Chapitre 7

Séries entières

7.0.1 Rayon et domaine de convergence

Exercice 7.1 ★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2+1}{3^n} z^n$,
2. $\sum_{n\geqslant 0} e^{-n^2} z^n$,
3. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\ln n}{n^2} z^{2n}$,
4. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$,
5. $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$,
6. $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} z^n$.

Exercice 7.2 ★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) z^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^{n^2}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} a_n z^n$ où $a_n = \ln \dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$,
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où $a_n = \dfrac{5+(\sin n)^n}{2-\cos n}$,
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{E}(e^n) z^n$.

Exercice 7.3 ★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} z^{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{-\operatorname{sh}^a n} z^n$, $a \in \mathbb{R}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{n! n^n} z^{2n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n! z^{n^2}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n!)^{1/n}} z^n$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ où a_n est le nombre de diviseurs de l'entier n .

Exercice 7.4 ★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n^\alpha} z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\sqrt[3]{n^3+n+2} - \sqrt{n^2+1}\right) z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+n}{2^n+n!} z^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln\left(\sqrt{n}+1\right)}{\ln\left(\sqrt{n}-1\right)} z^n$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln \frac{n^2-1}{n^2+n+2} z^n$;
6. $\displaystyle\sum_{n_geq1} \left(\sqrt{n}\right)^n z^n$.

Exercice 7.5 ★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \arctan n z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2\operatorname{sh} n}{n(n+1)} z^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{5^n}{n^3+1} z^{2n+1}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{\binom{2n}{n}}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 (1+t^2)^n \,\mathrm{d}t z^n$.

Exercice 7.6 ★★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin n z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n} z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n+\sin n} z^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{n} \sin n z^n$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (n^2+2n) \sin n z^n$.

Exercice 7.7 ★

Soit a_n le chiffre d'indice n de l'écriture décimale de π. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

Exercice 7.8 ★★

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* $\mathrm{R}>0$

1. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ *?*
2. *Même question avec* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 x^n$.

Exercice 7.9 ★

Que peut-on dire du rayon de convergence R *de la série entière* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *dans le cas où :*

1. *la suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée ;*
2. *la suite* (a_n) *est convergente ;*
3. *il existe* $k>0$ *tel que* $|a_n|\leqslant k^n$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 7.10 ★ **Classique**

Montrer que si les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$ *ont toutes deux le même rayon de convergence* R *alors le rayon de convergence de* $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *est égal à* R.

Exercice 7.11 ★★

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes non nuls telle qu'il existe* $l_1\in\mathbb{R}$ *et* $l_2\in\mathbb{R}$ *avec :*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| = l_2.$$

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ *?*

Exercice 7.12 ★ **CCP 2003**

On pose :

$$a_n = \ln\left(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right).$$

1. *Montrer que le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum a_n x^n$ *est au moins égal à* 1.
2. *Calculer* R.
3. *Étudier la convergence de la série pour* $x=\pm\mathrm{R}$.

Exercice 7.13 ★ **CCP 2013**

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ *puis* $\sum(-1)^n u_n$ *où :*

$$u_n = \arccos\left(\frac{1}{n}\right) - \arccos\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

Exercice 7.14 ★

Soit $\sum a_n$ *une série convergente.*

1. *Montrer que la suite* (a_n) *est bornée.*
2. *En déduire que la série entière* $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ *a un rayon de convergence infini.*

Exercice 7.15 ★

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, *on pose* $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$.

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série* $\sum a_n z^n$.
2. *Prouver qu'il y a convergence en tout point du cercle d'incertitude.*

Exercice 7.16 ★

1. *Soit* $\alpha\in\mathbb{R}$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum n^\alpha z^n$.
2. *Soit une fraction rationnelle* $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X})}{\mathrm{Q}(\mathrm{X})}\in\mathbb{C}(\mathrm{X})$ *telle que* $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{Q}(n)\neq 0$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \mathrm{F}(n) z^n$.

Exercice 7.17 ★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\sum_{n\geqslant 0} 3^n z^{2n}$.
2. $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *où* $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$.
3. $\sum_{n\geqslant 0} \left(2+(-1)^n\right) z^n$.

Exercice 7.18 ★

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* R *et on pose pour* $x\in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. *On suppose que* $\sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{R}^n$ *converge absolument. Montrer que* $f(x) \xrightarrow[x\to\mathrm{R}^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{R}^n$.

Exercice 7.19 ★

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{n^2}$.

