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, $a > 0$;*
3. *mais qu'elle n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.*

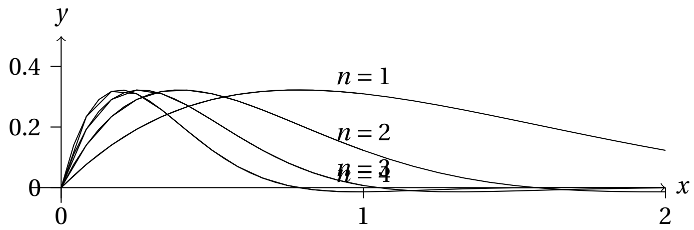

FIGURE 6.4 – graphes f_1, f_2, f_3, f_3

Exercice 6.18 ★

On considère la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x e^{-nx} \end{array} \right.$$

où $\alpha > 0$ est un réel fixé. Étudier la convergence simple et uniforme de cette suite.

Exercice 6.19 ★

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies par :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x^2} \end{array} \right.$$

Exercice 6.20 ★

Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$.

Exercice 6.21 ★

Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \exp(-x^n)$.

Exercice 6.22 ★ **Oral CCP MP**

1. *Soit X un ensemble, $\left(g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.*
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions $\left(g_n\right)$ vers la fonction g.
2. *On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.*
   (a) *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (b) *La suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?*
   (c) *Soit $a > 0$. La suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a; +\infty[$?*
   (d) *La suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?*

Exercice 6.23 ★ **Oral CCP MP**

1. *Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.*
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.*
   (a) *Étudier la convergence simple de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (b) *Étudier la convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.*

Exercice 6.24 ★ **Oral CCP MP**

1. *Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
2. *On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.*
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice 6.25 ★ **Oral CCP MP**

1. *Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.*
   On suppose que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. *On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*

   $$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} n^2 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

   Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.26 ★

Étudier suivant la valeur du réel a le mode de convergence de la suite de fonctions (f_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^a x e^{-nx} \end{array} \right. .$$

Exercice 6.27 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ n^2\left(\frac{1}{n} - x\right) & \text{si} \quad x \in \left]\frac{1}{2n}, 1/n\right[\\ 0 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \end{array} \right. .$$

1. *Prouver que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f à déterminer.*
2. *Comparer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Que peut-on en conclure ?*
3. *Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$.*

Exercice 6.28 ★ **X PC 2014**

Soit (P_n) une suite de polynômes de degré $\leqslant d$ convergent simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant d$. Montrer que la convergence est uniforme.

6.0.3 Intégration et dérivation d'une fonction limite d'une suite de fonctions

Exercice 6.29 ★

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^2 x^n (1-x) \end{array} \right.$$

1. *Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.*
2. *Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.*
3. *En déduire que la convergence n'est pas uniforme.*
4. *Calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ et retrouver le résultat.*

Exercice 6.30 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{I}_n = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}\,\mathrm{d}x$. Montrer que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6.31 ★ **Oral CCP MP**

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. *Démontrer que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.*
2. *Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x$.*

Exercice 6.32 ★

Pour $(n,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on définit $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

1. *Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer par contre que (f_n) converge uniformément sur $\mathrm{K}_a = [-a,a]$ pour tout $a > 0$.*
4. *En déduire $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\mathrm{d}x$.*

Exercice 6.33 ★ **X PC 2012**

Dans tout l'exercice on appellera

$$a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Déterminer la limite de la suite (a_n).*
2. *On pose, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{P}_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t}{\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t}.$$

Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\sup_{[\alpha,1]} |\mathrm{P}_n - 1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 6.34 ★ **X PC 2012**

Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f_n'(x)| \leqslant 1.$$

Montrer que f est continue.

6.0.4 Théorème de convergence dominée

Exercice 6.35 ★

Montrer que la suites (u_n) est convergente et calculer sa limite :

1. *(u_n) de terme général $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,\mathrm{d}x$.*
2. *(u_n) de terme général $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x}\,\mathrm{d}x$.*

Exercice 6.36 ★

Montrer que les suites de termes généraux donnés ci-dessous convergent et calculer leur limite.

1. $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^2}\,\mathrm{d}x$; 2. $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,\mathrm{d}x$; 3. $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6.37 ★

Montrer que les suites de termes généraux donnés ci-dessous convergent et calculer leur limite.

1. $u_n = \int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$; 2. $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\sin\frac{x}{n}}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$; 3. $u_n = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6.38 ★

Nature et limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6.39 ★

Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6.40 ★

Déterminer un équivalent de

$$u_n = \int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6.41 ★

Montrer que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 6.42 ★ **Intégrales de Wallis et de Gauss**

1. *Montrer que* $\forall n \geqslant 1$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

2. *Montrer que*

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

3. *On rappelle que grâce aux intégrales de Wallis,*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x\,\mathrm{d}x \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$$

Retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 6.43 ★ **Oral CCP MP**

1. *Démontrer que, pour tout entier n, la fonction* $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$.
2. *On pose* $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6.44 ★ **Oral CCP MP**

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. *Justifier que I_n est bien définie.*
2. *Étudier la monotonie de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.*
3. *La série* $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \mathrm{I}_n$ *est-elle convergente ?*

Exercice 6.45 ★ **Oral CCP MP**

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ *et* $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1. *Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$.*
2. *Soit $a \in]0;1[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;1]$?*
3. *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?*
4. *Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Exercice 6.46 ★★★

1. *Montrer que* $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t$ *converge.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t & \text{si} \quad t \in]0,n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

   (a) *Vérifier que la suite (f_n) converge simplement vers* $t \mapsto \frac{\ln t}{e^t}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) *Montrer que* $\mathrm{I} = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t\,\mathrm{d}t$.

3. *On admet que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. *Montrer que* $\mathrm{I} = -\gamma$.

   Indication 6.0 : On pourra effectuer le changement de variable $t = nu$ suivi d'une intégration par parties.

Exercice 6.47 ★

Soit $f : \mathrm{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,* $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$. *Prouver l'existence de ces intégrales.*

2. Montrer que $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(u/n)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.
3. Calculer $\lim \mathrm{I}_n$.

Exercice 6.48 ★ **Oral Mines-Ponts PC**

Pour $n \geqslant 3$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n + t^{-n}}$. Justifier l'existence de I_n et calculer la limite de (I_n).

Exercice 6.49 ★ **Oral X-ESPCI PC**

Limite et équivalent de $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.50 ★★★ **Type Mines**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Après avoir montré que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$, prouver que (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6.51 ★ **Minettes 2016**

Prouver que la limite suivante existe et la calculer : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{1+nt}\,\mathrm{d}t$.

6.0.5 Séries de fonctions

Exercice 6.52 ★

Étudier les modes de convergence des séries de fonctions de terme général :

1. $a_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$;
2. $b_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $c_n(x) = \frac{x}{n^3+x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
4. $d_n(x) = \frac{x^2}{n^3+x^2}$ sur $\mathbb{R}$;
5. $e_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.53 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{-nx^2}}{1+n^2} \end{array} \right. .$$

Étudier les modes de convergence de $\sum f_n$.

Exercice 6.54 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(nx)}{1+nx^8+x^{24}+n^2} \end{array} \right. .$$

Étudier les modes de convergence de $\sum f_n$.

Exercice 6.55 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & nx^2e^{-nx} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que $\sum f_n$ converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que la convergence est néanmoins normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 6.56 ★

Étudier les modes de convergence de la série de terme général

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{n^2+x^2} \end{array} \right. , n \geqslant 1.$$

Exercice 6.57 ★

1. *Montrer que la série de terme général*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \ln x \end{array} \right. , n \geqslant 0.$$

converge simplement sur $]0,1]$ et calculer sa somme sur $]0,1]$.

2. *Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1]$.*

Exercice 6.58 ★

1. *Étudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{-nx^2}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Même question avec $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(1+x)}{n^2x}$ sur $]0,+\infty[$.*

Exercice 6.59 ★

Étudier la nature de la convergence sur $[0,\pi]$ de la série de fonctions $\sum f_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \cos^n x \end{array} \right. .$$

Exercice 6.60 ★

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions de terme général donné par

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$$

pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.61 ★

Étudier les modes de convergence sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$

Exercice 6.62 ★

Étudier les modes de convergence sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{xn^2+n}$

Exercice 6.63 ★

Étudier les modes de convergence sur $]0,+\infty[$ *de la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geqslant 0} nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

Exercice 6.64 ★

Étudier les modes de convergence sur $[0,1]$ *de la série de fonctions* $\sum n^{\alpha} x^n (1-x)$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.65 ★

Étudier les modes de convergence sur $]0,+\infty[$ *de la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n+n^3x^2}$. *On montrera qu'il n'y a pas convergence uniforme en minorant le reste :* $\mathrm{R}_n(x) \geqslant \sum\limits_{k=n+1}^{2n} f_k(x)$.

Exercice 6.66 ★

Étudier les modes de convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{x^2+n}$ *sur* $[-1,0[$.

Exercice 6.67 ★ **Oral CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante positive de limite nulle.*

1. (a) *Démontrer que la série* $\sum (-1)^k u_k$ *est convergente.*

   Indication : on pourra considérer $(\mathrm{S}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) *Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série* $\sum (-1)^k u_k$.

2. (a) *Étudier la convergence simple sur* $\mathbb{R}$ *de la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (b) *Étudier la convergence uniforme sur* $[0,+\infty[$ *de la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

Exercice 6.68 ★

Soit une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *positives définies sur un intervalle* $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$. *On suppose que :*

— *La suite de fonctions* (u_n) *converge uniformément vers la fonction nulle.*

— *Pour tout* $x \in \mathrm{I}$, *la suite numérique* $u_n(x)$ *est décroissante.*

Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n u_n$ *converge uniformément sur* I.

Exercice 6.69 ★ **Oral CCP MP**

Soit X *une partie de* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1. *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions définies sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ *sur* X, *puis de la convergence uniforme de* $\sum f_n$ *sur* X.
2. *Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *normalement convergente sur* X *est uniformément convergente sur* X.
3. *La série de fonctions* $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ *est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre* 0 *et de rayon* $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+^*$?

Exercice 6.70 ★ **Oral CCP MP**

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ *et* $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* A *dans* $\mathbb{C}$.

1. *Démontrer l'implication :*

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur A}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } \left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0 sur A}\right)$$

2. *On pose :* $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ *converge simplement sur* $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ *converge-t-elle uniformément sur* $[0;+\infty[$ *? Justifier.*

Exercice 6.71 ★ **Oral CCP MP**

1. *Démontrer que la série* $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ *est absolument convergente pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
2. *On pose :* $\forall\, z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

   Démontrer que $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z) \times f\left(z'\right) = f\left(z+z'\right)$, *sans utiliser le fait que* $f(z) = e^z$.
3. *En déduire que :* $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) \neq 0$ *et* $\dfrac{1}{f(z)} = f(-z)$.

Exercice 6.72 ★ **Mines PC 2018**

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos^n(x)\sin(nx)}{n}$.

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0,\pi[$ *et calculer* $f'(x)$.
2. *En déduire* f.

Exercice 6.73 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :*

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n \sin(nx)}{n} \end{array} \right. .$$

1. *Montrer que* $\sum f_n$ *converge simplement sur* $\mathrm{I} =]-1,1[$. *On notera* f *la fonction somme.*
2. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I.
3. *Pour tout* $x \in \mathrm{I}$, *calculer* $f'(x)$ *en utilisant deux suites géométriques de raison* xe^{ix}.
4. *En déduire que* $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$.

6.0.6 Étude de fonctions définies par la somme d'une série

Exercice 6.74 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{n\left(1+nx^2\right)} \end{array} \right. .$$

Montrer que $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6.75 ★

Pour $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, *on pose* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. *Étudier la convergence normale de la série de fonctions* $\sum f_n$. *On note* S *sa somme.*
2. *Déterminer la limite de* S *en* 0.
3. *Montrer que* $\int_0^\pi \mathrm{S}(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
4. *Montrer que* S *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et exprimer sa dérivée.*

Exercice 6.76 ★

1. *Prouver que la série de fonctions* $\sum \dfrac{1}{n^2+2n+x^2}$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Calculer alors* $\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+2n+x^2}$.

Exercice 6.77 ★

1. *Justifier l'existence de*
$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
2. *Montrer que* f *est 1-périodique et qu'on a*
$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Exercice 6.78 ★

On note

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right).$$

Justifier et calculer $\int_0^1 \psi(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.79 ★

Pour tout $x > 0$, *on pose*

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$$

1. *Montrer que* S *est bien définie sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Montrer que* S *est continue.*
3. *Étudier la monotonie de* S.
4. *Déterminer la limite puis un équivalent de* S *en* $+\infty$.
5. *Donner un équivalent de* S *en* 0.

Exercice 6.80 ★

Pour tout $x \in \mathrm{I} =]-1,+\infty[$, *on pose*

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right).$$

1. *Montrer que* S *est définie et continue sur* I.
2. *Étudier la monotonie de* S.
3. *Calculer* $\mathrm{S}(x+1) - \mathrm{S}(x)$.
4. *Déterminer un équivalent de* S *en* -1^+.
5. *Établir :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{S}(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
6. *En déduire un équivalent de* $\mathrm{S}(x)$ *en* $+\infty$.

Exercice 6.81 ★★

Soit $a > 1$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n} \end{array} \right.$

1. *Étudier la convergence absolue de la série de fonctions* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$. *En déduire qu'il n'y a pas convergence normale.*
2. *Montrer la convergence simple de la série de fonctions.*
3. *Montrer la convergence uniforme.*
4. *Donner un développement asymptotique de* $\mathrm{S}(x)$ *lorsque* $x \to +\infty$ *à la précision* $\mathscr{O}(1/x^3)$.

