Chapitre 2

Séries numériques

2.1 Sommes partielles et restes

Exercice 2.1 ★

Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme :

1. $S_1 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$, *2.* $S_2 = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ *3.* $S_3 = \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 2.2 ★

Indiquer la nature et, si elle existe, la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Exercice 2.3 ★

Indiquer la nature et, si elle existe, la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}.$$

Exercice 2.4 ★

On admet que $S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Montrer que* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(2k+1)^2}$ *est convergente et calculer sa somme* S_2.

Exercice 2.5 ★

Soit $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| < 1$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *Après avoir prouvé sa convergence, calculer les sommes partielles et le reste de la série* $\sum_{n\geqslant p} z^n$.

Exercice 2.6 ★

Soit $\alpha > 0$. *Montrer que*

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Exercice 2.7 ★ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

On considère la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *et on note* $L = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *sa somme. On veut trouver une valeur approchée de* L *à* 10^{-p} *près (*p *décimales exactes).*

1. *On décide de prendre comme valeur approchée de* L*, la somme partielle* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   Écrire une procédure Python qui calcule S_n.
2. *En utilisant une comparaison avec une intégrale, montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. *Combien de termes sommer pour obtenir une valeur approchée de* L *à* 10^{-4} *près ?*
4. *Trouver une amélioration de la méthode.*

Exercice 2.8 ★

Pour $p \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$a_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$$

1. *Montrer que* a_p *existe puis exprimer* a_p *en fonction de* $a_0, \dots, a_{p-1}$.
2. *En déduire que* $a_p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.9 ★

Existence et valeur pour $m \geqslant 1$ de

$$S_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)}.$$

2.2 Séries à termes positifs

Exercice 2.10 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{n}{n^2+1}$,
2. $u_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$,
3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$,
4. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
5. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
6. $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$.

Exercice 2.11 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$,
2. $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$,
3. $u_n = 2^{-\frac{1}{n}}$,
4. $u_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$,
5. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^2}$,
6. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 2.12 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$,
2. $u_n = \frac{n!}{n^n}$,
3. $u_n = \frac{n!}{a^n}$,
4. $u_n = \sin n$,
5. $u_n = \frac{2n}{n+2^n}$,
6. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Exercice 2.13 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi}{n}$,
2. $u_n = e^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} - 1$,
3. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
4. $u_n = 1-\cos\frac{1}{n}$,
5. $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n+1}$,
6. $u_n = \frac{n^2+1}{n!}$.

Exercice 2.14 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{n^3}{n!}$,
2. $u_n = \frac{\ln n}{2n^3-1}$,
3. $u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$,
4. $u_n = \frac{\ln n}{n^2+3}$,
5. $u_n = e^{-n^2}$,
6. $u_n = \sin^3\frac{1}{n}$.

Exercice 2.15 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = (-1)^n\frac{\sin\sqrt{n}}{n^{3/2}}$,
2. $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,
3. $u_n = \frac{1}{n\ln n}$,
4. $u_n = (1+\sqrt{n})^{-n}$,
5. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$,
6. $u_n = \frac{a^{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$, $a > 0, \alpha > 0$.

Exercice 2.16 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$,
2. $u_n = \sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,
3. $u_n = \frac{1}{n^\alpha + \arctan n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $u_n = \frac{n+3}{n^2+n+1}$,
5. $u_n = \sin\frac{1}{2^n}$,
6. $u_n = \frac{(n+2)^{4/3}}{(n+1)(n+3)^{3/2}}$;

Exercice 2.17 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{4^n-n}{5^n+2n^4}$,
2. $u_n = \frac{\ln n}{3n^4-2}$,
3. $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$,
4. $u_n = \ln\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}$,
5. $u_n = \frac{\ln n}{n}$,
6. $u_n = \frac{1}{n\sin^2 n}$;

Exercice 2.18 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{2^n n!}{n^{\sqrt{n}}}$,
2. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$,
3. $u_n = \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^\alpha$,
4. $u_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1} + a + \frac{b}{n}$,
5. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+bn+2}\right)$,
6. $u_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

Exercice 2.19 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = a^{\ln n}$, $a > 0$,
2. $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$,
3. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}}$,
4. $u_n = (\ln(n+a))^{\alpha} - (\ln n)^{\alpha}$, $a > 0$,
5. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha}}$,
6. $u_n = \dfrac{|\sin n| + |\cos n|}{n}$.

Exercice 2.20 ★★★ **Type X**

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$,
2. $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\ln k)^2$,
3. $u_n = \dfrac{1}{(n+p)!}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!$ avec $p \geqslant 1$.

On cherchera un équivalent de u_n

Exercice 2.21 ★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{\alpha}+n^{\alpha}}}$$

avec $\alpha > 0$.

Exercice 2.22 ★★

Étudier la convergence puis calculer la somme, quand celle-ci existe, de la série de terme général

$$u_n = \ln(n+1) + a\ln(n+2) + b\ln(n+3).$$

Exercice 2.23 ★

Trouver le polynôme P pour que la série de terme général

$$u_n = \left(n^4+2n^2\right)^{1/4} - (\mathrm{P}(n))^{1/3}$$

soit convergente.

Exercice 2.24 ★

Pour quelles valeurs de α la série de terme général $u_n = (1+2+3+\ldots+n)^{\alpha}$ est-elle convergente ?

Exercice 2.25 ★★

Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs.

1. *Montrer que les séries de terme général u_n, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ et $w_n = \ln(1+u_n)$ sont de même nature.*
2. *Si $\sum u_n$ converge, montrer que la série $\sum (u_n)^{\alpha}$, avec $\alpha \geqslant 1$, est aussi convergente.*

Exercice 2.26 ★★

Soit (a_n) une suite de réels positifs.

1. *On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Quelle est la nature de la série de terme général :*

   (a) $u_n = a_n^2$;
   (b) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$;
   (c) $u_n = \sin\left(\dfrac{a_n}{1+a_n}\right)$.
   (d) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n+\sqrt{n}}$;
   (e) $u_n = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n-\sqrt{n}}$.

2. *On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série de terme général :*

   (a) $u_n = \dfrac{a_n}{1+n^2 a_n}$;
   (b) $u_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$.

Exercice 2.27 ★ **Règle de Raabe-Duhamel**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. *On suppose qu'à partir d'un certain rang*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

   Montrer que $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$.

2. *On suppose que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha > 1$$

   Montrer, à l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, que la série $\sum u_n$ converge.

3. *On suppose cette fois-ci que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha < 1$$

   Montrer que la série $\sum u_n$ diverge

Exercice 2.28 ★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.29 ★

Soit $\sum u_n$ une série convergente et à terme général positif. Étudier la convergence de $\sum u_n^2$.

Exercice 2.30 ★★★ **Centrale PC**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. Étudier la convergence et la somme de

$$\sum \frac{s(n)}{n(n+1)}.$$

Exercice 2.31 ★ **CCP MP**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. *Démontrer que si* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

   ***Indication** : écrire, judicieusement, la définition de* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, *puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.*

2. *Quelle est la nature de la série* $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{n^n}$ *?*

Exercice 2.32 ★ **CCP MP**

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :*

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. *Étudier la convergence de la série* $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$.