1. *Déterminer son rayon de convergence* R.
2. *On définit la fonction*

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}]-\mathrm{R},\mathrm{R}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}\end{array}\right.$$

Déterminer un équivalent de f *lorsque* $x\to\mathrm{R}^-$.

Exercice 7.20 ★

Soit une série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ *de rayon de convergence* $\mathrm{R}>0$.

1. *Soit* $\alpha\in]0,1[$. *Montrer que la série entière* $\sum_{n\geqslant 1} a_n e^{n^\alpha} z^n$ *a pour rayon de convergence* R *aussi.*

2. Que vaut le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

Exercice 7.21 ★

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R = \infty$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ sa somme.

1. Soit $r > 0$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$,
$$a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} \, d\theta$$
2. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.
3. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leqslant P(|z|)$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 7.22 ★

Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} n^\alpha a_n z^n$ a le même rayon de convergence.

Exercice 7.23 ★ **Oral CCP MP**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

Exercice 7.24 ★ **Oral CCP MP**

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

7.0.2 Calcul de la somme d'une série entière

Exercice 7.25 ★ **École de l'air**

On considère la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \frac{n^2}{n!}$.

1. Déterminer son rayon de convergence ;
2. Calculer sa somme.

Exercice 7.26 ★ **CCP 2013**

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} x^{2n}$.

Exercice 7.27 ★ **TPE 2011 pour 9.**

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. $\sum_{n\geqslant 0} n x^{n+1}$;
2. $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n n x^{2n+1}$;
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n+1}$;
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n}$;
5. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$;
6. $\sum_{n\geqslant 0} (\operatorname{ch} n) x^n$;
7. $\sum_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n$;
8. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!} x^{3n}$;
9. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n(2n-1)} x^n$.

Exercice 7.28 ★ **CCP 2007**

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ avec
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{n!}{1.3.\ldots.(2n+1)}.$$
2. On pose, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle :
$$(E) \ : (x^2 - 2) y' + xy + 2 = 0.$$
3. En déduire une expression de f.
4. Est-ce que la série $\sum a_n x^{2n+1}$ converge pour $x = \sqrt{2}$?

Exercice 7.29 ★ **Type CCP**

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière :
$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1} (-1)^n x^n.$$
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par sa somme f.
3. En déduire le calcul de f.

7.0.3 Étude de la somme d'une série entière

Exercice 7.30 ★

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

1. Exprimer $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f.
2. Même question avec $\sum_{n\geqslant 0} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 7.31 ★

Soit $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R=1$. Pour tout n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^n a_k$ et $g(z)=\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$.

1. *Montrer que g a aussi un rayon de convergence $R=1$.*
2. *Calculer $g(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$.*

Exercice 7.32 ★

On considère la fonction f donnée par

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n.$$

1. *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.*
2. *Étudier la convergence en R et en $-R$.*
3. *Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x\to 1^-$.*
4. *Montrer que quand $x\to 1^-$,*
$$(1-x)f(x)\to 0.$$

Exercice 7.33 ★

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. *Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.*
2. *Étudier la convergence de la série entière en 1 er en -1.*
3. *Montrer que f est continue en -1.*
4. *Déterminer la limite de f en 1.*

Exercice 7.34 ★

On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$ et de somme $f(z)$.

1. *Montrer que pour tout $0<r<R$,*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta$$
2. *Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0.*
3. *On suppose maintenant que $R=+\infty$ et qu'il existe $P\in\mathbb{R}_N[X]$ tel que $|f(z)|\leqslant P(|z|)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $f\in\mathbb{C}_N[X]$.*

Exercice 7.35 ★ **Oral Centrale PSI**

On pose $f: x\mapsto \sum_{n=2}^{+\infty}(\ln n)x^n$ et $g: x\mapsto \sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$.

1. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières définissant ces deux fonctions.*
2. *Montrer que g est définie et continue sur $[-1,1[$.*
3. *Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.*
4. *Montrer que f est continue sur $[-1,1[$ et trouver des équivalents de f et g en 1^-.*

Exercice 7.36 ★ **Oral Mines-Ponts PC, séries entières et intégrales de Wallis**

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$.