Exercice 6.82 ★

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. *Montrer que* S *est bien définie.*

2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Préciser le sens de variation de S.
4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}.$$
5. Donner un équivalent de S en 0^+
6. Donner un équivalent de S en $+\infty$.
7. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$S(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6.83 ★

1. Déterminer l'ensemble de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 6.84 ★ **Centrale 2003**

On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x^2 n^2}$

1. Domaine de définition de f.
2. Continuité de f.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Déterminer un équivalent de f lorsque $x \to 0$.

Exercice 6.85 ★

On définit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f ;
2. Y a-t-il convergence normale sur D_f ?
3. Montrer que f est continue sur D_f ;
4. Déterminer la limite de f aux bornes de D_f.
5. Étudier la convergence uniforme sur $[1,+\infty[$.

Exercice 6.86 ★ **Centrale, Mines, CCP**

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

1. Domaine de définition de f ;
2. Montrer que $f \in \mathscr{C}^1([0,+\infty[)$ et calculer f'.
3. Calculer f.

Exercice 6.87 ★ **Classique, Important, fonction ζ de Riemann**

On définit la fonction ζ de Riemann par :
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Domaine de définition de ζ ?
2. Étudier les modes de convergence de cette série de fonctions.
3. Montrer que ζ est continue sur $]1,+\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.
4. En utilisant une comparaison avec une intégrale, trouver un équivalent simple de ζ lorsque $x \to 1^+$.
5. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et que ζ est décroissante.
6. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$

g. Tracer le graphe de ζ.

Exercice 6.88 ★ **Important, Fonction ζ alternée**

On définit la fonction
$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1. Domaine de définition de μ et modes de convergence.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \mu(x)$ et le signe de $\mu(x)$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que μ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
4. Trouver une relation simple entre ζ et μ.
5. Retrouver l'équivalent de ζ au voisinage de 1.

Exercice 6.89 ★

On définit la fonction ζ et la fonction μ de Riemann par :
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$
$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1. Montrer que ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer en utilisant une comparaison avec une intégrale que
$$\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$$
3. Montrer que $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
4. Montrer que μ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

5. *Calculer pour* $x>1$, $\zeta(x)+\mu(x)$ *et en déduire l'expression de* ζ *en fonction de* μ.
6. *Calculer* $\mu(1)$ *et retrouver l'équivalent de* ζ *en* 1.

Exercice 6.90 ★

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, *on pose* $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1. *Prouver la continuité de la somme* $\mathrm{S}=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Montrer l'intégrabilité de* S *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et exprimer son intégrale sous forme de somme de série.*
3. *Montrer que* S *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.
4. *Calculer* S' *et en déduire l'expression de* S.

Exercice 6.91 ★

Pour $(n,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}^*$, *on pose* $f_n(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$. *On se propose d'établir le tableau de variations de la somme* S *de la série de fonctions* $\sum f_n$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* S *;*
2. *Quelle est la parité de* S *? En déduire qu'on peut restreindre l'étude à* $\mathbb{R}_+^*$.
3. *Prouver que* S *est continue sur son domaine de définition.*
4. *Sans utiliser le théorème de dérivation terme à terme, donner les variations de* S.
5. *Déterminer la limite de* S *en* 0^+.
6. *Déterminer la limite de* S *en* $+\infty$.
7. *Dresser le tableau de variations de* S.

Exercice 6.92 ★ Oral CCP MP

On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. *Étudier la convergence simple de cette série.*
   On note D *l'ensemble des* x *où cette série converge et* $\mathrm{S}(x)$ *la somme de cette série pour* $x\in\mathrm{D}$.
2. (a) *Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur* D.
   (b) *La fonction* S *est-elle continue sur* D *?*

Exercice 6.93 ★ Oral CCP MP

On considère la série de fonctions de terme général u_n *définie par :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\quad u_n(x)=\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\,.$$

On pose, lorsque la série converge, $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right]$.

1. *Démontrer que* S *est dérivable sur* $[0,1]$.
2. *Calculez* $\mathrm{S}'(1)$.

Exercice 6.94 ★

1. *Déterminer les domaines de convergence simple et normale de la série de fonction* $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{e^{-nx}}{n}$.
2. *Montrer que la fonction somme de cette série de fonctions est* $\mathscr{C}^1$ *sur son domaine de définition.*
3. *Exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles et en déduire l'expression explicite de la somme en admettant que l'éventuelle constante d'intégration est nulle.*

Exercice 6.95 ★ Oral CCP PC

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, *on pose :*

$$u_n(x)=\frac{x-1}{(n+1)(n+x)}.$$

1. *Montrer que* $\sum u_n$ *converge simplement sur* $\mathrm{I}=]0,+\infty[$. *On appellera* S *sa somme.*
2. (a) *Montrer que pour* $0<a<b$, *la série* $\sum u_n$ *converge normalement sur* $[a,b]$.
   (b) *En déduire que* S *est continue sur* I.
3. *Montrer que* S *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* I *et que :*

$$\forall x\in\mathrm{I},\quad \mathrm{S}'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.$$

4. (a) *Montrer que :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p}=\frac{p-1}{(n+1)\big(n+p\big)}.$$

   (b) *En déduire que* $\mathrm{S}(p)=\sum_{k=1}^{p-1}\dfrac{1}{k}$.
   (c) *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{S}(x)$.

Exercice 6.96 ★ Oral CCP PSI

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* f *puis montrer la continuité de* f *sur ce domaine.*
2. *Montrer que* f *admet une limite en* $+\infty$ *et déterminer cette limite.*
3. *Déterminer un équivalent simple de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* 0^+.

Exercice 6.97 ★ Oral Mines-Pont PSI

On considère la fonction f donnée par :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

1. *Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.*
2. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.*
3. *Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.*
4. *Donner l'allure de la courbe représentative de f.*

Exercice 6.98 ★ Oral Centrale PSI

Soient $a>0$ et $f: x\mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right)$.

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ? de classe $\mathscr{C}^1$?*
3. *Déterminer la limite de f' en 0.*

Exercice 6.99 ★ Mines-Ponts PC 2013

Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telles que

$$\forall x\in[0,1],\qquad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 6.100 ★ Mines-Ponts PC 2013

Soient $a>0$ et

$$f: x\longmapsto\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{a}{n^2x^2}\right).$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f.*
2. *Déterminer un équivalent de f en 0_+.*
3. *Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.*

Exercice 6.101 ★ Mines-Ponts PC 2013

Soit

$$f: x\longmapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

Déterminer le domaine de définition de f. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathscr{C}^1$? Déterminer la limite de f' en 0_+.

Exercice 6.102 ★ X PC 2012

Soit $k\in\mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de la suite définie par

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6.103 ★★★ X PC 2012

On considère la fonction

$$\mathrm{S}:\ x\longmapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}.$$

1. *Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$*
2. *Déterminer la limite de S en $+\infty$.*
3. *Montrer que*

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+x)(2n+1+x)}.$$

4. *En déduire un équivalent de S au voisinage de $+\infty$.*

Exercice 6.104 ★★ CCP PC 2014

On considère la fonction

$$\mathrm{S}:\ x\longmapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

1. *Montrer que $\mathrm{S}(1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$.*
2. *Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer la limite de S en $+\infty$.*
3. *Montrer que*

$$\forall x>0,\qquad x\mathrm{S}(x)-\mathrm{S}(x+1)=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

4. *Trouver un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ en 0_+.*
5. *Trouver les réels a,b,c tels que*

$$\mathrm{S}(x)=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

au voisinage de $+\infty$.

Exercice 6.105 ★★ Type Mines

Établir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\pi\sqrt{x}.$$

Exercice 6.106 ★ CCP PC 2009

1. *Soit $x>0$. Étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+x}$.*
2. *Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction*

$$f:\ x\longmapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}.$$

3. *Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.*
4. *Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0_+.*

5. Montrer que f est décroissante et donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 6.107 ★ **Mines-Ponts PC 2007**

Montrer que

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 6.108 ★ **Centrale PC 2002**

Définition, continuité, calcul de la somme de

$$f : x \longmapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}.$$

Exercice 6.109 ★ **Centrale PC 2008**

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n : x \longmapsto nx\mathrm{e}^{-nx^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la série de fonctions de terme général f_n.
2. A-t-on la convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$?
3. On note $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Calculer $\mathrm{S}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{D}$.
4. La fonction S est-elle continue ?

Exercice 6.110 ★ **Centrale PC 2004**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \sin(3^n x).$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6.111 ★ **CCP PC 2006**

Pour $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = \frac{1}{n+n^2 x}.$$

1. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. Nous noterons S sa somme.
2. Étudier la continuité et les variations de S.
3. Calculer $\mathrm{S}(\frac{1}{k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 6.112 ★ **X PC 2009**

Soit

$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est lipschitzienne.
3. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 6.113 ★ **Mines-Ponts PC 2009**

On pose

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\sqrt{n}}.$$

Donner un équivalent de f lorsque t tend vers 0_+.

Exercice 6.114 ★ **CCP PC 2005**

On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Calculer f'' puis exprimer f' sans le symbole somme.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
4. Montrer que
$$f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6.115 ★ **Mines 2016**

Soit $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner le tableau de variation de S.

6.0.7 Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Exercice 6.116 ★

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

Exercice 6.117 ★

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Exercice 6.118 ★

En considérant $f_n : x \mapsto x^n$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2.$$

Exercice 6.119 ★ **Fonction exponentielle complexe**

On considère la série de fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

1. *Montrer qu'elle est normalement convergente sur les disques* $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$, $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_+^*$, *de* $\mathbb{C}$. *Sa somme est, par définition, la fonction exponentielle complexe notée* $\exp$.
2. *Montrer que :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \exp(t)\,\mathrm{d}t = \exp(t) - 1$.

Exercice 6.120 ★ **Oral CCP MP**

1. *Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.*
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\displaystyle\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. *Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.*
3. *Démontrer que* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 6.121 ★

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 6.122 ★ **Constante de Catalan**

1. *Montrer que*
$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
2. *En déduire que*
$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

   Ce nombre, appelé constante de Catalan *vaut approximativement* 0.916.

Exercice 6.123 ★

1. *Montrer que*
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$
2. *En déduire que*
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$
3. *Calculer cette somme sachant que* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 6.124 ★

Montrer que

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

Exercice 6.125 ★

On définit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x+n}} \text{ et } \mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(1+e^{-t})}\,\mathrm{d}t$$

1. *Déterminer le domaine de définition de f et* F .
2. *Étudier la continuité de f et* F.
3. *Trouver* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et un équivalent de f au voisinage de* 0.
4. *Montrer que* $\mathrm{F} = f$.

Exercice 6.126 ★

On note

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$$

Exprimer $\mathrm{F}(x)$ *comme la somme d'une série de fonctions. Comment trouver une valeur approchée de* $\mathrm{F}(x)$ *à* 10^{-1} *près ?*

Exercice 6.127 ★

Le but de cet exercice est de prouver l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

1. *Justifier l'existence des deux membres de l'égalité.*
2. *Montrer que* $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}$.
3. *A l'aide d'un changement de variable, calculer* $\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{-nt}\,\mathrm{d}t$.
4. *Conclure.*

Indication 6.0 : On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 6.128 ★

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}.$$

Exercice 6.129 ★

Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 6.130 ★ *Oral CCP PC*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$a_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Calculer a_0 et a_1.*
2. (a) *Montrer que (a_n) est décroissante.*
   (b) *Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+4}a_n$.*
   (c) *En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}a_{n+1}$.*
3. (a) *Montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_na_{n-1}$ est constante.*
   (b) *En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$ et la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}a_n$.*
4. *Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\int_0^1\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\mathrm{d}t$ puis calculer cette somme.*

Exercice 6.131 ★ *Oral Mines-Pont PC*

On considère la fonction

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}.$$

1. *Préciser son domaine de définition.*
2. *Donner une relation entre $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$.*
3. *Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.*

Exercice 6.132 ★ *Oral Mines-Pont PSI*

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$, on considère la fonction

$$f_n:\left\{\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n}{x+n}\end{array}\right..$$

1. *Montrer que :*
$$\int_0^1\left(\sum_{n=2}^{+\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right).$$
2. *Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $]-1,+\infty[$.*

Exercice 6.133 ★★ *Type Mines*

Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos\theta)\,\mathrm{ch}(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6.134 ★★ *CCP PC 2014*

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$u_n=\int_0^1\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$

On pourra librement utiliser que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

1. *Justifier que la série ci-dessus converge.*
2. *Rappeler le développement en série entière de $\ln(1+t)$.*
3. *Grâce à un théorème d'intégration terme à terme, montrer que*
$$u_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(kn+1)}.$$
4. *On considère la fonction*
$$f:x\longmapsto\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+x)}.$$
   (a) *Démontrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.*
   (b) *Exprimer u_n à l'aide de la fonction f. En déduire que $u_n\sim\frac{\pi^2}{12n}$.*
5. *Montrer qu'il existe une constante ζ, que l'on exprimera comme somme d'une série convergente, vérifiant*
$$u_n=\frac{\pi^2}{12n}+\frac{\zeta}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 6.135 ★★★ *Type X*

Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\beta>0,\gamma>0$ et $\alpha+1<\beta\gamma$.

1. *Étudier l'existence de la fonction :*
$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^\alpha\mathrm{e}^{-n^\beta x^{\frac{1}{\gamma}}}\end{array}\right..$$
2. *Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :*
$$\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\gamma\Gamma(\gamma)\zeta\big(\beta\gamma-\alpha\big)$$
   où :
   — *Γ est la fonction Gamma d'Euler définie pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$;*
   — *ζ est la fonction zeta de Riemann définie pour tout $s\in]1,+\infty[$ par $\zeta(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.*

6.1 Suites et séries de fonctions

sRMS 2015 186 ENS PC

6.1.1 Questions théoriques

PSI

Exercice 6.136 ★ ***Centrale PSI 2010***

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n : x\mapsto \frac{(-1)^n f(x)}{\sqrt{1+n^2 f(x)^2}}$.