   (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

stirling 1c

Exercice 2.33 ★

Soit $a\in\mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n=\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$$

stirling 1d

Exercice 2.34 ★ **Oral CCP PC**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$a_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

stirling 1e

1. *Calculer a_0 et a_1.*
2. (a) *Montrer que (a_n) est décroissante.*

   (b) *Montrer que* $\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+4}a_n$.

   (c) *En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n+1}$.
3. (a) *Montrer que la suite de terme général $n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est constante.*

   (b) *En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$ et la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.*

ling

Exercice 2.35 ★★ **Intégrales de Wallis, Formule de Stirling**

Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Stirling

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

qui donne un équivalent de la factorielle.

1. *Montrer que la suite de terme général*

$$a_n=\frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!}$$

   converge vers une limite L non nulle.

   ***Indication :** Poser $u_n=\ln a_n$ puis considérer la série (v_n) de terme général $u_{n+1}-u_n$.*

2. *En déduire que* $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{L}}\sqrt{n}n^n\mathrm{e}^{-n}$.

3. *L'objet de la suite du problème est de calculer L. Pour ce faire, on considère, pour n entier naturel, l'intégrale (dite de Wallis) définie par :*

$$\mathrm{W}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

   (a) *Montrer que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{W}_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\mathrm{d}t.$$

   (b) *Calculer W_0 et W_1.*

   (c) *Montrer que*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \mathrm{W}_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n$$

   (d) *En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$:*

$$\mathrm{W}_{2n}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}\quad\text{et}\quad \mathrm{W}_{2n+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

   (e) *Montrer que (W_n) est décroissante et positive. En déduire que (W_n) est convergente.*

   (f) *En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$:*

$$1\leqslant\frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_{n+2}}\leqslant\frac{\mathrm{W}_n}{\mathrm{W}_{n+2}}.$$

   (g) *Montrer que* $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_{n+1}$.

   (h) *Établir que pour tout $n\in\mathbb{N}$,* $\quad (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n=\dfrac{\pi}{2}$.

   (i) *En déduire que :* $\mathrm{W}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. *En calculant, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a_{2n}}{a_n^2}$ et en faisant apparaître W_{2n}, calculer L et en déduire la formule de Stirling.*

Exercice 2.36 ★★ **Mines PC 2003**

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2.37 ★★★ **Centrale MP**

Pour $\alpha > 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$ selon la valeur du réel α.

Exercice 2.38 ★★★ **X PC 2017**

Soi (a_n) une suite réelle. On supose que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha \ln n$ où $\alpha > 0$

1. *Montrer que la série de terme général e^{-a_n} converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.*
2. *Peut-on conclure quand $\alpha = 1$?*

Exercice 2.39 ★★★ **X PC 2017**

Étudier la nature de la série de terme général

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Exercice 2.40 ★★★ **X PC 2016**

Soit (a_n) une suite croissante de réels strictements positifs. On suppose que (a_n) diverge vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{a_n - a_{n-1}}{a_n}$?

Exercice 2.41 ★★★ **X PC 2016**

Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 2.42 ★

On considère la suite réelle (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right).$$

1. *Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$.*
2. *Montrer que : $\forall k \geqslant 1, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.*
3. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = H_n - \ln(n)$.*
   (a) *Montrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad a_n > 0$.*
   (b) *Montrer que la suite (a_n) converge vers un réel $\gamma \in [0,1]$.*
4. (a) *Montrer l'égalité :*

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} H_n + \sum_{k=1}^{n} w_k$$

où $\sum_{k\geqslant 1} w_k$ est une série convergente.

   (b) *Déterminer $\lim u_n$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.*

5. *Pour $\alpha > 0$, on considère la suite (v_n) définie par*

$$v_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right).$$

Montrer que cette suite admet une limite finie V, puis que $V = 0$ si et seulement si $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 2.43 ★ **C.C.P. – P.C. 2014**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5} u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Étudier la convergence de la suite (u_n).*
2. *On pose $v_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{3/2} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Déterminer $a > 0$ tel que*

$$\ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. *La série $\sum \ln(v_n)$ est-elle convergente ?*
4. *Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \sim \frac{C}{n^{3/2}}$.*
5. *La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?*

Exercice 2.44 ★ **X PC 2017**

Indiquer la nature des séries :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Exercice 2.45 ★ **Mines PC 2017**

Soit $(u_n)_n \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On pose aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et $a_n = b_{n+1} - b_n$.

1. *Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$?*
2. *Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$ avec $\lambda > 0$ à déterminer.*
3. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^n} \, dt$. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.*
4. *Trouver un équivalent de I_n.*

Exercice 2.46 ★★★ **Centrale, X – P.C. 2014**

1. *Justifier la convergence de la séries de terme général $u_n = \frac{1}{(8n+1)(8n+5)}$.*
2. *Exprimer la somme de cette série à l'aide d'une intégrale.*

2.3 Comparaison série-intégrale

Exercice 2.47 ★ ***Constante d'Euler***

Montrer qu'il existe un réel γ *(appelé constante d'Euler) tel que*

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Exercice 2.48 ★

Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ *où* $\beta > 0$.

Exercice 2.49 ★ ***Série de Bertrand***

Étudier la nature de la série de Bertrand : $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ *où* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.50

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n \ln n\,(\ln(\ln n))^2}$.

Exercice 2.51 ★ ***Équivalent du reste de la série de Riemann***

1. *Montrer que si* $0 < \alpha < 1$ *alors* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
2. *Déterminer un encadrement puis un équivalent du reste d'ordre* n *de la série de Riemann* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ *pour* $\alpha > 1$.
3. *Application : donner la nature de la série de terme général* $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *puis celle de la série de terme général* $v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

Exercice 2.52 ★★ ***Mines-Pont PC***

Indiquer la nature de $\sum u_n$ *si*

$$u_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

sans utiliser un télescopage.

Exercice 2.53 ★ ***CCP MP***

1. *On considère la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ *où* $n \geqslant 2$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) ***Cas*** $\boxed{\alpha \leqslant 0}$

   En utilisant une minoration très simple de u_n*, démontrer que la série diverge.*

   (b) ***Cas*** $\boxed{\alpha > 0}$

   Étudier la nature de la série.