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.*
2. *Quel est l'ensemble de définition de f ?*
3. *Déterminer f sur $]-1,1[$.*

Exercice 7.37 ★ **Oral CCP MP**

On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, u_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. *Étudier la convergence simple de cette série.*
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x\in D$.
2. (a) *Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.*
   (b) *La fonction S est-elle continue sur D ?*

Exercice 7.38 ★ **Oral CCP MP**

1. *Démontrer que la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$.*
2. *On pose : $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$.*
   Démontrer que $\forall (z,z')\in\mathbb{C}^2,\ f(z)\times f(z')=f(z+z')$, sans utiliser le fait que $f(z)=e^z$.
3. *En déduire que : $\forall z\in\mathbb{C},\ f(z)\neq 0$ et $\dfrac{1}{f(z)}=f(-z)$.*

7.0.4 Continuité en une extrémité de l'intervalle de convergence

Exercice 7.39 ★

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R=1$. Pour $x\in]-1,1[$, on définit

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n.$$

On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $[0,1[$.

1. *Montrer que $\sum a_n$ est convergente.*

2. Montrer que $\lim_{1^-} S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 7.40 ★

Soit (f_n) la série de fonctions données par :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = (-1)^n \ln(n) x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$. On note S sa somme.
2. Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}\right).$$

3. En déduire que S admet une limite en 1^- et que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

4. Calculer cette limite en utilisant la formule de Wallis :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1\times 3\times \ldots \times (2n-1)}{2\times 4\times \ldots \times (2n)} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 7.41 ★★★ **Principe des zéros isolés, X 2003**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ lorsque $|z| < R$.
On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Montrer qu'il existe un disque D de centre 0 et de rayon $\eta > 0$ dans $\mathbb{C}$ tel que :

$$\forall z \in D\setminus\{0\}, \quad f(z) \neq 0.$$

Le résultat reste-t-il valable si on suppose seulement que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 ?

Exercice 7.42 ★ **ENS Lyon 1998**

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose $M = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$ pour tout réel $\rho \in [0, R[$.

1. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} \leqslant M_\rho^2.$$

2. Montrer que si $R = +\infty$ et si f est bornée alors f est constante.

7.0.5 Équivalent en une extrémité de l'intervalle de convergence

Exercice 7.43 ★

Soit (a_n) une suite réelle donnée par la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_{n+1} = \ln(1+a_n) \end{cases}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$. On note S sa somme.
2. Étudier la convergence de $\sum a_n x^n$ en $x = -R$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}.$$

4. En déduire un équivalent simple de (a_n). On pourra pour ce faire utiliser le théorème de Cesàro :

> THÉORÈME 7.1 ***Théorème de Cesàro***
> *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe convergeant vers une limite l. Alors*
> $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

5. Donner un équivalent de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ quand $x \to R^-$.

7.0.6 Fonctions développables en séries entières

Exercice 7.44 ★

Soit $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}^\infty([-a,a], \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(n)}\|_{\infty,[-a,a]} \leqslant AB^n n!.$$

Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle ouvert centré en 0.

Exercice 7.45 ★

Soient $R > 0$ et $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[, \quad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Montrer la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ pour $x \in]-R,R[$.

Exercice 7.46 ★

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ *admet un DSE de rayon de convergence* $\mathrm{R} \geqslant 1$.

Exercice 7.47 ★

1. *Pour quels réels* x *l'intégrale suivante existe-t-elle :*
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t}\,\mathrm{d}t?$$
2. *Donner alors sa valeur.*
3. *Montrer que*
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^t}\,\mathrm{d}t$$
est développable en série entière et exprimer ce développement.

Exercice 7.48 ★

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum n^\alpha z^n$.
2. *Soit une fraction rationnelle* $\mathrm{F(X)} = \dfrac{\mathrm{P(X)}}{\mathrm{Q(X)}} \in \mathbb{C}(\mathrm{X})$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Q}(n) \neq 0$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \mathrm{F}(n) z^n$.

Exercice 7.49 ★

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 3^n z^{2n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ pair} \\ 3^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(2+(-1)^n\right) z^n$.

Exercice 7.50 ★

Montrer que $f : x \mapsto e^x \int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t}$ *est DSE.*

Exercice 7.51 ★ **Oral CCP MP**

1. *Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.*
2. *Développer en série entière au voisinage de* 0, *en précisant le rayon, la fonction* f : $x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?.

Exercice 7.52 ★ **Oral CCP MP**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe telle que la suite* $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite.*

1. *Démontrer que les séries entières* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ *ont le même rayon de convergence.*

   On le note R.
2. *Démontrer que la fonction* $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur l'intervalle* $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

Exercice 7.53 ★ **Oral CCP MP**

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $\mathrm{S}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. *Donner le développement en série entière en 0 de la fonction* $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ *et précisez le rayon de convergence.*
3. (a) *Déterminer* $\mathrm{S}(x)$.