1. *Justifier l'existence de $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ?*
2. *Montrer que si f est continue, S l'est aussi. Réciproque ?*

sRMS 2015 846 Centrale PSI

PSI

Exercice 6.137 ★ ***TPE PSI 2008***

Soient $a\in\mathbb{R}$ et (f_n) la suite de fonctions définies par $f_0\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la série de terme général f_n converge et calculer sa somme.

PC

Exercice 6.138 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Mots-clés : limite uniforme d'une suite de fonctions lipschitziennes

Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et que $\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad |f_n'(x)|\leqslant 1$. Montrer que f est continue.

PSI

Exercice 6.139 ★ ***Mines Ponts PSI 2013***

Mots-clés : extrema des fonctions d'une suite uniformément convergente

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ qui converge uniformément. Que dire des suites $(\max_{[a,b]} f_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\min_{[a,b]} f_n)_{n\geqslant 0}$?

PC

Exercice 6.140 ★ ***Centrale PC 2013***

Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n : t\in[0,1]\mapsto t^n f(t)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la série de terme général u_n converge normalement. L'énoncé est vraisemblablement erroné.

PSI

Exercice 6.141 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Mots-clés : convergence uniforme d'une suite de polynômes de degrés bornés

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. Soit $(\mathrm{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ convergeant uniformément vers une fonction f. Démontrer que f est polynomiale.

PC

Exercice 6.142 ★ ***Centrale PC 2014***

sRMS 2015 1043 Mines d'Al\'es PC

Mots-clés : monôme trigonométrique

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles bornées, $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ avec $c<d$. On suppose que $\forall x\in[c,d],\quad a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\to 0$ quand $n\to+\infty$.

sRMS 2013 121 ENS PC

1. *Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $\varphi_n\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\quad a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\cos(nx+\varphi_n)$.*
2. *Calculer $\mathrm{I}_n=\int_c^d (a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))^2\mathrm{d}x$. En déduire que, pour n assez grand, $\mathrm{I}_n\geqslant \frac{(d-c)(a_n^2+b_n^2)}{4}$.*
3. *Montrer que $a_n\to 0$ et $b_n\to 0$ quand $n\to+\infty$.*

Exercice 6.143 ★ ***ENS PC 2015***

Mots-clés : limite uniforme d'une suite de fonctions hölderiennes

Soit E l'ensemble des $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et telles que $\int_0^1 f'^2=1$ (l'intégrale de -1 à 1 a été remplacée par une intégrale de 0 à 1).

1. *Si f appartient à E, montrer que f est $(1/2)$-höldérienne de rapport 1, c'est-à-dire que $\forall(x,y)\in[0,1],\quad |f(x)-f(y)|\leqslant\sqrt{|x-y|}$.*
2. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de E convergeant simplement vers g. Montrer que la convergence est uniforme.*

Exercice 6.144 ★ ***Centrale PSI 2015***

Mots-clés : fonctions quasi additives

1. *Déterminer les $h\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad h(x+y)=h(x)+h(y)$.*
2. *Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : $\exists\mathrm{M}>0$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|f(x+y)-f(x)-f(y)|\leqslant\mathrm{M}$. On pose $g_n : x\mapsto f(2^n x)/2^n$. Étudier la convergence de la série de terme général $g_{n+1}-g_n$. En déduire que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une application linéaire h. Que peut-on en déduire pour f ?*

6.1.2 Suites et séries de fonctions particulières

Exercice 6.145 ★ ***CCP PC 2012***

Mots-clés : fonction ψ, fonction digamma, caractérisation de la dérivée logarithmique de Γ

Soit E l'ensemble des $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x+1)-f(x)=\frac{1}{x}$, $f(1)=0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. *On pose $u_n : x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$. Monter que $u : x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $u\in\mathrm{E}$.*
2. *Soient f et g deux fonctions de E, et $\delta=f-g$. Montrer que δ est 1–périodique. Quelle est la limite de δ en $+\infty$?*
3. *En déduire que $f=g$. Que vaut E ?*

Exercice 6.146 ★ ***RMS 2015 1043 Mines d'Alès PC***

Mots-clés : fonction ψ, dérivée logarithmique de Γ

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-^*$, soit $f_n(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$. Étudier la convergence de la série f_n. Montrer que la somme est $\mathscr{C}^1$ et calculer sa valeur en 1.

Exercice 6.147 ★ ***ENS PC 2013***

Mots-clés : approximations rationnelles de la tangente hyperbolique

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0 : x\mapsto \operatorname{sh} x$ et $\forall n\in\mathbb{N},\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad f_{n+1}(x)=-2\int_0^x t f_n(t)\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que les f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.*
2. *Expliciter f_1.*
3. *Montrer que, pour tout $x\geqslant 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)|\leqslant\frac{x^{2n}\operatorname{sh} x}{n!}$.*

4. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe P_n et Q_n dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\mathrm{Q}_n(x)\operatorname{sh}x-\mathrm{P}_n(x)\operatorname{ch}x$.
5. Montrer que $\left(\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}\right)$ converge simplement vers la fonction th.

sRMS 2009 396 X ESPCI PC

Exercice 6.148 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

sRMS 2012 346 X ESPCI PC

Soient $f_0\colon t\in\mathbb{R}_+\mapsto 0$ et, pour $n\in\mathbb{N},\quad f_{n+1}\colon t\in\mathbb{R}_+\mapsto\sqrt{t+f_n(t)}$.

1. Soit $t\in\mathbb{R}_+$. Déterminer la limite $\ell(t)$ de $(f_n(t))_{n\geqslant 0}$.
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
3. Si $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}_+^*$, montrer que $|f_{n+1}(t)-\ell(t)|\leqslant\frac{|f_n(t)-\ell(t)|}{f_{n+1}^2(t)}$. Que peut-on en déduire sur (f_n) ?
Le dénominateur $2f_{n+1}(t)$ a été corrigé en $f_{n+1}^2(t)$.

sRMS 2015 376 X ENS PSI

Exercice 6.149 ★ **CCP PSI 2013**

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$, $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0=f$, et, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[a,b]$, $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a,b]$ et calculer sa somme.

Exercice 6.150 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soient $f_0\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer la convergence normale sur tout segment de $\mathrm{F}\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$. Calculer F.

Exercice 6.151 ★ **RMS 2014 1266 Écoles des Mines PSI**

sRMS 2009 1050 Centrale PC

Soit $u_n(t)=(-1)^n\frac{t^n}{\sqrt{1+n^2}}$.

1. Domaine de définition de $f\colon t\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t)$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $[0,1[$.
3. Équivalent de $v_n=\int_0^1|u_n|$.
4. Nature de $\sum v_n$.
5. Écrire $\int_0^1 f$ comme somme d'une série numérique.

sRMS 2009 1049 Centrale PC

Exercice 6.152 ★ **X ENS PSI 2015**

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ telle que $u_n(x)=\left(1-\frac{x}{n^2}\right)^n$ si $x\leqslant n^2$ et $u_n(x)=0$ si $x\geqslant n^2$.

sRMS 2015 746 Mines Ponts PC

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction que l'on déterminera. A-t-on convergence uniforme ? Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $f(x)\to f(0)$ quand $x\to+\infty$.

sRMS 2011 1089 CCP PSI

2. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général a_n converge et a pour somme 1.

sRMS 2011 1141 CCP PC

3. Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Montrer que la série de terme général $a_nf(u_n(x))$ converge.
4. On suppose que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nf(u_n(x))$. Montrer que f est constante.

6.1.3 Le terme général comporte une fonction rationnelle

Exercice 6.153 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit $\mathrm{S}\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$. Déterminer le domaine de définition de S. Étudier la continuité de S.

Exercice 6.154 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : fonction $x\mapsto\pi\cot\mathrm{an}(\pi x)$

Étudier la convergence de la suite $f_n\colon x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\mapsto\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{x+k}$.

Exercice 6.155 ★ **X ENS PSI 2015**

Mots-clés : développement eulérien de la cotangente, fonction $x\mapsto\pi\cot\mathrm{an}(\pi x)$, méthode de Herglotz

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit $g_n\colon x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\mapsto\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}+\frac{1}{x-k}$.

1. Montrer que $g(x)=\lim_{n\to+\infty}g_n(x)$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et que g est dérivable.
2. Montrer que g est 1-périodique et impaire.
3. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\quad g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)=2g(x)$.
4. Soit $f\colon x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\mapsto\pi\cot\mathrm{an}(\pi x)$. Montrer que f est 1-périodique, impaire et vérifie pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\quad f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=2f(x)$.
5. Montrer que la fonction $h=f-g$ possède un prolongement par continuité $\overline{h}$ sur $\mathbb{R}$ et que $\overline{h}$ est identiquement nul.

Exercice 6.156 ★ **Centrale PC 2009**

On pose $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0}f_n$.
2. Sur quels intervalles y a-t-il convergence normale ?

Exercice 6.157 ★ **Centrale PC 2009**

On pose $f_n(x)=\frac{x}{n(1+n^2x^2)}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1}f_n$
2. La somme S est-elle continue ?
3. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}(x)$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 6.158 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(1+n^2x)}$. Déterminer le domaine de définition de f, la limite de f en $+\infty$ et un équivalent de f en 0.

Exercice 6.159 ★ **CCP PSI 2011**

Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $f_n\colon t\mapsto\frac{1}{1+(nt)^2}$. Montrer que la somme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Exercice 6.160 ★ **CCP PC 2011**

Ensemble de définition et continuité de $x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^3x^2}$.

Exercice 6.161 ★ **Mines Ponts PC 2013 , Centrale PC 2013 , CCP PSI 2015 , Mines Ponts PC 2015**

Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+n^2x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

sRMS 2013 385 X ESPCI PC

Exercice 6.162 ★ CCP PC 2015

Pour $x>0$, soient $\mathrm{I}(x)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x}$ et $f(x)=\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n+n^2x}$.

sRMS 2014 415 X ESPCI PC

1. *Justifier l'existence de f et de I.*
2. *On admet que $\mathrm{I}(x)=\ln(1+\frac{1}{x})$ et que $\mathrm{I}(x)\leqslant f(x)\leqslant \mathrm{I}(x)+\frac{1}{1+x}$. Préciser $\lim_{0^+} f$ et $\lim_{+\infty} f$. Montrer que $f(x)\sim_{x\to0^+}-\ln(x)$.*

sRMS 2014 1255 \'Ecoles des Mines PSI

3. *Étudier la croissance de f* monotonie *est plus pertinent que* croissance.
4. *Montrer que f est dérivable et retrouver la question précédente.*
5. *Montrer les points admis en (b).*
6. *Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $f(\frac{1}{p})$ est rationnel.*

sRMS 2014 1263 CCP PSI

Exercice 6.163 ★ RMS 2014 1265 Écoles des Mines PSI

Soit $u_n(x)=\frac{1}{n(nx^2+1)}$.

1. *Trouver le domaine de définition de $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.*
2. *Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$, et déterminer $\lim f$ en 0 et en $+\infty$.*
3. *Montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.*

Exercice 6.164 ★ RMS 2014 1260 Écoles des Mines PSI

sRMS 2015 845 Centrale PSI

Pour $x>0$, on pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!(x+n)}$.

1. *Justifier l'existence de f.*
2. *Trouver un équivalent de f en $+\infty$.*
3. *Trouver un polynôme P tel que $f(x)-\frac{\mathrm{P}(x)}{x^2}=o(\frac{1}{x^2})$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

Exercice 6.165 ★ CCP PC 2011 , Mines Ponts PC 2015

Montrer que $\mathrm{S}: x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$ est définie sur $]0,+\infty[$. L'application S est-elle continue ? De classe $\mathscr{C}^1$?

sRMS 2015 1046 CCP PC

Exercice 6.166 ★ Mines Ponts PC 2014

Soit $f: x\mapsto\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

sRMS 2012 347 X ESPCI PC

1. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.*
2. *Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro.*

sRMS 2007 551 Mines Ponts PSI

Exercice 6.167 ★ Mines Ponts PSI 2013

Domaine de définition de $f: x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2+n^2}$, continuité, limites aux bornes.

Exercice 6.168 ★ Mines Ponts PC 2013

sRMS 2009 1051 Centrale PC

Soit $f: x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$. Préciser le domaine de définition de f. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(\frac{1}{x})$; exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 6.169 ★ X ESPCI PC 2013

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\int_0^1(1-t^2)^n\mathrm{d}t$.

1. *Déterminer la limite de (u_n).*
2. *Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n: x\in[0,1[\mapsto\frac{1}{u_n}\int_0^x(1-t^2)^n\mathrm{d}t$. Étudier la convergence de (f_n).*

Exercice 6.170 ★ X ESPCI PC 2014

1. *Si z est une racine de l'unité, montrer $(*)$: $\frac{1}{z}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}z^n(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^n)$.*
2. *Pour quels complexes z l'égalité $(*)$ est-elle vérifiée ?*

Exercice 6.171 ★ RMS 2014 1255 Écoles des Mines PSI

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n: x\in[0,1]\mapsto\frac{2n^2x^2-nx+1}{2n^2x+1}\sin^2(\frac{\pi}{x})$ si $x\in]\frac{1}{n},1]$, et $f_n(x)=0$ si $x\in[0,\frac{1}{n}]$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n).

Exercice 6.172 ★ CCP PSI 2014

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n+x}$.