   Indication *: On pourra utiliser la fonction* f *définie par* $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. *Déterminer la nature de la série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 2.54 ★ ***Centrale PC 2001***

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n^{a}}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.55 ★★

Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = n^{a} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.56 ★ ***CCP 2011***

Pour $n \geqslant 2$*, on pose :*

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln^2 k.$$

1. *Montrer que* $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *diverge.*
2. *Montrer que :*
$$\int_1^{n} \ln^2 t \,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_2^{n+1} \ln^2 t \,\mathrm{d}t.$$
3. *Calculer* $\int_1^{x} \ln^2 t \,\mathrm{d}t$ *et en déduire que :*
$$\int_1^{n} \ln^2 t \,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln^2 n.$$
4. *Donner un équivalent de* $\frac{1}{u_n}$ *quand* $n \to +\infty$.
5. *Quelle est la nature de la série* $\sum \frac{1}{u_n}$ *?*

Exercice 2.57 ★

Pour $\alpha > 1$ *on pose*

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Déterminer la limite de $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ *quand* α *tend vers* 1^{+}

Exercice 2.58 ★

En exploitant une comparaison avec des intégrales, établir :

1. $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\sim\frac{2}{3}n\sqrt{n}$ 2. $\ln(n!)\sim n\ln n$ 3. $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}\sim\ln(\ln n)$

Exercice 2.59 ★★★ ***Centrale MP***

Soit $a>0$, $b>0$ *et pour* $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{A}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a+bk),\mathrm{B}_n=\prod_{k=1}^{n}(a+bk)^{1/n}$$

Trouver $\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_n}$ *en fonction de* e.

Exercice 2.60 ★ ***Mines MP***

Nature de la série de terme général

$$\frac{n^\alpha}{\sum_{k=2}^{n}\ln^2 k}$$

où α *est réel.*

Exercice 2.61 ★ ***Mines MP***

Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$. *On pose, pour* $n\in\mathbb{N}^*$

$$u_n=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k^\alpha}$$

Nature de la série de terme général u_n *?*

Exercice 2.62 ★★★ ***Mines PC 2017***

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$.

2.4 Critère de d'Alembert

Exercice 2.63 ★

Nature de la série $\sum\frac{n!}{n^n}$.

Exercice 2.64 ★

Nature de la série $\sum\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.

Exercice 2.65 ★★

Nature de la série $\sum\frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$ *où* $a>0$ *et* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 2.66 ★

Nature de la série $\sum u_n$ *où*

$$u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair}\\[2mm] \dfrac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

Exercice 2.67 ★★ ***Règle de Cauchy***

On considère une série à termes positifs $\sum u_n$. *On suppose que*

$$\sqrt[n]{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}l$$

En utilisant une série géométrique, montrer la règle de Cauchy :

1. *Si* $0\leqslant l<1$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $l>1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Exercice 2.68 ★ ***Règle de Raabe-Duhamel, preuve avec le critère de comparaison logarithmique***

Soit une série $\sum u_n$ *à termes strictement positifs. On suppose que :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}(1/n)$$

1. *Si* $\alpha<1$, *montrer que la série* $\sum u_n$ *diverge.*
2. *Si* $\alpha>1$, *montrer que la série* $\sum u_n$ *converge.*

On utilisera le théorème de comparaison logarithmique avec une série de Riemann. Ce résultat s'appelle la règle de Raabe-Duhamel *qui est hors-programme mais qu'il faut savoir retrouver.*

2.5 Quotient terme sur somme

Exercice 2.69 ★ ***Mines MP***

Soit (u_n) *une suite réelle strictement positive et convergeant vers* 0. *On pose*

$$v_n=\frac{u_{n+1}}{\mathrm{S}_n}\text{ avec }\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Indication 2.0 : On pourra montrer que $v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(\mathrm{S}_{n+1})-\ln(\mathrm{S}_n)$

Exercice 2.70 ★★★ ***X MP***

Soit $(u_n)_{n\geqslant1}$ *une suite de réels strictement positifs.*

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ *où* $\mathrm{S}_n=u_1+\dots+u_n$. *Déterminer la nature de* $\sum v_n$.

Exercice 2.71 ★ ***CCP MP, Mines PC 2017***

Soit (a_n) *une suite de réels strictement positifs et* $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.

1. *On suppose que la série* $\sum a_n$ *converge, donner la nature de* $\sum a_n/\mathrm{S}_n$.
2. *On suppose que la série* $\sum a_n$ *diverge, montrer*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\frac{a_n}{\mathrm{S}_n^2}\leqslant\frac{1}{\mathrm{S}_{n-1}}-\frac{1}{\mathrm{S}_n}$$

   En déduire la nature de $\sum a_n/\mathrm{S}_n^2$.

3. *On suppose toujours la divergence de la série* $\sum a_n$. *Quelle est la nature de* $\sum a_n/\mathrm{S}_n$ *?*

2.6 Série dont le terme est défini par récurrence

Exercice 2.72 ★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0,\pi]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1 - \cos u_n$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2.73 ★★★

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$$

Montrer que (u_n) converge vers un réel ℓ.
Quelle est la nature de la série de terme général $u_n - \ell$?

Exercice 2.74 ★★

Soit (x_n) la suite de nombres réels donnée par :

$$\begin{cases} x_0 & = 1 \\ x_{n+1} & = \ln(\mathrm{e}^{x_n} - x_n) \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. *Montrer que (x_n) est bien définie.*
2. *Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge et calculer sa somme.*

Exercice 2.75 ★★ **Centrale PC 2017**

Soit (a_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{n-k+2} \ \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{a_k}{2^k}$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2.76 ★★★ **X PC 2016**

Soit (a_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = 2a_{\lfloor n/2 \rfloor} \ \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. *Montrer que cette suite est bien définie.*
2. *Montrer que la série de terme général $\frac{1}{a_n^2}$ est convergente et calculer sa somme.*

Exercice 2.77 ★★★ **X PC 2017**

Soit (a_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_{n+1} & = \ln(\mathrm{e}^{a_n} - a_n) \ \text{si } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

1. *Montrer que cette suite est bien définie.*
2. *Montrer que la série de terme général a_n est convergente et calculer sa somme.*

Exercice 2.78 ★★★ **X – P.C. 2012**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit une suite (a_n) par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n f(a_n) \quad \text{si } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. *Déterminer la limite éventuelle de la suite (a_n).*
2. *Nature de la série de terme général a_n ?*

Exercice 2.79 ★ **X-ESPCI 2018**

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}.$$

1. *Montrer que (u_n) est convergente ;*
2. *Calculer sa limite.*
3. *Quelle est la nature de $\sum_{n\geqslant 0} u_n$?*

Exercice 2.80 ★★★

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f > 0$, $f' < 0$, $f(0) = 1$. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n f(x_n)$.
a) Étudier la suite (x_n).
b) Déterminer la nature de la série de terme général x_n.

2.7 Critère spécial

Exercice 2.81 ★

Pour chacune des séries suivantes, justifier la convergence et, S désignant la somme de la série, préciser pour les trois premières n tel que $|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}| \leqslant 10^{-2}$. En déduire un encadrement de S à 10^{-2} près.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+2}$,
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^3+1}$,
3. $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$,
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$,
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$,
6. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$

Exercice 2.82 ★

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$
2. $u_n = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right)$
3. $u_n = \cos\left(n^2\pi\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$
4. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$,
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
6. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$

Exercice 2.83 ★

Étudier la convergence et la convergence absolue des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln n}$,
2. $u_n = (-1)^n\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$,
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta}$, $\alpha \neq \beta$,
4. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}+\frac{a}{n}\right)$,
5. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+an+2}\right)$,
6. $u_n = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/2}\dfrac{\sin t}{(1+t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$, *avec* $\alpha > 0$
7. $u_n = (-1)^n\dfrac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)}$, P *et* Q *deux polynômes,*
8. $u_n = \cos\left(\pi n^2\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\right)$.