   (b) *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*
$$f(0) = 1,\quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ pour } x > 0,\quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ pour } x < 0\ .$$
   Démontrer que f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 7.54 ★★ **Centrale 2016**

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *la suite donnée par :*
$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \geqslant 2, \quad a_{n+1} = \dfrac{n a_n}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (k+1) a_{k+1} a_{n-k} \end{cases}.$$

On considère, là ou elle est définie, la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. *On suppose que* (a_n) *est bornée. Montrer que*
$$f(x) f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x.f(x)\right).$$
   En déduire $f(x)$
2. *En déduire* (a_n).
3. *Question supplémentaire : Que peut-on dire de l'hypothèse* (a_n) *bornée ?*

Exercice 7.55 ★ **1. CCP 2011, 6. Mines 2013**

Développer en série entière au voisinage de zéro les fonctions suivantes :

1. $f(x)=\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;
2. $f(x)=\ln\left(x^2-4x+3\right)$;
3. $f(x)=\ln\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)$;
4. $f(x)=\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$;
5. $f(x)=\int_{-\infty}^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2(t^2+1)}$;
6. $f(x)=\frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

Exercice 7.56 ★★ **Mines 2011**

Soit

$$h: x\mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$$

1. *Prolonger h par continuité en 0.*
2. *Montrer que h est développable en série entière au voisinage de 0 et écrire son développement.*

Exercice 7.57 ★★ **CCP 2013**

Soit

$$f: x\mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer explicitement $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.*
2. *Calculer les limites de f en $\pm\infty$.*
3. *Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ avec $r>0$ à préciser.*

Exercice 7.58 ★ **Centrale 2013**

On considère

$$f: x\mapsto \int_0^1 \mathrm{e}^{tx\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Étudier les variations de f.*
3. *Calculer la limite de f en $+\infty$.*
4. *Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?*
5. *Soit g une fonction définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Que peut-on dire de :*

$$\lim_{x\to+\infty} x\int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u.$$

6. *En déduire $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}u$.*

Exercice 7.59 ★★ **Centrale 2016**

Soit $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite donnée par :

$$\begin{cases} a_0=a_1=1\\ a_2=\dfrac{1}{2}\\ \forall n\geqslant 2,\quad a_{n+1}=\dfrac{na_n}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)a_{k+1}a_{n-k}\end{cases}.$$

On considère, là ou elle est définie, la fonction $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$.

1. *On suppose que (a_n) est bornée. Montrer que*

$$f(x)f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x.f(x)\right).$$

   En déduire $f(x)$
2. *En déduire (a_n).*
3. *Question supplémentaire : Que peut-on dire de l'hypothèse (a_n) bornée ?*

Exercice 7.60 ★ **CCP 2016**

Soit

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{2}&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

.

1. *La matrice C est-elle diagonalisable ?*
2. *On pose $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{2n}(k+1)\mathrm{C}^k$.*
   (a) *Trouver α_k et β_k tels que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{C}^{2k}=\alpha_k\mathrm{C}^2$ et $\mathrm{C}^{2k+1}=\beta_k\mathrm{C}$.*
   (b) *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n\in\mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_3,\mathrm{C},\mathrm{C}^2\right)$.*
3. *Soient $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, $f_1(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$ et $f_2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)x^{2n}$.*
   (a) *Rappeler le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}x^n$ et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.*
   (b) *En déduire de rayon de convergence des deux autres séries et les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.*
4. *Montrer que (S_n) converge et exprimer sa limite S en fonction de I_3, C et C^2.*
5. *calcule $(\mathrm{I}_3-\mathrm{C})^2\times\mathrm{S}$ et en déduire une autre expression de S.*

7.0.7 Développement en séries entières

Exercice 7.61 ★

Développer en série entière au voisinage de 0 :

1. $f: x\mapsto \ln\left(x^2-5x+6\right)$;
2. $g(x)=\ln(1+x+x^2)$;
3. $h(x)=e^{-x}\sin x$;
4. $i(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+tx}$.

2:43

Exercice 7.62 ★

Développer en série entière au voisinage de 0 :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
2. $g(x) = \arcsin(x)$;
3. $h(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
4. $i(x) = \mathrm{sh}(1+x)$

5:07

Exercice 7.63 ★

Développer en série entière au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

Exercice 7.64 ★

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Calculer c_n, le nieme coefficient du DSE en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{1}{(1-ax)(1-bx)}.$$

Exprimer $\sum_0^{+\infty} c_n^2 x^n$.