1. *Déterminer suivant les valeurs de a le domaine de définition de S.*
2. *Soit a tel que $|a|<1$.*
   (a) *Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
   (b) *Déterminer une relation entre $\mathrm{S}(x+1)$ et $\mathrm{S}(x)$.*
   (c) *Déterminer un équivalent de S en 0^+.*
   (d) *Déterminer la limite de S en $+\infty$.*

Exercice 6.173 ★ Centrale PSI 2015

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $f_n: x\in\mathbb{R}_+\mapsto\sum_{k=1}^n\frac{x^k}{k}-\int_1^n\frac{x^t}{t}\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.*

6.1.4 Le terme général comporte une exponentielle ou un logarithme

Exercice 6.174 ★ CCP PC 2015

Mots-clés : fonction ζ de Riemann

Calculer $\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^{x+1}}$ et $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x}{n^{x+1}}$.

Exercice 6.175 ★ X ESPCI PC 2012

Étudier $f: x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ne^{inx}}{(1+n^2)(1+\ln n)}$.

Exercice 6.176 ★ Mines Ponts PSI 2007

On pose $f_n(x)=\frac{e^{i2^nx}}{n^n}$. Montrer que $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que sa série de Taylor en zéro est de rayon de convergence nul.

Exercice 6.177 ★ Centrale PC 2009

On pose $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition D de la somme de la série de terme général f_n.*

2. Calculer la somme $\mathrm{S}: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
3. La somme S est-elle continue sur D ?

Exercice 6.178 ★ CCP PSI 2011

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: x \mapsto nxe^{-x^2\ln(n)}$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6.179 ★ CCP PSI 2011

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, soit $u_n: x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la série de fonctions de terme général u_n. Pour $x \in \mathrm{D}$, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur D.
3. Si $n \geqslant 2$, soit $\mathrm{R}_n: x \in \mathrm{D} \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. Montrer que $\forall x \in \mathrm{D}, \quad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln n}$.

4. La fonction S est-elle continue sur D ? Est-elle intégrable sur D ?

Exercice 6.180 ★ CCP PC 2006 , CCP PC 2011

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, $u_n(z) = \frac{e^{nz}}{n^2}$.

1. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$, calculer $|u_n(z)|$. Montrer que la série de terme général $|u_n(z)|$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$.
   Si $x \in \mathbb{R}_-$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_-$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

4. Calculer f''. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = f(0) + \int_x^0 \ln(1-e^t)\mathrm{d}t$. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

Exercice 6.181 ★ Centrale PC 2013

Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{nx}}}{\sqrt{n+1}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Déterminer la limite de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 6.182 ★ CCP PSI 2014

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, puis la continuité de f sur ce domaine.

2. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 6.183 ★ Centrale PC 2015

Soit $g: t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de g. Étudier les variations de g et préciser le plus grand intervalle sur lequel g est de classe $\mathscr{C}^1$.
2. Déterminer la limite, puis un équivalent de g en $+\infty$.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} e^{-t\sqrt{u}}\mathrm{d}u \leqslant g(t) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t\sqrt{u}}\mathrm{d}u$. En déduire la limite, puis un équivalent de g en 0^+ .

Exercice 6.184 ★ X ESPCI PC 2014

Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 6.185 ★ RMS 2015 1045 Mines d'Alès PC

Soit $f: x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{-nx}}{n^2+1}$. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la monotonie, la continuité, la dérivabilité et les limites aux bornes.

Exercice 6.186 ★ ENSAM PSI 2014

Soit $f: t \mapsto e^{-t^2}$. Nature de $\sum f(nt)$? Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nt) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2t}$ quand t tend vers 0^+.

Exercice 6.187 ★ Centrale PC 2014

1. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(\pi t)\mathrm{d}t$.
2. Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\sin(n\pi x)$. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f. Déterminer un équivalent de f en 0^+.
3. Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\mathrm{d}t$.
4. Soit $g: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}\ln(nx)$. Déterminer le domaine de définition de g. Déterminer un équivalent de g en 0^+.

Exercice 6.188 ★ CCP PSI 2014

Pour $n \geqslant 1$ et $x \neq 0$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-(n+1)x}}{n}$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme, normale de $\sum u_n$.
2. On pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et $\mathrm{F}(x) = e^x\mathrm{S}(x)$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.
3. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)$. En déduire $\mathrm{F}(x)$, puis $\mathrm{S}(x)$ pour $x > 0$, puis $\mathrm{S}(0)$.
4. On note U la primitive de S s'annulant en 0. Déterminer U.
5. Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.189 ★ RMS 2015 1044 Mines d'Alès PC

Étudier $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$. Est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$? Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 6.190 ★ CCP PSI 2014

Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{e^{-2nx}+e^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.191 ★ Mines Ponts PSI 2015

Soit $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(x)e^{-nx}$. A-t-on convergence simple sur $\mathbb{R}_+$? Uniforme ? Quelle est la somme de la série ?

Exercice 6.192 ★ Mines Ponts PSI 2015

Soit, pour $n \geqslant 2$, $u_n: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer, si $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}_+$, que $0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \leqslant \frac{xe^x}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$. En déduire la convergence uniforme de la série.

Supposer $x > 0$, et remplacer le majorant par $\frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ (la fonction $x \mapsto \frac{xe^x}{1-e^{-x}}$ n'est pas bornée).

Exercice 6.193 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f et un équivalent en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de f et un équivalent en 0^+.

Exercice 6.194 ★ **Mines Ponts PC 2009, Mines Ponts PC 2013**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln(1+\frac{x}{n})$. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.

Exercice 6.195 ★ **CCP PSI 2011**

Soit $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. L'application S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.196 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{a}{n^2x^2})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 6.197 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\frac{x}{n^2})$. Montrer que $f(x) \sim \pi\sqrt{x}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 6.198 ★ **CCP PSI 2014**

On pose $h_n(x) = x^{2n+1}\ln x$. Étudier la convergence simple et uniforme de (h_n).

6.1.5 Le terme général comporte une fonction trigonométrique

Exercice 6.199 ★ **ENSAM PSI 2011**

Soient $h \in \mathscr{C}^0([0,\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in [0,\frac{\pi}{2}] \mapsto h(x)(\sin x)^n$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.200 ★ **Petites Mines PSI 2010**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arccos(\cos(nx))}{n!}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Calculer $f(\pi)$.
2. Montrer que f est continue sur D. Pour quels $x \in \mathrm{D}$ le théorème de dérivation terme à terme s'applique-t-il ?

Exercice 6.201 ★ **TPE PSI 2010**

Étudier la convergence et la continuité de $x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(x)^2}{\mathrm{ch}(nx)}$.

Exercice 6.202 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \arctan(\frac{n+x}{1+nx})$. Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite (f_n).

Exercice 6.203 ★ **CCP PSI 2013**

1. Soit $x > 0$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$ converge.
2. Montrer que $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$ est continue.
3. Montrer que $x \mapsto x^2 f(x)$ se prolonge par continuité en 0.

Exercice 6.204 ★ **CCP PSI 2013**

Soient $a \in]-1,1[$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$. Montrer que f est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.205 ★ **TPE PSI 2014**

Soient $f : x \mapsto e^{\cos x}\cos(\sin x)$ et $g : x \mapsto e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n!}$.
2. Calculer $\mathrm{I}_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin(t)+nt)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin(t)-nt)\mathrm{d}t$.

Exercice 6.206 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. La fonction f est-elle continue ? De classe $\mathscr{C}^1$?
2. Déterminer la limite de f' en 0^+.

6.1.6 Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite ou d'une série de fonctions

Exercice 6.207 ★ **ENS PC 2014**

Mots-clés : formule de Stirling

Soit $f \in \mathscr{C}^0(]0,1[,\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f^p est intégrable sur $]0,1[$ et qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $(\int_0^1 |f|^p)^{1/p} \leqslant \mathrm{C}\sqrt{p}$. Montrer que, pour $\alpha > 0$ assez petit, la fonction $\exp(\alpha f^2)$ est intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 6.208 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : théorème de convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers 0 et que la suite $(\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t)$ est bornée. Est-il vrai que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$?

6.1.7 Développements asymptotiques pour une fonction générique

Exercice 6.209 ★ **ENS PC 2013**

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}^+)$. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge. On pose $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$.

2. Montrer que $\mathrm{S} = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\mathrm{d}x$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(c_{0,n}, c_{1,n}, \dots, c_{n-1,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $2^n - (1-\mathrm{X})^n = (1+\mathrm{X})(c_{0,n} + c_{1,n}\mathrm{X} + \cdots + c_{n-1,n}\mathrm{X}^{n-1})$.
4. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n} a_k$. Montrer que $|\mathrm{S} - \mathrm{S}_n| \leqslant \frac{\mathrm{S}}{2^n}$.

Exercice 6.210 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}_+)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = n\int_0^1 f(t)^n \mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (I_n) dans chacun des cas suivants : (i) $\sup f < 1$; (ii) $\sup f > 1$; (iii) $\sup f = 1$ et $f' < 0$.

Exercice 6.211 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(x) \geqslant x$. Soit $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{n}{1+n^2 f^2(x)}\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de (I_n).

Exercice 6.212 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \int_1^{1+1/n} f(t^n)\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que $a_n \to 0$.*
2. *Déterminer la limite de na_n quand n tend vers $+\infty$.*

Exercice 6.213 ★ **ENSAM PSI 2008**

Mots-clés : vitesse de convergence dans le lemme de Lebesgue

Soient $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathrm{I}_n = n\int_0^1 f(t)g(nt)\mathrm{d}t$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n$.

Exercice 6.214 ★ **TPE PSI 2010**

Soient $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et, pour n entier naturel, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (I_n).

Exercice 6.215 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général $n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 6.216 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \int_0^{+\infty} f^n$. On pose $\alpha = \sup_{\mathbb{R}_+} f$.

1. *Montrer que la suite (u_n) est bien définie.*
2. *Si $\alpha < 1$, montrer que la série de terme général u_n est convergente.*
3. *Si $\alpha > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.*

6.1.8 Développements asymptotiques pour une fonction particulière rationnelle

Exercice 6.217 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n}$. Étudier la suite (u_n) : monotonie, convergence, développement asymptotique.

Exercice 6.218 ★ **Centrale PC 2009**

On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

1. *Montrer que u_n est bien défini et déterminer la limite de (u_n).*
2. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.*
3. *Déterminer un équivalent de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ quand n tend vers $+\infty$.*
4. *Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.*

Exercice 6.219 ★ **Centrale PC 2009**

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$ après avoir déterminé les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale converge.

Exercice 6.220 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. *Déterminer la limite ℓ de la suite (I_n) .*
2. *Trouver un équivalent de $\ell - \mathrm{I}_n$.*
3. *Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.*
4. *Donner un développement asymptotique à trois termes de I_n.*

Exercice 6.221 ★ **CCP PSI 2015**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{U}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$. Montrer que $\mathrm{U}_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où b est à exprimer sous forme d'une intégrale.

Exercice 6.222 ★ **CCP PC 2010**

Soit $\mathrm{I}_n = 4^n \int_0^1 x^n(1-x)^n \mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 6.223 ★ **Centrale PSI 2014**

Mots-clés : intégrale de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} puis en déduire la valeur de I_n.

Exercice 6.224 ★ **X ESPCI PC 2013**

Limite et équivalent de $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 6.225 ★ **X ESPCI PC 2013**

Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x^n)}{1-x}\mathrm{d}x$.

Exercice 6.226 ★ **TPE PC 2015**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{t^{n+2}+1}\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de (I_n).

6.1.9 Développements asymptotiques pour une fonction particulière non rationnelle positive

Exercice 6.227 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \int_1^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^{-n} x^{-1/n}\mathrm{d}x$. Existence et calcul de la limite de (u_n).

Exercice 6.228 ★ **CCP PSI 2010**

On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'existence de u_n. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 6.229 ★ **CCP PSI 2011 , Mines Ponts PC 2014**

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^n + x^{-n}}}$.

1. L'existence de I_n est-elle justifiée pour tout n ?
2. Étudier la convergence de la suite (I_n).
3. Donner un équivalent de I_n en $+\infty$.

sRMS 2014 1276 ENSAM PSI

sRMS 2009 403 X ESPCI PC

Exercice 6.230 ★ **TPE PC 2006**

Déterminer la limite de $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-x^{1/n})^{1/n}\mathrm{d}x$.

sRMS 2009 734 Mines Ponts PC

Exercice 6.231 ★ **CCP PC 2015**

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = n(x^{1/n}-1)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{f_n(t)}{1+t}\mathrm{d}t$.

sRMS 2006 1131 CCP PC

sRMS 2010 1086 CCP PC

Exercice 6.232 ★ **Centrale PSI 2014**

Soit $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+t^2+\cdots+t^n}}$.

1. Montrer que u_n est bien définie pour tout n. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que (u_n) converge vers $2/3$.
3. Montrer que $u_n - 2/3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{I}}{n^\alpha}$ où I est un réel >0 que l'on ne cherchera pas à calculer et $\alpha > 0$ est à déterminer.

Exercice 6.233 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(\frac{2}{\pi}\sin x))^n \mathrm{d}x$. Étudier la suite (u_n). Quelle est la nature de la série de terme général u_n^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$?

sRMS 2010 1013 T\'el\'ecom Sud Paris PSI

Exercice 6.234 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \int_0^{1/2} \cos^n(\sin(x))\mathrm{d}x$.

sRMS 2011 1094 TPE PSI

1. Étudier la suite (u_n).
2. Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

sRMS 2011 1096 TPE PSI

Exercice 6.235 ★ **CCP PSI 2015**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \colon x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\sin x)^{1/n}$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n). Étudier la convergence de $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 6.236 ★ **CCP PSI 2011**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{ch}\,x)^n}$.