Exercice 2.84 ★

Étudier la convergence de $\sum(-1)^n x^n$ *pour* $x\,]-1,1[$.

Exercice 2.85 ★

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

est un réel négatif.

Exercice 2.86 ★

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. *Déterminer la nature de la série de terme général*

$$u_n = (-1)^n n^\alpha\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2.87 ★ ***TPE PSI 2016***

Soit $\alpha > 0$. *Étudier la nature de la série de terme général*

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}.$$

Exercice 2.88 ★ ***Intégrale de Dirichlet***

On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

En observant que

$$\mathrm{I} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{n\pi+t}\,\mathrm{d}t,$$

déterminer le signe de I.

Exercice 2.89 ★ ***Oral Mines-Pont PC***

Nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+n^{1/3}}\right)$.

Exercice 2.90 ★ ***Important : à retrouver par vous-même***

1. *Montrer que la série harmonique alternée* $\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$ *est semi-convergente, et montrer que*
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$
Donner une majoration du reste R_n *de cette série.*
2. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 2.91 ★ ***Mines 2013***

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\tan\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)\right).$$

Exercice 2.92 ★

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Exercice 2.93 ★★★ ***Centrale PSI***

On pose

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{et} \quad u_n = \ln\left(\mathrm{e}^{s_n}-1\right).$$

1. *Énoncer le théorème des séries spéciales alternées, en faire la preuve.*
2. *Prouver que les suites* $(s_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *convergent.*
3. *Étudier la nature de* $\sum u_n$.

Exercice 2.94 ★

Soit $x \in \mathbb{R}$. *Quelle est la nature de la série de terme général* $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+x^2}\right)$?

Exercice 2.95 ★ **C.C.P. – P.C. 2014**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *décroissante, à valeurs positives de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *On suppose que* f *a une limite nulle en* $+\infty$ *et que* f' *est croissante. On définit*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p).$$

1. *Vérifier que* (u_n) *est bien définie.*
2. *On pose* $a_p = f(p) - f(p+1)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p = 2\,u_n - (-1)^{n+1} f(n+1).$$

3. *Montrer que que* $(a_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *est décroissante.*
4. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que :*

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p a_p\right| \leqslant f(n+1) - f(n+2).$$

5. *En déduire que* $\sum u_n$ *est convergente.*
6. *On suppose dorénavant que* $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
   (a) *Montrer que* $u_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
   (b) *En déduire* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 2.96 ★★★ **Mines-Pont – P.C. 2014, X – P.C. 2007-2009**

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. *Nature de la série de terme général*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sin^p(n!\pi e).$$

☠☠☠

Exercice 2.97 ★★★ **X – P.C. 2014**

Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{1+n^2})$.

☠☠

2.8 Suites et séries

Exercice 2.98 ★ **Constante d'Euler**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln n.$$

1. *Montrer que la suite* (u_n) *converge en passant par une série.*
2. *Montrer que la suite* (u_n) *converge en utilisant une méthode élémentaire. La limite de cette suite est notée* γ *et est appelée constante d'Euler.*
3. *Trouver une valeur approchée de* γ *grâce à votre calculatrice.*
4. *La convergence de la suite* (u_n) *vers* γ *est-elle rapide ? (On pourra montrer que* $\gamma - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.*)*

Exercice 2.99 ★

Démontrer la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

Exercice 2.100 ★

Étudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 2.101 ★★★

Étudier, à l'aide d'une série, la nature des ***suites*** *de terme général* u_n *suivantes :*

1. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ *(on note* γ *sa limite) ;*
2. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2}(\ln n)^2$;
3. $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - a\ln n$ *(En cas de convergence, exprimer la limite à l'aide de* γ*).*

Exercice 2.102 ★

Calculer la limite de

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2.103 ★

On pose

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$$

1. *Montrer que la suite* (a_n) *converge et trouver sa limite* λ.
2. *Trouver un équivalent simple de* $a_n - \lambda$.

Exercice 2.104 ★

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *soit*

$$u_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

1. *Déterminer un équivalent de*

exo:2004:Oct:Fri:11:04:41

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n$$

En déduire que $u_n \to 0$.

2. *En s'inspirant de ce qui précède, établir que* $\sqrt{n}u_n \to \mathrm{C} > 0$ *(on ne cherchera pas expliciter la valeur de* C*).*

Exercice 2.105 ★★★ ***X MP***

exo:2005:Jan:Tue:22:30:28

Soit (u_n) *une suite complexe telle que pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{pn} - u_n \to 0$. *Peut-on affirmer que la suite* (u_n) *converge ?*

Exercice 2.106 ★★★ ***X MP***

Étudier la limite quand $n \to +\infty$ *de*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$$

2.9 Calculs de somme de séries

Exercice 2.107 ★★★ ***Centrale PC 2005***

Soit $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. *On pose*

$$u_n = \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(a^{2^k}+1\right)}.$$

1. *Discuter suivant la valeur de* a *la nature de* $\sum u_n$.
2. *Lorsque la série converge, calculer sa somme.*

Indication 2.0 : *Montrer que* $u_n = \alpha_{n-1} - \alpha_n$ *où* (α_n) *est une suite à déterminer.*

Exercice 2.108 ★ ***Mines 2007***

1. *Étudier la convergence et calculer la somme de* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *en remarquant que* $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.
2. *Même question avec* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

2.10 Produit de Cauchy de deux séries

2:49

Exercice 2.109 ★

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

1. *Étudier sa convergence et sa convergence absolue.*
2. *Soient* $a < b$. *Majorer simplement* $(x-a)(b-x)$ *pour* $x \in [a, b]$.
3. *Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle-même est une série divergente.*

Exercice 2.110 ★★★

On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. *Convergence de cette série ?*
2. *Montrer que le produit de Cauchy de cette série par elle-même est une série convergente.*

Exercice 2.111 ★

Soit $z \in \mathbb{C}$. *Montrer que*

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$$

Exercice 2.112 ★

Indiquer la nature et éventuellement la somme de la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$$

Exercice 2.113 ★

1. *Prouver la convergence et calculer la somme de la série de terme général*

$$w_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(n-p)!}.$$

2. *Faire de même avec la série de terme général*

$$w_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2}$$

en admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2.114 ★

On considère les suites (a_n) *et* (b_n) *données par* $a_0 = b_0 = 0$ *et* $\forall n \geqslant 1,\ a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. *Montrer que* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *sont convergentes mais que leur produit de Cauchy est une série divergente.*

2.11 Formule de Stirling

Exercice 2.115 ★

Trouver un équivalent de

$$u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}(2n-1)}.$$

Peut-on retrouver ce résultat à l'aide du critère de d'Alembert.

Exercice 2.116 ★

Étudier la limite de $\dfrac{(2n)!}{n^n n!}$ *ainsi que la convergence de la série* $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$.

Exercice 2.117 ★

Étudier suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *la nature de la série de terme général* $u_n = \dfrac{(3n)!}{\alpha^{3n}(n!)^3}$.