1. Justifier l'existence de u_n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.

sRMS 2010 1084 T\'el\'ecom Sud Paris PC

sRMS 2013 388 X ESPCI PC

Exercice 6.237 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi n x)}{\tan(\pi x)}\mathrm{d}x$.

sRMS 2013 679 Mines Ponts PC

1. Justifier la définition de u_n.
2. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).

sRMS 2014 1274 ENSAM PSI

Exercice 6.238 ★ **ENSAM PSI 2014**

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(x/n)}{x(\mathrm{ch}\,x)^2}\mathrm{d}x$. Justifier l'existence de I_n. Déterminer la limite de (I_n), puis de $(n\mathrm{I}_n)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 6.239 ★ **X ESPCI PC 2009**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{(x+ne^{-x})(x^3+1)}{e^x+n}\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 6.240 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^0 \frac{n^3t^2e^{-n^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de (I_n).

Exercice 6.241 ★ **CCP PC 2006**

Soient $a > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx}\mathrm{d}x$. Existence de I_n et limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 6.242 ★ **CCP PC 2010**

Mots-clés : intégrale de Gauss, intégrale de Wallis

Soient $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$, $\mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ et $\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x$. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1-t^2 \leqslant e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$.
2. Justifier l'existence de I et de J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{J}_n$.
3. Montrer que $\mathrm{I}_n = \mathrm{W}_{2n+1}$ et $\mathrm{J}_n = \mathrm{W}_{2n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que $(\mathrm{W}_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et que $(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n$.
5. En déduire I.

Exercice 6.243 ★ **RMS 2010 1013 Télécom Sud Paris PSI**

Calculer la limite de $\mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n)\mathrm{d}x$.

Exercice 6.244 ★ **TPE PSI 2011**

Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n+e^x}$.

Exercice 6.245 ★ **TPE PSI 2011**

Mots-clés : constante d'Euler

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $t \mapsto e^{-t}f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge. On note γ sa limite.
2. Montrer que $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n f(t)\mathrm{d}t$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t)\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini.
3. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t = -\gamma$.

Exercice 6.246 ★ **RMS 2010 1084 Télécom Sud Paris PC**

On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\mathrm{d}x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de I_n et calculer la limite de (I_n).

Exercice 6.247 ★ **X ESPCI PC 2013**

Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = n\int_0^1 e^{-nx/2}(1-x)^n\mathrm{d}x$.

Exercice 6.248 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

Exercice 6.249 ★ **ENSAM PSI 2014**

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^{x^n}\mathrm{d}x$.

Exercice 6.250 ★ **ENSAM PSI 2014**

Soit $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \ln(n+x)e^{-nx}\mathrm{d}x$.

sRMS 2009 733 Mines Ponts PC

1. *Pour quels* n *l'intégrale* I_n *converge-t-elle ?*
2. *Nature de la série* $\sum \mathrm{I}_n$ *?*
3. *Trouver un équivalent de* I_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

sRMS 2015 742 Mines Ponts PC

Exercice 6.251 ★ **Mines Ponts PC 2014**

sRMS 2010 1087 CCP PC

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{\sqrt[4]{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

sRMS 2010 849 Centrale PSI

1. *Montrer que* I_n *est bien définie. Déterminer la limite de* (I_n).
2. *Nature de la série de terme général* I_n *?*

Exercice 6.252 ★ **CCP PSI 2014**

sRMS 2014 676 Mines Ponts PSI

1. *Pour quels* $\alpha \in \mathbb{R}$ *l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *est-elle définie ?*
2. *Existence de* $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2}+t^n}\mathrm{d}t$ *?*
3. *Montrer la convergence de* (I_n). *Exprimer sa limite sous la forme d'une intégrale.*

Exercice 6.253 ★ **CCP PSI 2014**

sRMS 2015 851 Centrale PSI

Soit $f_n(x) = \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}$.

1. *Montrer que les* f_n *sont intégrables sur* $]0,1[$.
2. *On pose* $\mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n$. *Déterminer la limite de* (I_n).
3. *Montrer que* $\mathrm{I}_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
4. *En déduire un équivalent de* I_n.

sRMS 2015 924 Centrale PC

Exercice 6.254 ★ **CCP PSI 2015**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on définit* $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = x\left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)$ *si* $0 \leqslant x \leqslant n$ *et* $f_n(x) = 0$ *si* $x > n$.

1. *Déterminer la limite simple de* (f_n).
2. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

sRMS 2009 991 Centrale PSI

6.1.10 Développements asymptotiques pour une fonction particulière de signe quelconque

Exercice 6.255 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t^n)\mathrm{d}t$.

Exercice 6.256 ★ **Mines Ponts PC 2013**

sRMS 2015 756 Mines Ponts PC

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x^2 \sin x}{1+x^3}\mathrm{d}x$. *Nature de la série de terme général* I_n *? Donner un équivalent de* I_n.

Exercice 6.257 ★ **Mines Ponts PC 2013**

sRMS 2015 849 Centrale PSI

Justifier la définition de $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$. *Déterminer un équivalent de* I_n.

Exercice 6.258 ★ **CCP PSI 2014 , CCP PSI 2015**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$. *Justifier l'existence de* I_n. *Déterminer la limite de* (I_n) *puis un équivalent de* I_n.

6.1.11 Intégration terme à terme

Exercice 6.259 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Centrale PC 2014**

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 6.260 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$.

Exercice 6.261 ★ **RMS 2010 1087 CCP PC et CCP PC 2011**

Montrer l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\ln t}{t+1}$ *sur* $]0,1]$, *et l'égalité* $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 6.262 ★ **Centrale PSI 2010**

1. *Étudier la convergence de* $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.
2. *Montrer que* $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 6.263 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

1. *Comparer* $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
2. *Montrer que* $\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 6.264 ★ **Centrale PSI 2015**

Justifier l'existence et montrer que $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 6.265 ★ **Centrale PC 2015**

Mots-clés : règle de Raabe-Duhamel

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$. *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n = \ln((n+1)^a u_{n+1}) - \ln(n^a u_n)$.

1. *Nature de la série de terme général* a_n *?*
2. *En déduire un équivalent simple de* u_n.
3. *Si* $x \in]-1,0[$, *on pose* $\mathrm{I}(x) = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^x}{t}\mathrm{d}t$. *Justifier son existence et montrer que* $\mathrm{I}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n\times n!}$.

Exercice 6.266 ★ **Centrale PSI 2009**

Soit $\mathrm{I}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t-1}\mathrm{d}t$.

1. *Justifier l'existence de cette intégrale.*
2. *Montrer que* $\mathrm{I}(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$.
3. *Trouver un équivalent de* $\mathrm{I}(a)$ *lorsque* a *tend vers* $+\infty$.

Exercice 6.267 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $f : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{e^u-1}\mathrm{d}u$. *Montrer que* f *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$. *Montrer que* $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{t^2+n^2}$.

Exercice 6.268 ★ **Centrale PSI 2015**

Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* F *est définie sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Montrer que* F *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.
2. *Établir l'égalité* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$. La somme doit commencer à 1.

Exercice 6.269 ★ **CCP PSI 2010**

Domaine de définition et calcul de $\mathrm{F}\colon s\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{(n!)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.270 ★ **CCP PSI 2010**

Pour $s>1$, on pose $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

1. Justifier la convergence de $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I à l'aide de valeurs de la fonction ζ.
2. Exprimer $\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{\ln(1+t+\cdots+t^n)}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la fonction ζ.

sRMS 2015 481 X ESPCI PC

sRMS 2013 609 Mines Ponts PSI

Exercice 6.271 ★ **CCP PC 2011 , RMS 2014 1262 Écoles des Mines PSI**

sRMS 2013 687 Mines Ponts PC

Justifier l'existence de $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{\ln t\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\mathrm{I}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

Exercice 6.272 ★ **Centrale PSI 2009**

Existence, puis expression comme somme d'une série, de $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.273 ★ **CCP PSI 2014**

sRMS 2014 333 X ENS PSI

Justifier l'existence de $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{t(\ln t)^2}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\mathrm{I}=2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 6.274 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Montrer que l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$ est bien définie et en donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-3} près.

Exercice 6.275 ★ **CCP PC 2011**

1. Déterminer $\sup\{|xe^{-x}|,\quad x\in\mathbb{R}_+\}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général nx^n et calculer la somme de cette série.
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $u_n\colon x\in\mathbb{R}_+\mapsto nx^ne^{-nx}$. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\mathrm{S}\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}nx^ne^{-nx}$.
4. Montrer que la série de terme général $n!/n^n$ est convergente. Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$.

sRMS 2014 1338 CCP PC

Exercice 6.276 ★ **CCP PC 2012**

1. Convergence et calcul de $\mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty}te^{-nt}\,\mathrm{d}t$.
2. Convergence et calcul de $\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.277 ★ **RMS 2011 1153 Télécom Sud Paris PC**

sRMS 2015 673 Mines Ponts PSI

Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$.

sRMS 2015 852 Centrale PSI

Exercice 6.278 ★ **TPE PC 2011**

1. Soient $\mu\in\mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\frac{(-1)^n}{\mu n+1}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^\mu}$.
2. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.
3. Montrer qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\quad \frac{1}{1+t^3}=\frac{a}{1+t}+\frac{bt+c}{1-t+t^2}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 6.279 ★ **X ESPCI PC 2015 , Centrale PC 2015**

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\quad u_n=\frac{1}{(8n+1)(8n+5)}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

Exercice 6.280 ★ **Mines Ponts PSI 2013 , CCP PSI 2014**

Justifier l'existence de $\mathrm{S}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}$ et de $\mathrm{I}=\int_0^1x^x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\mathrm{I}=\mathrm{S}$.

Exercice 6.281 ★ **Mines Ponts PC 2013**

1. Soit $a>0$. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $\mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty}t^ne^{-at}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $\mathrm{J}=\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{ch}(at)}{e^{\pi t}-1}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de J. Exprimer J sous forme de somme.

Exercice 6.282 ★ **X ENS PSI 2014**

Mots-clés : formule de Bailey-Borwein-Plouffe

Le but de cet exercice est de prouver la formule de Plouffe $\pi=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)$.

1. Soit $a\in]0,1[$. Montrer pour tous $n,p\geqslant 1$, $\quad\int_0^a\frac{x^{n-1}}{1-x^p}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^{kp+n}}{kp+n}$.
2. En déduire que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1}-\frac{2}{8k+4}-\frac{1}{8k+5}-\frac{1}{8k+6}\right)=16\int_0^1\frac{4-2x^3-x^4-x^5}{16-x^8}\,\mathrm{d}x$.
3. Simplifier $\mathrm{R(X)}=\frac{4-2\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^4-\mathrm{X}^5}{16-\mathrm{X}^8}$ et proposer une méthode pour calculer π.

Exercice 6.283 ★ **CCP PC 2014**

Soit $f\colon(x,t)\in\mathbb{R}_+\times]0,1]\mapsto t^{-t}t^x$.

1. Montrer que $f(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{x+n}(\ln t)^n}{n!}$.
2. Soit, pour $(y,q)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{N}$, $\quad\mathrm{I}(y,q)=\int_0^1t^y(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$. Montrer l'existence de $\mathrm{I}(y,q)$. Donner une relation entre $\mathrm{I}(y,q)$ et $\mathrm{I}(y,q-1)$ pour $q\in\mathbb{N}^*$. En déduire une expression de $\mathrm{I}(y,q)$ pour $y\in\mathbb{R}_+$ et $q\in\mathbb{N}$.
3. Soit $\mathrm{F}\colon x\in\mathbb{R}_+\mapsto\int_0^1f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Exprimer F sous forme de somme.

Exercice 6.284 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on note $\mathrm{I}_{p,q}=\int_0^1t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$. Calculer $\mathrm{I}_{p,q}$. Déterminer la nature et la somme de la série $\mathrm{I}_{n,n}$.

Exercice 6.285 ★ **Centrale PSI 2015**

Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}_{p,q}=\int_0^1t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble des $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ pour lesquels $\mathrm{I}_{p,q}$ est bien définie et calculer alors sa valeur.
2. Déterminer l'ensemble des $a\in\mathbb{C}$ pour lesquels $\int_0^1x^{-ax}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{k-1}}{k^k}$.

Exercice 6.286 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\ln(1-t)} \mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* I_n *est bien définie. Déterminer la limite de* (I_n).
2. *Nature de la série de terme général* I_n *?*

Exercice 6.287 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Exprimer à l'aide d'une série $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} \mathrm{d}t$.

Exercice 6.288 ★ **RMS 2015 1054 Saint-Cyr PC**

Soit $a_n = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin t}{n \sin(t/n)} \mathrm{d}t$.

1. *Montrer l'existence de* a_n. *Calculer* $a_{n+2} - a_n$ *et en déduire la valeur de* a_n.
2. *Soit* $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. *Calculer le rayon de convergence de* S.
3. *Montrer que* $\mathrm{S}(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{x^2 - 2\cos(t)x + 1} \mathrm{d}t$.

6.2 Suites et séries de fonctions

6.2.1 Questions théoriques

Exercice 6.289 ★ **Centrale PSI 2010**

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n f(x)}{\sqrt{1 + n^2 f(x)^2}}$.

1. *Justifier l'existence de* $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. *La convergence est-elle uniforme ?*
2. *Montrer que si* f *est continue,* S *l'est aussi. Réciproque ?*

Exercice 6.290 ★ **TPE PSI 2008**

Soient $a \in \mathbb{R}$ *et* (f_n) *la suite de fonctions définies par* $f_0 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. *Montrer que la série de terme général* f_n *converge et calculer sa somme.*

Exercice 6.291 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : limite uniforme d'une suite de fonctions lipschitziennes

Soit (f_n) *une suite de fonctions dérivables de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que* (f_n) *converge simplement vers une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et que* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n'(x)| \leqslant 1$. *Montrer que* f *est continue.*

Exercice 6.292 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Mots-clés : extrema des fonctions d'une suite uniformément convergente

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite d'éléments de* $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ *qui converge uniformément. Que dire des suites* $(\max_{[a,b]} f_n)_{n \geqslant 0}$ *et* $(\min_{[a,b]} f_n)_{n \geqslant 0}$ *?*

Exercice 6.293 ★ **Centrale PC 2013**

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_n : t \in [0,1] \mapsto t^n f(t)$. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* f *pour que la série de terme général* u_n *converge normalement. L'énoncé est vraisemblablement erroné.*

Exercice 6.294 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Mots-clés : convergence uniforme d'une suite de polynômes de degrés bornés

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. *Soit* $(\mathrm{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *convergeant uniformément vers une fonction* f. *Démontrer que* f *est polynomiale.*

Exercice 6.295 ★ **Centrale PC 2014**

Mots-clés : monôme trigonométrique

Soient $(a_n)_{n \geqslant 0}$ *et* $(b_n)_{n \geqslant 0}$ *deux suites réelles bornées,* $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $c < d$. *On suppose que* $\forall x \in [c, d], \quad a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer qu'il existe* $\varphi_n \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \varphi_n)$.
2. *Calculer* $\mathrm{I}_n = \int_c^d (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2 \mathrm{d}x$. *En déduire que, pour* n *assez grand,* $\mathrm{I}_n \geqslant \frac{(d-c)(a_n^2 + b_n^2)}{4}$.
3. *Montrer que* $a_n \to 0$ *et* $b_n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 6.296 ★ **ENS PC 2015**

Mots-clés : limite uniforme d'une suite de fonctions hölderiennes

Soit E *l'ensemble des* $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, *de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $]0, 1[$ *et telles que* $\int_0^1 f'^2 = 1$ *(l'intégrale de* -1 *à 1 a été remplacée par une intégrale de 0 à 1).*

1. *Si* f *appartient à* E, *montrer que* f *est* $(1/2)$*-höldérienne de rapport 1, c'est-à-dire que* $\forall (x, y) \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{|x - y|}$.
2. *Soit* $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *une suite de fonctions de* E *convergeant simplement vers* g. *Montrer que la convergence est uniforme.*

Exercice 6.297 ★ **Centrale PSI 2015**

Mots-clés : fonctions quasi additives

1. *Déterminer les* $h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telles que* $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x + y) = h(x) + h(y)$.
2. *Soit* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telle que :* $\exists \mathrm{M} > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{M}$. *On pose* $g_n : x \mapsto f(2^n x)/2^n$. *Étudier la convergence de la série de terme général* $g_{n+1} - g_n$. *En déduire que* (g_n) *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une application linéaire* h. *Que peut-on en déduire pour* f *?*

6.2.2 Suites et séries de fonctions particulières

Exercice 6.298 ★ **CCP PC 2012**

Mots-clés : fonction ψ, *fonction digamma, caractérisation de la dérivée logarithmique de* Γ

Soit E *l'ensemble des* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *telles que* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x}$, $f(1) = 0$ *et* f *est croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.

1. *On pose* $u_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. *Monter que* $u : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *est définie et de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Montrer que* $u \in \mathrm{E}$.

2. *Soient f et g deux fonctions de* E, *et $\delta = f - g$. Montrer que δ est 1–périodique. Quelle est la limite de δ en $+\infty$?*

3. *En déduire que $f = g$. Que vaut* E *?*

Exercice 6.299 ★ **RMS 2015 1043 Mines d'Alès PC**

Mots-clés : fonction ψ, dérivée logarithmique de Γ

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$, soit $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Étudier la convergence de la série f_n. Montrer que la somme est $\mathscr{C}^1$ et calculer sa valeur en 1.

Exercice 6.300 ★ **ENS PC 2013**

Mots-clés : approximations rationnelles de la tangente hyperbolique

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f_0 : x \mapsto \operatorname{sh} x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}(x) = -2\int_0^x t f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que les f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.*
2. *Expliciter f_1.*
3. *Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n}\operatorname{sh} x}{n!}$.*
4. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe P_n et Q_n dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \mathrm{Q}_n(x)\operatorname{sh} x - \mathrm{P}_n(x)\operatorname{ch} x$.*
5. *Montrer que $\left(\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}\right)$ converge simplement vers la fonction th.*

Exercice 6.301 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Soient $f_0 : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1} : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{t + f_n(t)}$.

1. *Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Déterminer la limite $\ell(t)$ de $(f_n(t))_{n\geqslant 0}$.*
2. *Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.*
3. *Si $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $|f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leqslant \frac{|f_n(t)-\ell(t)|}{f_{n+1}^2(t)}$. Que peut-on en déduire sur (f_n) ?*

   Le dénominateur $2f_{n+1}(t)$ a été corrigé en $f_{n+1}^2(t)$.

Exercice 6.302 ★ **CCP PSI 2013**

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathrm{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 = f$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément sur $[a,b]$ et calculer sa somme.

Exercice 6.303 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soient $f_0 \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer la convergence normale sur tout segment de F : *$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Calculer* F.

Exercice 6.304 ★ **RMS 2014 1266 Écoles des Mines PSI**

Soit $u_n(t) = (-1)^n \frac{t^n}{\sqrt{1+n^2}}$.

1. *Domaine de définition de $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.*
2. *Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment de $[0,1[$.*
3. *Équivalent de $v_n = \int_0^1 |u_n|$.*
4. *Nature de $\sum v_n$.*

5. *Écrire $\int_0^1 f$ comme somme d'une série numérique.*

Exercice 6.305 ★ **X ENS PSI 2015**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $u_n(x) = (1 - \frac{x}{n^2})^n$ si $x \leqslant n^2$ et $u_n(x) = 0$ si $x \geqslant n^2$.

1. *Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction que l'on déterminera. A-t-on convergence uniforme ? Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $f(x) \to f(0)$ quand $x \to +\infty$.*
2. *Montrer que f admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}_+$.*

   Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série de terme général a_n converge et a pour somme 1.
3. *Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la série de terme général $a_n f(u_n(x))$ converge.*
4. *On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(u_n(x))$. Montrer que f est constante.*

6.2.3 Le terme général comporte une fonction rationnelle

Exercice 6.306 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit S : *$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$. Déterminer le domaine de définition de* S. *Étudier la continuité de* S.

Exercice 6.307 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : fonction $x \mapsto \pi\operatorname{cotan}(\pi x)$

Étudier la convergence de la suite $f_n : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.

Exercice 6.308 ★ **X ENS PSI 2015**

Mots-clés : développement eulérien de la cotangente, fonction $x \mapsto \pi\operatorname{cotan}(\pi x)$, méthode de Herglotz

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g_n : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k}$.

1. *Montrer que $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et que g est dérivable.*
2. *Montrer que g est 1-périodique et impaire.*
3. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = 2g(x)$.*
4. *Soit $f : x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \mapsto \pi\operatorname{cotan}(\pi x)$. Montrer que f est 1-périodique, impaire et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) = 2f(x)$.*
5. *Montrer que la fonction $h = f - g$ possède un prolongement par continuité $\overline{h}$ sur $\mathbb{R}$ et que $\overline{h}$ est identiquement nul.*

Exercice 6.309 ★ **Centrale PC 2009**

On pose $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$.

1. *Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$.*
2. *Sur quels intervalles y a-t-il convergence normale ?*

Exercice 6.310 ★ **Centrale PC 2009**

On pose $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Étudier la convergence simple de $\sum_{n\geqslant 1} f_n$*

2. La somme S est-elle continue ?

sRMS 2011 1142 CCP PC

3. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 6.311 ★ **Mines Ponts PC 2015**

sRMS 2014 765 Mines Ponts PC

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x)}$. Déterminer le domaine de définition de f, la limite de f en $+\infty$ et un équivalent de f en 0.

Exercice 6.312 ★ **CCP PSI 2011**

Étudier la convergence de la série de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+(nt)^2}$. Montrer que la somme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.

sRMS 2013 606 Mines Ponts PSI

Exercice 6.313 ★ **CCP PC 2011**

Ensemble de définition et continuité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^3x^2}$.

sRMS 2013 667 Mines Ponts PC

Exercice 6.314 ★ **Mines Ponts PC 2013 , Centrale PC 2013 , CCP PSI 2015 , Mines Ponts PC 2015**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$.

sRMS 2013 385 X ESPCI PC

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 6.315 ★ **CCP PC 2015**

sRMS 2014 415 X ESPCI PC

Pour $x > 0$, soient $I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^2x}$ et $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+n^2x}$.

1. Justifier l'existence de f et de I.
2. On admet que $I(x) = \ln(1+\frac{1}{x})$ et que $I(x) \leq f(x) \leq I(x) + \frac{1}{1+x}$. Préciser $\lim_{0^+} f$ et $\lim_{+\infty} f$. Montrer que $f(x) \sim_{x\to 0^+} -\ln(x)$.

sRMS 2014 1255 \'Ecoles des Mines PSI

3. Étudier la croissance de f monotonie est plus pertinent que croissance.
4. Montrer que f est dérivable et retrouver la question précédente.

sRMS 2014 1263 CCP PSI

5. Montrer les points admis en (b).
6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(\frac{1}{p})$ est rationnel.

Exercice 6.316 ★ **RMS 2014 1265 Écoles des Mines PSI**

Soit $u_n(x) = \frac{1}{n(nx^2+1)}$.

1. Trouver le domaine de définition de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$, et déterminer $\lim f$ en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6.317 ★ **RMS 2014 1260 Écoles des Mines PSI**

sRMS 2015 845 Centrale PSI

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de f.
2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.
3. Trouver un polynôme P tel que $f(x) - \frac{P(x)}{x^2} = o(\frac{1}{x^2})$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 6.318 ★ **CCP PC 2011 , Mines Ponts PC 2015**

Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est définie sur $]0, +\infty[$. L'application S est-elle continue ? De classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 6.319 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro.

Exercice 6.320 ★ **Mines Ponts PSI 2013**

Domaine de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$, continuité, limites aux bornes.

Exercice 6.321 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$. Préciser le domaine de définition de f. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(\frac{1}{x})$; exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 6.322 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$.

1. Déterminer la limite de (u_n).
2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n : x \in [0, 1[\mapsto \frac{1}{u_n} \int_0^x (1-t^2)^n \, dt$. Étudier la convergence de (f_n).

Exercice 6.323 ★ **X ESPCI PC 2014**

1. Si z est une racine de l'unité, montrer $(*)$: $\frac{1}{z} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} z^n(1-z)(1-z^2)\cdots(1-z^n)$.
2. Pour quels complexes z l'égalité $(*)$ est-elle vérifiée ?

Exercice 6.324 ★ **RMS 2014 1255 Écoles des Mines PSI**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad f_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{2n^2x^2 - nx + 1}{2n^2x+1} \sin^2(\frac{\pi}{x})$ si $x \in]\frac{1}{n}, 1]$, et $f_n(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$.

Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n).

Exercice 6.325 ★ **CCP PSI 2014**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

1. Déterminer suivant les valeurs de a le domaine de définition de S.
2. Soit a tel que $|a| < 1$.
   (a) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
   (c) Déterminer un équivalent de S en 0^+.
   (d) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 6.326 ★ **Centrale PSI 2015**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t} \, dt$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

6.2.4 Le terme général comporte une exponentielle ou un logarithme

Exercice 6.327 ★ **CCP PC 2015**

Mots-clés : fonction ζ de Riemann

Calculer $\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n^{x+1}}$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x}{n^{x+1}}$.

Exercice 6.328 ★ **X ESPCI PC 2012**

Étudier $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{ne^{inx}}{(1+n^2)(1+\ln n)}$.

Exercice 6.329 ★ **Mines Ponts PSI 2007**

On pose $f_n(x)=\frac{e^{i2^n x}}{n^n}$. *Montrer que* $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *et que sa série de Taylor en zéro est de rayon de convergence nul.*

Exercice 6.330 ★ **Centrale PC 2009**

On pose $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ *pour* $n\in\mathbb{N}$ *et* $x\in\mathbb{R}$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition* D *de la somme de la série de terme général* f_n.
2. *Calculer la somme* $\mathrm{S}\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$.
3. *La somme* S *est-elle continue sur* D *?*

Exercice 6.331 ★ **CCP PSI 2011**

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, *soit* $f_n\colon x\mapsto nxe^{-x^2\ln(n)}$. *Étudier la convergence simple et uniforme de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6.332 ★ **CCP PSI 2011**

Pour $n\in\mathbb{N}$ *avec* $n\geqslant 2$, *soit* $u_n\colon x\mapsto\frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. *Déterminer le domaine de définition* D *de la série de fonctions de terme général* u_n. *Pour* $x\in\mathrm{D}$, *on pose* $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x)$.
2. *Montrer qu'il n'y a pas convergence normale de la série de fonctions sur* D.
3. *Si* $n\geqslant 2$, *soit* $\mathrm{R}_n\colon x\in\mathrm{D}\mapsto\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)$. *Montrer que* $\forall x\in\mathrm{D},\quad |\mathrm{R}_n(x)|\leqslant\frac{1}{\ln n}$.
4. *La fonction* S *est-elle continue sur* D *? Est-elle intégrable sur* D *?*

Exercice 6.333 ★ **CCP PC 2006 , CCP PC 2011**

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $z\in\mathbb{C}$, $u_n(z)=\frac{e^{nz}}{n^2}$.

1. *Si* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $z\in\mathbb{C}$, *calculer* $|u_n(z)|$. *Montrer que la série de terme général* $|u_n(z)|$ *converge si et seulement si* $\mathrm{Re}(z)\leqslant 0$.
   Si $x\in\mathbb{R}_-$, *on pose* $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.
2. *Montrer que* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}_-$. *Déterminer la limite de* f *en* $-\infty$.
3. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_-^*$.
4. *Calculer* f''. *En déduire que* $\forall x\in\mathbb{R}_-,\quad f(x)=f(0)+\int_x^0\ln(1-e^t)\,\mathrm{d}t$. *La fonction* f *est-elle dérivable en zéro ?*

Exercice 6.334 ★ **Centrale PC 2013**

Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{nx}}}{\sqrt{n+1}}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* f. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$.
2. *Déterminer la limite de* f *en* 0^+ *et en* $+\infty$.