2.12 Transformation d'Abel

Abel

Exercice 2.118 ★ **Transformation d'Abel**

Soient (a_n) *une suite positive décroissante de limite nulle et* (S_n) *une suite bornée.*

2013 662 Mines Ponts PC

1. *Montrer que la série* $\sum (a_n - a_{n+1})\mathrm{S}_n$ *est convergente.*
2. *En déduire que la série* $\sum a_n(\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})$ *est convergente.*
3. *Établir que pour tout* $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, *la série* $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ *est convergente.*

Exercice 2.119 ★

sRMS 2012 328 X ESPCI PC

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose*

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}.$$

sRMS 2009 729 Mines Ponts PC

1. *Montrer que* $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ *est bornée.*
2. *En déduire que* $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ *converge.*

Exercice 2.120 ★ **ENSTIM**

sRMS 2009 983 Centrale PSI

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ *non multiple de* 2π. *On pose*

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}.$$

sRMS 2013 119 ENS PC

1. *Montrer que la suite* $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*
2. *En observant que* $\cos(n\theta) = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$, *établir que la série de terme général* u_n *converge.*
3. *En exploitant l'inégalité* $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$, *établir que la série de terme général* $|u_n|$ *diverge.*

Exercice 2.121 ★ **CCP MP**

1. *Montrer l'existence, pour* $\theta \in]0,\pi[$, *d'un majorant* M_θ *de la valeur absolue de*

sRMS 2013 354 X ESPCI PC

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta).$$

2. *Montrer que* $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ *est décroissante sur* $[2,+\infty[$.
3. *En remarquant de* $\cos(n\theta) = \mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}$, *étudier la convergence de la série de terme général*

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\theta)$$

4. *En utilisant* $|\cos(k\theta)| \geqslant \cos^2(k\theta)$, *étudier la convergence de* $\sum |u_n|$.

2.13 Séries numériques

2.13.1 Questions théoriques

Exercice 2.122 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

1. *On suppose que la série de terme général* a_n *converge. Montrer qu'il existe* $(b_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ *telle que* $b_n \to +\infty$ *et telle que la série de terme général* $a_n b_n$ *converge.*
2. *On suppose que la série de terme général* a_n *diverge. Montrer qu'il existe* $(b_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ *telle que* $b_n \to 0$ *et telle que la série de terme général* $a_n b_n$ *diverge.*

Exercice 2.123 ★ **X ESPCI PC 2012**

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* (u_n) *est décroissante et que la série de terme général* u_n *converge. Montrer que* $nu_n \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 2.124 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soient $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ *bijective et* $g = f^{-1}$. *Montrer que la série de terme général* $\frac{1}{f(n)}$ *converge si et seulement si la série de terme général* $\frac{g(n)}{n^2}$ *converge.*

Exercice 2.125 ★ **Centrale PSI 2009**

Mots-clés : test de condensation de Cauchy

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite monotone de réels positifs.*

1. *Montrer que les séries de termes généraux* u_n *et* nu_{n^2} *sont de même nature.*
2. *Qu'en est-il si l'on enlève l'une ou l'autre des hypothèses ?*

Exercice 2.126 ★ **ENS PC 2013**

Mots-clés : série commutativement convergente, partie épanouie

Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de complexes. On suppose que* $\forall i \neq j, \quad |z_i - z_j| \geqslant 1$.

1. *Montrer qu'il existe une bijection* φ *de* $\mathbb{N}$ *sur* $\mathbb{N}$ *telle que* $n \mapsto |z_{\varphi(n)}|$ *soit croissante.*
2. *Soit* $\alpha > 2$. *Montrer que la série de terme général* $u_n = \frac{1}{1+|z_n|^\alpha}$ *est convergente.*
3. *Généraliser à un espace euclidien de dimension* $\geqslant 3$.

Exercice 2.127 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : série commutativement convergente, partie épanouie

1. *Soit* $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On suppose que la série de terme général* a_n *est absolument convergente. Soit* σ *une permutation de* $\mathbb{N}$. *Montrer que la série de terme général* $a_{\sigma(n)}$ *est convergente.*

2. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\forall i \neq j$, $|a_i - a_j| \geqslant 1$. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{a_n^2}$ est convergente. Il faut supposer de plus que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.128 ★ **CCP PC 2006**

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} e^{-1/u_n}$ convergent.

Exercice 2.129 ★ **Centrale PC 2013**

Mots-clés : séries des moyennes géométriques de termes d'une série convergente

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que la série de terme général a_n converge. Montrer que la série de terme général $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.
2. Donner un exemple de suite telle que la série de terme général a_n diverge et la série de terme général $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

Exercice 2.130 ★ **X ENS PSI 2014**

Mots-clés : terme général équivalent à l'inverse de la somme partielle

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} a_n \mathrm{S}_n = 1$.

1. Montrer que la série de terme général a_n diverge et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{S}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{S}_n$.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_{n+1}^2 - \mathrm{S}_n^2 = 2$.
4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs telles que la série de terme général v_n diverge et $u_n \sim v_n$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$. En déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
5. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $\lim_{n\to+\infty} b_n \sum_{k=0}^{n} b_k = 1$.

Exercice 2.131 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que la série de terme général u_n converge. Nature des séries de termes généraux $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ et $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2}$?
2. On suppose que la série de terme général u_n diverge. Nature des séries de termes généraux $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ et $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2}$?

Exercice 2.132 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour toute suite $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $|b_n|^2$ soit convergente, la série de terme général $a_n b_n$ est convergente. Montrer que la série de terme général $|a_n|^2$ est convergente.

Exercice 2.133 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{\sigma(n)}{n^2}$.

Exercice 2.134 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soient P et Q deux polynômes réels sans racine dans $\mathbb{N}$. Étudier la convergence de la série de terme général $\ln\left(\frac{|\mathrm{P}(n)|}{|\mathrm{Q}(n)|}\right)$.

Exercice 2.135 ★ **CCP PSI 2011**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $\frac{f'(x)}{f(x)} \to \ell \in \mathbb{R}$ quand $x \to +\infty$. Montrer que

1. Si $\ell > 0$, la série de terme général $f(n)$ diverge.
2. Si $\ell < 0$, la série de terme général $f(n)$ converge.
3. Si $\ell = 0$, tout est possible.

Exercice 2.136 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 2.137 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\frac{f'}{f}$ a pour limite $-\infty$ en $+\infty$.

1. Donner un exemple de telle fonction.
2. Montrer la convergence et déterminer la limite de la suite de terme général $\frac{f(n+1)}{f(n)}$.
3. Nature de la série de terme général $f(n)$?

Exercice 2.138 ★ **X ESPCI PC 2015**

Mots-clés : règle de Raabe-Duhamel

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels > 0. On suppose que $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to \ell$.

1. Montrer que si $\ell > 1$ alors la série de terme général a_n converge.
2. Montrer que si $\ell < 1$ alors la série de terme général a_n diverge.

Exercice 2.139 ★ **Centrale PC 2015**

Déterminer pour quels α et $\beta > 0$ la convergence des séries à termes positifs u_n et v_n garantit celle de $\sum u_n^\alpha v_n^\beta$.