Exercice 6.335 ★ **CCP PSI 2014**

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-x\sqrt{n}}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* f, *puis la continuité de* f *sur ce domaine.*
2. *Montrer que* f *admet une limite en* $+\infty$ *et déterminer cette limite.*
3. *Déterminer un équivalent de* $f(x)$ *quand* x *tend vers 0.*

Exercice 6.336 ★ **Centrale PC 2015**

Soit $g\colon t\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-t\sqrt{n}}$.

1. *Déterminer le domaine de définition de* g. *Étudier les variations de* g *et préciser le plus grand intervalle sur lequel* g *est de classe* $\mathscr{C}^1$.
2. *Déterminer la limite, puis un équivalent de* g *en* $+\infty$.
3. *Montrer que* $\int_1^{+\infty}e^{-t\sqrt{u}}\mathrm{d}u\leqslant g(t)\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-t\sqrt{u}}\mathrm{d}u$. *En déduire la limite, puis un équivalent de* g *en* 0^+ .

Exercice 6.337 ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$.
2. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* f.

Exercice 6.338 ★ **RMS 2015 1045 Mines d'Alès PC**

Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^{-nx}}{n^2+1}$. *Déterminer le domaine de définition de* f. *Étudier la monotonie, la continuité, la dérivabilité et les limites aux bornes.*

Exercice 6.339 ★ **ENSAM PSI 2014**

Soit $f\colon t\mapsto e^{-t^2}$. *Nature de* $\sum f(nt)$ *? Montrer que* $\sum_{n=0}^{+\infty}f(nt)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2t}$ *quand* t *tend vers* 0^+.

Exercice 6.340 ★ **Centrale PC 2014**

1. *Existence et calcul de* $\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin(\pi t)\mathrm{d}t$.
2. *Soit* $f\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}\sin(n\pi x)$. *Déterminer le domaine de définition de* f. *Étudier la continuité de* f. *Déterminer un équivalent de* f *en* 0^+.
3. *Existence et calcul de* $\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$.
4. *Soit* $g\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}\ln(nx)$. *Déterminer le domaine de définition de* g. *Déterminer un équivalent de* g *en* 0^+.

Exercice 6.341 ★ **CCP PSI 2014**

Pour $n\geqslant 1$ *et* $x\neq 0$, *on pose* $u_n(x)=(-1)^n\frac{e^{-(n+1)x}}{n}$.

1. *Étudier la convergence simple, uniforme, normale de* $\sum u_n$.
2. *On pose* $\mathrm{S}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ *et* $\mathrm{F}(x)=e^x\mathrm{S}(x)$. *Montrer que* F *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et calculer* $\mathrm{F}'(x)$.
3. *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{F}(x)$. *En déduire* $\mathrm{F}(x)$, *puis* $\mathrm{S}(x)$ *pour* $x>0$, *puis* $\mathrm{S}(0)$.
4. *On note* U *la primitive de* S *s'annulant en 0. Déterminer* U.

5. Montrer que S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.342 ★ **RMS 2015 1044 Mines d'Alès PC**
sRMS 2011 1088 ENSAM PSI
Étudier $x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n}$. Est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$? Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 6.343 ★ **CCP PSI 2014**
Montrer que $x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^2}{e^{-2nx}+e^{3nx}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
sRMS 2010 1005 Petites Mines PSI

Exercice 6.344 ★ **Mines Ponts PSI 2015**
Soit $f\colon x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\sin(x)e^{-nx}$. A-t-on convergence simple sur $\mathbb{R}_+$? Uniforme ? Quelle est la somme de la série ?

Exercice 6.345 ★ **Mines Ponts PSI 2015**
Soit, pour $n\geqslant 2$, $u_n\colon x\in\mathbb{R}_+\mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

sRMS 2010 1006 TPE PSI

1. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

sRMS 2013 603 Mines Ponts PSI

2. Montrer, si $n\geqslant 2$ et $x\in\mathbb{R}_+$, que $0\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)\leqslant \frac{xe^{x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$. En déduire la convergence uniforme de la série.
   Supposer $x>0$, et remplacer le majorant par $\frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}$ (la fonction $x\mapsto\frac{xe^{x}}{1-e^{-x}}$ n'est pas bornée).

sRMS 2013 1000 CCP PSI

Exercice 6.346 ★ **Mines Ponts PSI 2015**
Soit $f\colon x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1+e^{-nx})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer la limite de f et un équivalent en $+\infty$.
3. Déterminer la limite de f et un équivalent en 0^+.

sRMS 2013 1006 CCP PSI

sRMS 2014 1258 TPE PSI

Exercice 6.347 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Mines Ponts PC 2013**
Soit $f\colon x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{x}{n})$. Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f.

Exercice 6.348 ★ **CCP PSI 2011**
sRMS 2014 764 Mines Ponts PC
Soit $\mathrm{S}\colon x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. L'application S est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.349 ★ **Mines Ponts PC 2014**
Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $f\colon x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{a}{n^2x^2})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

sRMS 2014 175 ENS PC

Exercice 6.350 ★ **Mines Ponts PC 2015**
Soit $f\colon x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+\frac{x}{n^2})$. Montrer que $f(x)\sim\pi\sqrt{x}$ quand $x\to+\infty$.

Exercice 6.351 ★ **CCP PSI 2014**
On pose $h_n(x)=x^{2n+1}\ln x$. Étudier la convergence simple et uniforme de (h_n).

6.2.5 Le terme général comporte une fonction trigonométrique

Exercice 6.352 ★ **ENSAM PSI 2011**
Soient $h\in\mathscr{C}^0([0,\frac{\pi}{2}],\mathbb{R})$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\colon x\in[0,\frac{\pi}{2}]\mapsto h(x)(\sin x)^n$. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.353 ★ **Petites Mines PSI 2010**
Soit $f\colon x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\arccos(\cos(nx))}{n!}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Calculer $f(\pi)$.
2. Montrer que f est continue sur D. Pour quels $x\in$ D le théorème de dérivation terme à terme s'applique-t-il ?

Exercice 6.354 ★ **TPE PSI 2010**
Étudier la convergence et la continuité de $x\mapsto\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(x)^2}{\mathrm{ch}(nx)}$.

Exercice 6.355 ★ **Mines Ponts PSI 2013**
Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n\colon x\mapsto\arctan(\frac{n+x}{1+nx})$. Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite (f_n).

Exercice 6.356 ★ **CCP PSI 2013**

1. Soit $x>0$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$ converge.
2. Montrer que $f: x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$ est continue.
3. Montrer que $x\mapsto x^2f(x)$ se prolonge par continuité en 0.

Exercice 6.357 ★ **CCP PSI 2013**
Soient $a\in]-1,1[$ et $f: x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^nx)$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.358 ★ **TPE PSI 2014**
Soient $f\colon x\mapsto e^{\cos x}\cos(\sin x)$ et $g\colon x\mapsto e^{\cos x}\sin(\sin x)$.

1. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}$ et $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n!}$.
2. Calculer $\mathrm{I}_n=\int_0^{2\pi}e^{\cos t}\cos(\sin(t)+nt)\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J}_n=\int_0^{2\pi}e^{\cos t}\cos(\sin(t)-nt)\mathrm{d}t$.

Exercice 6.359 ★ **Mines Ponts PC 2014**
Soit $f\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. La fonction f est-elle continue ? De classe $\mathscr{C}^1$?
2. Déterminer la limite de f' en 0^+.

6.2.6 Intégration sur un intervalle quelconque d'une suite ou d'une série de fonctions

Exercice 6.360 ★ **ENS PC 2014**
Mots-clés : formule de Stirling
Soit $f\in\mathscr{C}^0(]0,1[,\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, f^p est intégrable sur $]0,1[$ et qu'il existe $\mathrm{C}>0$ tel que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $(\int_0^1|f|^p)^{1/p}\leqslant \mathrm{C}\sqrt{p}$. Montrer que, pour $\alpha>0$ assez petit, la fonction $\exp(\alpha f^2)$ est intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 6.361 ★ ***X ESPCI PC 2015***

Mots-clés : théorème de convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers 0 et que la suite $(\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t)$ est bornée. Est-il vrai que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = 0$?

6.2.7 Développements asymptotiques pour une fonction générique

Exercice 6.362 ★ ***ENS PC 2013***

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}^+)$. Si $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 f(x)x^n\mathrm{d}x$.

1. *Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge. On pose $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$.*
2. *Montrer que $\mathrm{S} = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}\mathrm{d}x$.*
3. *Soient $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(c_{0,n}, c_{1,n},\ldots,c_{n-1,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $2^n - (1-\mathrm{X})^n = (1+\mathrm{X})(c_{0,n} + c_{1,n}\mathrm{X} + \cdots + c_{n-1,n}\mathrm{X}^{n-1})$.*
4. *Si $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1} c_{k,n}a_k$. Montrer que $|\mathrm{S}-\mathrm{S}_n| \leqslant \frac{\mathrm{S}}{2^n}$.*

Exercice 6.363 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Soit $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}_+)$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $\quad u_n = n\int_0^1 f(t)^n\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de (I_n) dans chacun des cas suivants : (i) $\sup f < 1$; (ii) $\sup f > 1$; (iii) $\sup f = 1$ et $f' < 0$.

Exercice 6.364 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)\geqslant x$. Soit $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\frac{n}{1+n^2f^2(x)}\mathrm{d}x$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer la limite de (I_n).

Exercice 6.365 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Soient $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n = \int_1^{1+1/n} f(t^n)\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que $a_n \to 0$.*
2. *Déterminer la limite de na_n quand n tend vers $+\infty$.*

sRMS 2015 1013 CCP PSI

Exercice 6.366 ★ ***ENSAM PSI 2008***

Mots-clés : vitesse de convergence dans le lemme de Lebesgue

Soient $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ intégrable. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathrm{I}_n = n\int_0^1 f(t)g(nt)\mathrm{d}t$. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$.

Exercice 6.367 ★ ***TPE PSI 2010***

Soient $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour n entier naturel, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (I_n).

Exercice 6.368 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général $n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 6.369 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\quad u_n = \int_0^{+\infty} f^n$. On pose $\alpha = \sup_{\mathbb{R}_+} f$.

sRMS 2013 386 X ESPCI PC

1. *Montrer que la suite (u_n) est bien définie.*
2. *Si $\alpha < 1$, montrer que la série de terme général u_n est convergente.*
3. *Si $\alpha > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.*

6.2.8 Développements asymptotiques pour une fonction particulière rationnelle

Exercice 6.370 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n}$. Étudier la suite (u_n) : monotonie, convergence, développement asymptotique.

Exercice 6.371 ★ ***Centrale PC 2009***

On pose $u_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$.

1. *Montrer que u_n est bien défini et déterminer la limite de (u_n).*
2. *Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad x - \frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$.*
3. *Déterminer un équivalent de $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ quand n tend vers $+\infty$.*
4. *Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.*

Exercice 6.372 ★ ***Centrale PC 2009***

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $u_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$ après avoir déterminé les valeurs de $n\in\mathbb{N}$ pour lesquelles l'intégrale converge.

Exercice 6.373 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Soit pour $n\in\mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

1. *Déterminer la limite ℓ de la suite (I_n) .*
2. *Trouver un équivalent de $\ell - \mathrm{I}_n$.*
3. *Montrer que $\int_0^1\frac{\ln(1+y)}{y}\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$.*
4. *Donner un développement asymptotique à trois termes de I_n.*

Exercice 6.374 ★ ***CCP PSI 2015***

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{U}_n = \int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$. Montrer que $\mathrm{U}_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où b est à exprimer sous forme d'une intégrale.

Exercice 6.375 ★ ***CCP PC 2010***

Soit $\mathrm{I}_n = 4^n\int_0^1 x^n(1-x)^n\mathrm{d}x$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Déterminer la limite de $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 6.376 ★ ***Centrale PSI 2014***

Mots-clés : intégrale de Wallis

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} puis en déduire la valeur de I_n.

Exercice 6.377 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Limite et équivalent de $\mathrm{I}_n = \int_0^1\frac{x^n}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 6.378 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1\frac{x^n(1-x^n)}{1-x}\mathrm{d}x$.

Exercice 6.379 ★ ***TPE PC 2015***

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\frac{t^n}{t^{n+2}+1}\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de (I_n).

6.2.9 Développements asymptotiques pour une fonction particulière non rationnelle positive

Exercice 6.380 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \int_1^{+\infty} (1+\frac{x}{n})^{-n} x^{-1/n} \mathrm{d}x$. Existence et calcul de la limite de (u_n).

sRMS 2013 680 Mines Ponts PC

Exercice 6.381 ★ ***CCP PSI 2010***

On pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t+t^{2n}}} \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier l'existence de u_n. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 6.382 ★ ***CCP PSI 2011 , Mines Ponts PC 2014***

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^n+x^{-n}}}$.

sRMS 2014 1276 ENSAM PSI

1. *L'existence de I_n est-elle justifiée pour tout n ?*
2. *Étudier la convergence de la suite (I_n).*
3. *Donner un équivalent de I_n en $+\infty$.*

sRMS 2009 403 X ESPCI PC

Exercice 6.383 ★ ***TPE PC 2006***

sRMS 2009 734 Mines Ponts PC

Déterminer la limite de $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-x^{1/n})^{1/n} \mathrm{d}x$.

Exercice 6.384 ★ ***CCP PC 2015***

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = n(x^{1/n}-1)$.

sRMS 2006 1131 CCP PC

1. *Étudier la convergence simple de (f_n).*
2. *Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{f_n(t)}{1+t} \mathrm{d}t$.*

sRMS 2010 1086 CCP PC

Exercice 6.385 ★ ***Centrale PSI 2014***

Soit $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t+t^2+\cdots+t^n}}$.