2.13.2 Séries à termes complexes

Exercice 2.140 ★ **ENS Cachan MP 2007**

Soit (a_n) une suite réelle. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\sum |a_n|$ converge ;

(ii) pour toute suite réelle (b_n) de limite nulle, $\sum a_n b_n$ converge.

Exercice 2.141 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to 0$ et la série de terme général u_n diverge. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n = \lambda$.

Exercice 2.142 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telle que la série de terme général $|b_n|$ converge, la série de terme général $a_n b_n$ soit convergente. Montrer que la suite (a_n) est bornée.

Exercice 2.143 ★ **Centrale PSI 2010**

sRMS 2009 646 Mines Ponts PC

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général u_n est convergente. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k u_k = \mathrm{o}(n)$.

Exercice 2.144 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Centrale PC 2015**

sRMS 2008 978 CCP PSI

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ périodique de période 1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général $\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

sRMS 2011 1082 TPE PSI

Exercice 2.145 ★ **CCP PC 2012**

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 1–périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$.

sRMS 2006 1074 CCP PSI

1. *Montrer que $u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$.*
2. *Nature de la série de terme général u_n ?*

sRMS 2008 979 CCP PSI

Exercice 2.146 ★ **Mines Ponts PC 2015**

sRMS 2015 839 Centrale PSI

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la série de terme général u_n converge.

Exercice 2.147 ★ **X ESPCI PC 2014**

sRMS 2014 1007 Centrale PC

Soient $f \in \mathscr{C}^3([-1,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n[f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n})] - 2f'(0)$. Montrer que la série de terme général u_n converge.

sRMS 2007 940 CCP PC

2.13.3 Étude de séries numériques réelles de signe fixe particulières

Exercice 2.148 ★ **X ESPCI PC 2015**

sRMS 2011 1134 CCP PC

Mots-clés : irrationalité de e

Montrer que e est irrationnel.

sRMS 2014 749 Mines Ponts PC

Exercice 2.149 ★ **X ESPCI PC 2012**

Mots-clés : série exponentielle modifiée

sRMS 2010 1070 CCP PC

Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 2.150 ★ **Centrale PSI 2010**

Mots-clés : série de Riemann modifiée

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$ ne comporte pas de 9 dans son écriture décimale, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$; sinon, on pose $u_n = 0$. Discuter, suivant la valeur de α, la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2.151 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Mots-clés : série de Bertrand

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$?

Exercice 2.152 ★ **Centrale PSI 2014**

Nature de la série de terme général $u_n = (\ln n)^{-\ln(\ln n)}$.

Exercice 2.153 ★ **Centrale PC 2009**

sRMS 2007 941 TPE PC

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = (\frac{\pi}{2})^\alpha - (\arctan n)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$?

Exercice 2.154 ★ **CCP PSI 2011**

sRMS 2013 904 Centrale PC

Nature, suivant $a \in \mathbb{R}^*$, de la série de terme général $u_n = (n+2)^a - 2(n+1)^a + n^a$?

Exercice 2.155 ★ **Mines Ponts PC 2009 , TPE PC 2014**

sRMS 2014 1240 ENSEA PSI

Déterminer, en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $u_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} + c\sqrt{n+2}$. Calculer la somme si la série converge.

Exercice 2.156 ★ **Mines Ponts PC 2009 , CCP PC 2015**

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$. À quelle condition la série de terme général u_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer la somme.

Exercice 2.157 ★ **CCP PSI 2008**

Convergence et somme de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$.

Exercice 2.158 ★ **TPE PSI 2011**

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Nature de la série de terme général $v_n = \frac{u_n e^{-u_n}}{n^2}$?

Exercice 2.159 ★ **CCP PSI 2006**

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n^\alpha}$.

Exercice 2.160 ★ **CCP PSI 2008**

Convergence et somme de $\sum_{n\geq 1} \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Exercice 2.161 ★ **Centrale PSI 2015**

Discuter selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $a^{\lfloor n \rfloor}$.

On peut supposer qu'il s'agit plutôt de la série de terme général $a^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$.

Exercice 2.162 ★ **Centrale PC 2014**

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré d'entier et $u_n = \frac{1}{n^2}$ sinon. Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 2.163 ★ **CCP PC 2007**

Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}) - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Montrer que (u_n) converge ; on note ℓ sa limite. Trouver un équivalent de $\ell - u_n$.

Exercice 2.164 ★ **CCP PC 2011**

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n}{1+b^n}$.

Exercice 2.165 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soient a, b dans $\mathbb{R}_+^*$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$?

Exercice 2.166 ★ **CCP PC 2010**

Soit, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$: $u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$.

1. *Si $p = 0$ ou $p = 1$, montrer que la série de terme général u_n diverge.*

   On suppose dans la suite que $p \geq 2$ et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. *Montrer que $(n+p+1)u_{n+1} = (n+1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $S_n = \frac{1}{p-1}(1-[n+1]u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
3. *Soit $v_n = (n+1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. En déduire que la série de terme général u_n converge.*
4. *Déterminer la somme de la série de terme général u_n.*

Exercice 2.167 ★ **TPE PC 2007**

Nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n^2})$.

Exercice 2.168 ★ **Centrale PC 2013**

Nature de la série de terme général $u_n = \sqrt{\ln(n^2+1)} - \sqrt{\ln(n^2 + \frac{1}{2})}$?

Exercice 2.169 ★ **ENSEA PSI 2014**

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}((n+1)^{1/3} - n^{1/3})$?

Exercice 2.170 ★ **TPE PC 2011** sRMS 2013 660 Mines Ponts PC

Si $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le nombre de chiffres de n. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n a^{p_n}}$. sRMS 2015 458 X ESPCI PC

Exercice 2.171 ★ **TPE PC 2010**

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \arctan(\frac{1}{n^2+3n+3})$. sRMS 2015 730 Mines Ponts PC

1. *Montrer que la série de terme général u_n est convergente.*
2. *Calculer la somme de la série.* Ind. *Écrire $\frac{1}{n^2+3n+3} = \frac{a-b}{1+ab}$ avec $a = b+1$.* sRMS 2015 999 CCP PSI

Exercice 2.172 ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série de terme général $u_n = x^{1/n} - 1$?

Exercice 2.173 ★ **Mines Ponts PSI 2014**

Nature de la série de terme général $u_n = \operatorname{argch}(n) - \operatorname{argsh}(n)$?

Exercice 2.174 ★ **Centrale PC 2014** sRMS 2007 914 TPE PSI

Soit, pour $n \geqslant 1$, $\quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. sRMS 2015 997 CCP PSI

1. *Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$.*
2. *Nature, suivant $a > 0$, de la série de terme général a^{H_n} ?* sRMS 2009 1038 Centrale PC

Exercice 2.175 ★ **CCP PSI 2014**

Nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} n^a(1-\cos(\frac{1}{n}))$ et $\sum_{n\geqslant 1}(n^{1/n^2}-1)$. sRMS 2014 753 Mines Ponts PC

Exercice 2.176 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Nature de la série de terme général $u_n = (\cos(\frac{1}{n^\alpha}))^n$, $\alpha > 0$?

Exercice 2.177 ★ **CCP PSI 2014** sRMS 2014 1233 CCP PSI

Convergence et somme des séries $\sum_{n\geqslant 2} \ln(1+\frac{2}{n(n+3)})$ et $\sum_{n\geqslant 2} \ln(\cos(\frac{x}{2^n}))$, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 2.178 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soient (u_n) une suite à termes positifs et (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n})$. Montrer que la suite (v_n) converge si et seulement si la série de terme général u_n converge.

2.13.4 Le terme général comporte une intégrale

Exercice 2.179 ★ **CCP PC 2011**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. sRMS 2010 1079 CCP PC

1. *Montrer que (a_n) est décroissante. Calculer a_0 et a_1.*
2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.*
3. *Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?* sRMS 2009 727 Mines Ponts PC

Exercice 2.180 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Nature de la série de terme général $u_n = e^{-n^4}\int_0^n e^{t^4}\,\mathrm{d}t$? sRMS 2009 1040 Centrale PC

Exercice 2.181 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{-n^3}\int_0^n e^{t^3}\,\mathrm{d}t$. Étudier (u_n). Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 2.182 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \int_0^{\pi/2}(\cos(\frac{\pi \sin x}{2}))^n \mathrm{d}x$. Si $\alpha > 0$, nature de la série de terme général u_n^α ?

Exercice 2.183 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $\alpha \in [1,2]$ et $u_n = \int_0^1 \cos(n^\alpha t^2)\,\mathrm{d}t$. Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 2.184 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} |\sin(at)| e^{-n\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Étudier la série de terme général u_n.

Exercice 2.185 ★ **CCP PSI 2015**

Nature de la série de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}\,\mathrm{d}x$.

2.13.5 Le terme général comporte une somme, produits de Cauchy

Exercice 2.186 ★ **TPE PSI 2007**

Pour $n \geqslant 2$, soit $a_n = \sum_{k=2}^{n}(\ln k)^2$. Nature de la série de terme général $\frac{1}{a_n}$?

Exercice 2.187 ★ **CCP PSI 2015**

Soient $\alpha > 1$ et $\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Encadrer R_n et en déduire un équivalent de R_n.

Exercice 2.188 ★ **Centrale PC 2009**

Déterminer la nature de la suite, puis de la série, de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+(n-k)^2}$.

Exercice 2.189 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $u_n = \ln(\exp(\mathrm{S}_n) - 1)$. Nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 2.190 ★ **CCP PSI 2014**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$.

1. *Montrer que la série de terme général u_n est convergente.*
2. *Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.*
   (a) *Démontrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln n$.*
   (b) *Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{H}_{2n+1} - \mathrm{H}_n) = \ln 2$.*
   (c) *En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.*

Exercice 2.191 ★ **CCP PC 2010**

On pose $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Convergence et calcul de $\sum_{n\geqslant 1} w_n$.

2.13.6 Le terme général comporte un produit

Exercice 2.192 ★ **Mines Ponts PC 2009 , Centrale PC 2013 , Mines Ponts PC 2014**

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{n!}{(a+1)\cdots(a+n)}$.

Exercice 2.193 ★ **Centrale PC 2009**

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.

1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que la série de terme général u_n converge.*
   Indication : on pourra considérer la suite de terme général $w_n = \ln(n^{b-a}u_n)$.
   On suppose désormais que (a,b) vérifie cette condition.
2. *Montrer que nu_n tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.*
3. *Calculer la somme de la série de terme général u_n.*

Exercice 2.194 ★ ***Mines Ponts PC 2012***

Nature de la série de terme général $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)^{-1/n^2}$?

Exercice 2.195 ★ ***Mines Ponts PC 2012***

On pose pour $n \geqslant 2$, $u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(2 - 3^{1/k}\right)$.

1. *Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.*
2. *Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.*

2.13.7 Le terme général comporte une suite récurrente

Exercice 2.196 ★ ***TPE PC 2006***

Soit (a_n) une suite de réels positifs. On définit (u_n) par : $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(a_n + \tan u_n)$. Montrer que la suite (u_n) converge, et que $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} u_n < \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.197 ★ ***TPE PSI 2008***

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in]2,+\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Étudier la série $\sum_{n\geqslant 0}(2-u_n)$.

Exercice 2.198 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

1. *Déterminer un équivalent de u_n.*
2. *Nature de la série de terme général u_n ?*

Exercice 2.199 ★ ***Centrale PSI 2015***

Soit (a_n) définie par $a_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$. Étudier la suite (a_n). La série de terme général a_n converge-t-elle ?

Exercice 2.200 ★ ***CCP PSI 2013***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Nature de la série de terme général u_n.

Exercice 2.201 ★ ***Mines Ponts PSI 2014***

Soit la suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1. *Étudier la convergence de cette suite.*
2. *Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.*
3. *Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.*
4. *Étudier la série de terme général $\ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.*

Exercice 2.202 ★ ***Centrale PSI 2014***

Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $(f \circ f)(x) \geqslant 1$.*
2. *Montrer qu'il existe un unique $\ell \in [1,+\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.*
3. *Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que la suite u est bien définie et déterminer la nature de la série de terme général $\ell - u_n$.*

Exercice 2.203 ★ ***CCP PC 2015***

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$.

1. *Étudier la convergence de la suite u.*
2. *On pose $v_n = (\frac{n+1}{n})^{3/2} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Déterminer $a > 0$ tel que $\ln(v_n) = \frac{a}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. La série $\sum \ln(v_n)$ converge-t-elle ?*
3. *Montrer qu'il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\mathrm{C}}{n^{3/2}}$.*
4. *Montrer que $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est définie sur $[-1,1]$.*
5. *Montrer que S est solution d'une équation différentielle du type $(ax^2+bx)f'(x) + (cx+d)f(x) = e$.*

2.13.8 Étude de séries numériques complexes particulières

Exercice 2.204 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n+\sin^2 n)}$?

Exercice 2.205 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$?

Exercice 2.206 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n+1}}$?

Exercice 2.207 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et tel que la série de terme général u_n diverge.

Exercice 2.208 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Que dire de la nature d'une série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} + \frac{2}{n^{2/3}} + o(\frac{1}{n^{2/3}})$?

Exercice 2.209 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Soit $a \in \mathbb{R}$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{a+(-1)^n\sqrt{n}}{a+(-1)^{n-1}\sqrt{n}+n}$.

Exercice 2.210 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}+(-1)^{n-1}}$.

Exercice 2.211 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Nature de la série de terme général $u_n = \left(1 + (-1)^n\frac{\ln n}{n^{1/5}}\right)^{1/4} - 1$.

Exercice 2.212 ★ ***Mines Ponts PC 2009***

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{4/5}+(-1)^n n^{2/3}(\ln n)^3}$. Montrer que u_n est défini pour n assez grand. Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 2.213 ★ **Centrale PSI 2009**
Étudier les séries de termes généraux

$$u_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n - a\left(1+\frac{b}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln(n)/n}.$$

Exercice 2.214 ★ **CCP PSI 2015**
On pose $a_n = \int_n^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$. *Déterminer la nature de* $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$.