1. *Montrer que u_n est bien définie pour tout n. Calculer u_1 et u_2.*
2. *Montrer que (u_n) converge vers $2/3$.*
3. *Montrer que $u_n - 2/3 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{I}}{n^\alpha}$ où I est un réel > 0 que l'on ne cherchera pas à calculer et $\alpha > 0$ est à déterminer.*

Exercice 6.386 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos(\frac{2}{\pi}\sin x))^n \mathrm{d}x$. Étudier la suite (u_n). Quelle est la nature de la série de terme général u_n^α pour $\alpha \in \mathbb{R}$?

sRMS 2010 1013 Télécom Sud Paris PSI

Exercice 6.387 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

sRMS 2011 1094 TPE PSI

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \int_0^{1/2} \cos^n(\sin(x)) \mathrm{d}x$.

sRMS 2011 1096 TPE PSI

1. *Étudier la suite (u_n).*
2. *Donner un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.*

Exercice 6.388 ★ ***CCP PSI 2015***

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \colon x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto (\sin x)^{1/n}$. Étudier la convergence simple et uniforme de (f_n). Étudier la convergence de $u_n = \int_0^{\pi/2} f_n(x) \mathrm{d}x$.

Exercice 6.389 ★ ***CCP PSI 2011***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{ch} x)^n}$.

1. *Justifier l'existence de u_n.*
2. *Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.*
3. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.*

Exercice 6.390 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \int_0^{1/2} \frac{\sin^2(\pi n x)}{\tan(\pi x)} \mathrm{d}x$.

1. *Justifier la définition de u_n.*
2. *Déterminer la limite éventuelle de (u_n).*

Exercice 6.391 ★ ***ENSAM PSI 2014***

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x/n)}{x(\operatorname{ch} x)^2} \mathrm{d}x$. Justifier l'existence de I_n. Déterminer la limite de (I_n), puis de $(n\mathrm{I}_n)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 6.392 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{(x+ne^{-x})(x^3+1)}{e^x+n} \mathrm{d}x$. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 6.393 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathrm{I}_n = \int_{-\infty}^0 \frac{n^3 t^2 e^{-n^2 t^2}}{1+t^2} \mathrm{d}t$. Justifier l'existence de I_n et déterminer la limite de (I_n).

Exercice 6.394 ★ ***CCP PC 2006***

Soient $a > -1$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} x^a e^{-nx} \mathrm{d}x$. Existence de I_n et limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 6.395 ★ ***CCP PC 2010***

Mots-clés : intégrale de Gauss, intégrale de Wallis

Soient $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t$, $\mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ et $\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t$.

1. *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geqslant 1+x$. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad 1-t^2 \leqslant e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$.*
2. *Justifier l'existence de I et de J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{J}_n$.*
3. *Montrer que $\mathrm{I}_n = \mathrm{W}_{2n+1}$ et $\mathrm{J}_n = \mathrm{W}_{2n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
4. *Montrer que $(\mathrm{W}_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et que $(n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n$.*
5. *En déduire I.*

Exercice 6.396 ★ ***RMS 2010 1013 Télécom Sud Paris PSI***

Calculer la limite de $\mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \exp(-x^n) \mathrm{d}x$.

Exercice 6.397 ★ ***TPE PSI 2011***

Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n+e^x}$.

Exercice 6.398 ★ ***TPE PSI 2011***

Mots-clés : constante d'Euler

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que $t \mapsto e^{-t} f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. *Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge. On note γ sa limite.*
2. *Montrer que $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n f(t) \mathrm{d}t$ tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) \mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini.*
3. *En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) \mathrm{d}t = -\gamma$.*

Exercice 6.399 ★ ***RMS 2010 1084 Télécom Sud Paris PC***

On pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\mathrm{d}x$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *Justifier l'existence de* I_n *et calculer la limite de* (I_n).

Exercice 6.400 ★ ***X ESPCI PC 2013***

Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = n\int_0^1 e^{-nx/2}(1-x)^n\mathrm{d}x$.

Exercice 6.401 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = n\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$.

Exercice 6.402 ★ ***ENSAM PSI 2014***

Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{x^n}\mathrm{d}x$.

Exercice 6.403 ★ ***ENSAM PSI 2014***

Soit $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\ln(n+x)e^{-nx}\mathrm{d}x$.

1. *Pour quels* n *l'intégrale* I_n *converge-t-elle ?*
2. *Nature de la série* $\sum \mathrm{I}_n$ *?*
3. *Trouver un équivalent de* I_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 6.404 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{t^n\ln t}{\sqrt[4]{1-t^2}}\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que* I_n *est bien définie. Déterminer la limite de* (I_n).
2. *Nature de la série de terme général* I_n *?*

Exercice 6.405 ★ ***CCP PSI 2014***

1. *Pour quels* $\alpha\in\mathbb{R}$ *l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *est-elle définie ?*
2. *Existence de* $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\frac{\arctan t}{t^{3/2}+t^n}\mathrm{d}t$ *?*
3. *Montrer la convergence de* (I_n). *Exprimer sa limite sous la forme d'une intégrale.*

Exercice 6.406 ★ ***CCP PSI 2014***

Soit $f_n(x) = \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}$.

1. *Montrer que les* f_n *sont intégrables sur* $]0,1[$.
2. *On pose* $\mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n$. *Déterminer la limite de* (I_n).
3. *Montrer que* $\mathrm{I}_n = \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.
4. *En déduire un équivalent de* I_n.

Exercice 6.407 ★ ***CCP PSI 2015***

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, *on définit* $f_n : \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = x\left(1-\frac{\lfloor x\rfloor}{n}\right)$ *si* $0\leqslant x\leqslant n$ *et* $f_n(x)=0$ *si* $x>n$.

1. *Déterminer la limite simple de* (f_n).
2. *Calculer* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$.

6.2.10 Développements asymptotiques pour une fonction particulière de signe quelconque

Exercice 6.408 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Déterminer la limite de la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2}\sin(t^n)\mathrm{d}t$.

Exercice 6.409 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x^2\sin x}{1+x^3}\mathrm{d}x$. *Nature de la série de terme général* I_n *? Donner un équivalent de* I_n.

Exercice 6.410 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Justifier la définition de $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-nx}\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ *pour* $n\in\mathbb{N}^*$. *Déterminer un équivalent de* I_n.

Exercice 6.411 ★ ***CCP PSI 2014 , CCP PSI 2015***

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$. *Justifier l'existence de* I_n. *Déterminer la limite de* (I_n) *puis un équivalent de* I_n.

6.2.11 Intégration terme à terme

Exercice 6.412 ★ ***Mines Ponts PC 2009 , Centrale PC 2014***

Existence et calcul de $\int_0^1\frac{\ln t}{1-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 6.413 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Existence et calcul de $\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$.

Exercice 6.414 ★ ***RMS 2010 1087 CCP PC et CCP PC 2011***

Montrer l'intégrabilité de $t\mapsto\frac{\ln t}{t+1}$ *sur* $]0,1]$, *et l'égalité* $\int_0^1\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 6.415 ★ ***Centrale PSI 2010***

1. *Étudier la convergence de* $\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.
2. *Montrer que* $\int_0^1\frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 6.416 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

1. *Comparer* $\int_0^1\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ *et* $\int_1^{+\infty}\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
2. *Montrer que* $\int_0^{+\infty}\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 6.417 ★ ***Centrale PSI 2015***

Justifier l'existence et montrer que $\int_0^1\frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 6.418 ★ ***Centrale PC 2015***

Mots-clés : règle de Raabe-Duhamel

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *et* $(u_n)_{n\geqslant 0}\in(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$. *On pose, pour* $n\in\mathbb{N}^*$, $\quad a_n = \ln((n+1)^a u_{n+1}) - \ln(n^a u_n)$.

1. *Nature de la série de terme général* a_n *?*
2. *En déduire un équivalent simple de* u_n.
3. *Si* $x\in]-1,0[$, *on pose* $\mathrm{I}(x) = \int_0^1\frac{1-(1-t)^x}{t}\mathrm{d}t$. *Justifier son existence et montrer que* $\mathrm{I}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n\times n!}$.

Exercice 6.419 ★ **Centrale PSI 2009**

Soit $\mathrm{I}(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de cette intégrale.
2. Montrer que $\mathrm{I}(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$.
3. Trouver un équivalent de $\mathrm{I}(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 6.420 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $f : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tu)}{e^u - 1}\,\mathrm{d}u$. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{t^2+n^2}$.

Exercice 6.421 ★ **Centrale PSI 2015**

Soit $\mathrm{F} : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Établir l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$. La somme doit commencer à 1.

Exercice 6.422 ★ **CCP PSI 2010**

Domaine de définition et calcul de $\mathrm{F} : s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n!)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.423 ★ **CCP PSI 2010**

Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

1. Justifier la convergence de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I à l'aide de valeurs de la fonction ζ.
2. Exprimer $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{\ln(1+t+\cdots+t^n)}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la fonction ζ.

Exercice 6.424 ★ **CCP PC 2011 , RMS 2014 1262 Écoles des Mines PSI**

Justifier l'existence de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 6.425 ★ **Centrale PSI 2009**

Existence, puis expression comme somme d'une série, de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.426 ★ **CCP PSI 2014**

Justifier l'existence de $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{t(\ln t)^2}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\mathrm{I} = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 6.427 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Montrer que l'intégrale $\int_0^1 e^{-t} \ln t\,\mathrm{d}t$ est bien définie et en donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-3} près.

Exercice 6.428 ★ **CCP PC 2011**

1. Déterminer $\sup\{|xe^{-x}|,\quad x \in \mathbb{R}_+\}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général nx^n et calculer la somme de cette série.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto nx^n e^{-nx}$. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n e^{-nx}$.
4. Montrer que la série de terme général $n!/n^n$ est convergente. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1-xe^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 6.429 ★ **CCP PC 2012**

1. Convergence et calcul de $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t$.
2. Convergence et calcul de $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{1-e^{-\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6.430 ★ **RMS 2011 1153 Télécom Sud Paris PC**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6.431 ★ **TPE PC 2011**

1. Soient $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{(-1)^n}{\mu n+1}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\mu}$.
2. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\quad \frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1-t+t^2}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 6.432 ★ **X ESPCI PC 2015 , Centrale PC 2015**

Soit, pour $n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{1}{(8n+1)(8n+5)}$. Montrer que la série de terme général u_n converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

Exercice 6.433 ★ **Mines Ponts PSI 2013 , CCP PSI 2014**

Justifier l'existence de $\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$ et de $\mathrm{I} = \int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{S}$.

Exercice 6.434 ★ **Mines Ponts PC 2013**

1. Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-at}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $\mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{ch}(at)}{e^{\pi t}-1}\,\mathrm{d}t$. Justifier l'existence de J. Exprimer J sous forme de somme.

Exercice 6.435 ★ **X ENS PSI 2014**

Mots-clés : formule de Bailey-Borwein-Plouffe

Le but de cet exercice est de prouver la formule de Plouffe $\pi = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$.

1. Soit $a \in]0,1[$. Montrer pour tous $n, p \geqslant 1,\quad \int_0^a \frac{x^{n-1}}{1-x^p}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{kp+n}}{kp+n}$.
2. En déduire que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right) = 16\int_0^1 \frac{4-2x^3-x^4-x^5}{16-x^8}\,\mathrm{d}x$.
3. Simplifier $\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \frac{4-2\mathrm{X}^3-\mathrm{X}^4-\mathrm{X}^5}{16-\mathrm{X}^8}$ et proposer une méthode pour calculer π.

Exercice 6.436 ★ **CCP PC 2014**

Soit $f : (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times]0,1] \mapsto t^{-t}t^x$.

1. Montrer que $f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{x+n}(\ln t)^n}{n!}$.
2. Soit, pour $(y,q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N},\quad \mathrm{I}(y,q) = \int_0^1 t^y (\ln t)^q\,\mathrm{d}t$. Montrer l'existence de $\mathrm{I}(y,q)$. Donner une relation entre $\mathrm{I}(y,q)$ et $\mathrm{I}(y,q-1)$ pour $q \in \mathbb{N}^*$. En déduire une expression de $\mathrm{I}(y,q)$ pour $y \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{N}$.

3. Soit $\mathrm{F}\colon x\in\mathbb{R}_+\mapsto\int_0^1 f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Exprimer F sous forme de somme.

PSI **Exercice 6.437** ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on note $\mathrm{I}_{p,q}=\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$. Calculer $\mathrm{I}_{p,q}$. Déterminer la nature et la somme de la série $\mathrm{I}_{n,n}$.

PSI **Exercice 6.438** ★ **Centrale PSI 2015**

Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}_{p,q}=\int_0^1 t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble des $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ pour lesquels $\mathrm{I}_{p,q}$ est bien définie et calculer alors sa valeur.
2. Déterminer l'ensemble des $a\in\mathbb{C}$ pour lesquels $\int_0^1 x^{-ax}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{k-1}}{k^k}$.

s PC **Exercice 6.439** ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{t^n}{\ln(1-t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I_n est bien définie. Déterminer la limite de (I_n).
2. Nature de la série de terme général I_n ?

s PC **Exercice 6.440** ★ **Mines Ponts PC 2015**

Exprimer à l'aide d'une série $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$.

r PC **Exercice 6.441** ★ **RMS 2015 1054 Saint-Cyr PC**

Soit $a_n=\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin t}{n\sin(t/n)}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de a_n. Calculer $a_{n+2}-a_n$ et en déduire la valeur de a_n.
2. Soit $\mathrm{S}\colon x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$. Calculer le rayon de convergence de S.
3. Montrer que $\mathrm{S}(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{x}{x^2-2\cos(t)x+1}\,\mathrm{d}t$.