Exercice 2.215 ★ **Mines Ponts PC 2009**
Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi n^3(\ln(\frac{n}{n-1}))^2)$.

Exercice 2.216 ★ **Mines Ponts PC 2009**
Donner, suivant la valeur de $p \in \mathbb{Z}$, *la nature de la série de terme général* $u_n = \sin\left(\frac{2n^2+pn-1}{2n+1}\pi\right)$.

Exercice 2.217 ★ **CCP PSI 2010**
Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1})$.

Exercice 2.218 ★ **X ESPCI PC 2012**
Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi e n!)$?

Exercice 2.219 ★ **Mines Ponts PC 2015**
Étudier, en fonction de $p \in \mathbb{N}^*$, *la convergence de la série de terme général* $\sin^p(\pi e n!)$.

Exercice 2.220 ★ **Mines Ponts PC 2013**
Nature de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right)$?

Exercice 2.221 ★ **CCP PC 2013 , X ESPCI PC 2015**
Nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$?

Exercice 2.222 ★ **X ESPCI PC 2014**
Nature de la série de de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$?

Exercice 2.223 ★ **X ESPCI PC 2014**
Nature de la série de terme général $u_n = \cos(\pi n\sqrt{1+n^2})$?

Exercice 2.224 ★ **CCP PC 2007 , Centrale PSI 2015**
Nature de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$?

Exercice 2.225 ★ **Navale PC 2010**
Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}}$ *avec* $\alpha > 0$?

Exercice 2.226 ★ **Petites Mines PC 2012 , Mines Ponts PC 2015**
Donner la nature de la série de terme général $\ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha})$ *en fonction de* α.

Exercice 2.227 ★ **CCP PSI 2007**
Nature de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t\sin t}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$.

Exercice 2.228 ★ **TPE PC 2007 , CCP PSI 2014**
Nature et somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2}(\cos x)^n \mathrm{d}x$.

Exercice 2.229 ★ **TPE PC 2011**
Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{1+x}\mathrm{d}x$.

Exercice 2.230 ★ **RMS 2008 980 Télécom Sud Paris PSI, Mines Ponts PC 2013 , Mines Ponts PC 2014**
On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 \in \mathbb{R}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n\cos(u_{n-1})}{n}$. *Nature de la série de terme général* u_n ?

Exercice 2.231 ★ **ENSAM PSI 2011**
Soient a *un réel quelconque et* $u_n = (e-(1+\frac{1}{n})^n)^a$.

1. *Étudier la convergence de la série de terme général* u_n.
2. *Étudier la convergence de la série de terme général* $(-1)^n u_n$.

Exercice 2.232 ★ **Petites Mines PC 2010**
On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Déterminer la limite de* (u_n). *Étudier la monotonie de* (u_n).
2. *Donner une relation entre* u_{n+1} *et* u_n. *En déduire un équivalent de* u_n.
3. *Nature de la série de terme général* u_n ? *Nature de la série de terme général* $(-1)^n u_n$?

Exercice 2.233 ★ **RMS 2014 1238 Écoles des Mines PSI**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k\sqrt{k}$ *et* $t_n = s_n + s_{n+1}$.

1. *Nature de* $\sum(t_{n+1}-t_n)$?
2. *En déduire que* (t_n) *converge vers une limite* < 0, *puis que* $s_n \sim (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{2}$ *quand* n *tend vers l'infini.*
3. *Nature de* $\sum \frac{1}{s_n}$?

Exercice 2.234 ★ **Centrale PC 2015**

1. *Calculer* $\tan(\frac{\pi}{8})$.
2. *Montrer que* $\pi = 8\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$.
3. *Montrer que* $|\frac{\pi}{8} - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}| \leqslant \frac{(\sqrt{2}-1)^{2N+3}}{2N+3}$. *En déduire une méthode pour obtenir une approximation de* π *à* 10^{-3} *près.*

2.13.9 Calculs de sommes, cas où le théorème des séries alternées ne s'applique pas directement

Exercice 2.235 ★ **ENSEA PC 2006**
Convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 2.236 ★ **Mines Ponts PSI 2013**
Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 2.237 ★ **TPE PC 2012**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{3n+1} = \frac{1}{4n+1}$, $u_{3n+2} = \frac{1}{4n+3}$ *et* $u_{3n+3} = -\frac{1}{2n+2}$. *Montrer que la série de terme général* (u_n) *converge et calculer sa somme.*

Exercice 2.238 ★ **Centrale PSI 2009**
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *la suite définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{3n} = \frac{2}{\ln(n+3)}, \quad u_{3n+1} = -\frac{1}{\ln(n+3)}, \quad u_{3n+2} = -\frac{1}{\ln(n+3)}.$$

1. *Montrer que la série de terme général* u_n *est convergente.*
2. *Soit* $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On suppose que la série de terme général* a_n *est convergente. La série de terme général* a_n^2 *est-elle convergente ?*

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. Montrer que la série de terme général u_n^p est divergente.

Exercice 2.239 ★ Mines Ponts PSI 2013

1. Trouver un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.
2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + C + o(1)$.
3. On admet que $= \ln(n) + \gamma + o(1)$ quand n tend vers l'infini. Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$; en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 2.240 ★ Centrale PSI 2015

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2.241 ★ Mines Ponts PSI 2013

Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$.

1. Montrer que (S_n) est bornée.
2. En remarquant que $S_n - S_{n-1} = \cos(n\theta)$, montrer que la série de terme général u_n converge.
3. En utilisant l'inégalité $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 2.242 ★ X ESPCI PC 2009

Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{\sqrt{n(n+1)}}$?

Exercice 2.243 ★ Mines Ponts PC 2012

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor$.

Exercice 2.244 ★ Centrale PC 2009

On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Étudier la convergence de la série de terme général u_n, ainsi que celle de son carré de Cauchy.

Exercice 2.245 ★ Mines Ponts PC 2014

Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi n^5 (\ln(\frac{n}{n-1}))^2)$?

Exercice 2.246 ★ CCP PSI 2014

Pour $\alpha > 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{q=n}^{+\infty} \frac{1}{q^\alpha}$.

1. Montrer l'existence de v_n, et en déterminer un équivalent.
2. Soit $x_n = \frac{v_{n^2}}{v_n}$. Discuter la nature de $\sum x_n$ et de $\sum (-1)^n x_n$.

Exercice 2.247 ★ CCP PC 2015

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2} = u_{n+1} + \lambda u_n$.

1. On suppose que la suite (u_n) converge. Montrer que la limite est nulle.
2. On suppose $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$. Montrer que $X^2 - X - \lambda$ admet deux racines réelles. Montrer que la suite (u_n) converge.
3. On suppose $-1 < \lambda < -\frac{1}{4}$. Montrer que $X^2 - X - \lambda$ admet deux racines r et $\bar{r}$. Comparer $|r|$ et 1. La suite (u_n) converge-t-elle ?
4. On suppose que $\lambda = -\frac{1}{4}$. Expliciter u_n.
5. Montrer que la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite (u_n) converge.
6. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.
7. Étudier le cas $\lambda \geqslant 2$.