Exercice 7.65 ★

Calculer le DSE en 0 de $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 7.66 ★

Montrer que la fonction $f(x) = \arctan(1+x)$ est DSE au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer alors cette série entière

Exercice 7.67 ★ **Oral CCP PC**

Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^x \dfrac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Est-elle développable en série entière ? Si oui, indiquer le rayon de convergence de la série associée.

Exercice 7.68 ★

On considère la fonction

$$f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer son développement en série entière.*

0:52

Exercice 7.69 ★

On veut développer en série entière une fraction rationnelle $\mathrm{F}(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}$ avec Q scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{Q}(0) \neq 0$. On décompose pour cela la fraction rationnelle en éléments simples.

1. *Trouver le DSE de $\dfrac{1}{a-x}$, $\dfrac{1}{(a-x)^2}$. Quel-est le rayon de convergence de la série entière ?*
2. *Développer en série entière $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x^3-5x^2+8x-4}$.*

Exercice 7.70 ★

Soit $x_0 \in]-1,1[$. Développer en série entière au voisinage de x_0 la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 7.71 ★

Former le développement en série entière en 0 de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx)\,\mathrm{d}t$$

1. *en procédant à une intégration terme à terme ;*
2. *en déterminant une équation différentielle dont la fonction est solution*

Exercice 7.72 ★ **Oral CCP MP**

On pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$.

1. *Décomposer $f(x)$ en éléments simples et en déduire la primitive G de f définie sur l'intervalle $]-1;3[$ telle que $\mathrm{G}(1) = 0$.*
2. *Déterminer le développement en série entière en 0 de la fonction f et précisez le rayon de convergence.*
3. *Déduire de ce développement la valeur de $\mathrm{G}^{(3)}(0)$.*

Exercice 7.73 ★ **CCP PC 2016**

Soit F telle que $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

1. *Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que F est impaire et strictement croissante.*
3. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = 2\mathrm{F}(1)$.*
4. *Montrer que F admet une limite finie en $+\infty$.*
5. *Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ avec (a_n) une suite qu'on exprimera.*
6. *Montrer que :*
$$\left|\mathrm{F}(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}\right| \leqslant \frac{1}{4p+5}.$$
7. *En déduire que $\sum \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ converge et que sa somme vaut $\mathrm{F}(1)$.*

Exercice 7.74 ★ **CCP PC 2016**

Premier exercice :

1. *Soit F telle que $\mathrm{F}(x) = \int_0^x \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$*

2. *Montrer que* F *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Montrer que* F *est impaire et strictement croissante.*
4. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$, $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 2F(1)$.
5. *Montrer que* F *admet une limite finie en* $+\infty$.
6. *Montrer que pour tout* $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ *avec* (a_n) *une suite qu'on exprimera.*
7. *Montrer que :*
$$\left| F(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1} \right| \leqslant \frac{1}{4p+5}.$$
8. *En déduire que* $\sum \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ *converge et que sa somme vaut* $F(1)$.

exo:2005:Jan:Sun:15:52:10

exo:2005:Jan:Sun:16:05:21

Exercice 7.75 ★ ***CCP 2016***

Exercice 1 :
On pose $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \, dt$.

1. *Justifier que* F *est définie et* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* F *est impaire et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
3. *Montrer que* F *admet une limite finie quand* $x \to +\infty$ *(On ne demande pas de la calculer.).*
4. *Montrer qu'il existe une suite* $(an)_n$ *que l'on déterminera tel que l'on puisse écrire F sous la forme* $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ *pour* $x \in]-1,1[$.

exo:2004:Nov:Tue:11:53:46

exo:2005:Jan:Mon:17:10:12

7.0.8 Sommation de séries et de séries entières

Exercice 7.76 ★

Justifier la convergence puis calculer la somme de $\sum \frac{n^2}{n!}$.

Exercice 7.77 ★

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme $S(x)$ *de* $\sum \frac{x^n}{n+2}$.

_x_n

Exercice 7.78 ★

Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière $\sum \operatorname{ch} n x^n$.

_x_n

Exercice 7.79 ★ ***Centrale-Supélec MP***

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *Donner le rayon de convergence* R *et calculer la somme de la série entière* $\sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$.

3:19

Exercice 7.80 ★

Calculer en utilisant les DSE les sommes des séries numériques :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 7.81 ★

Calculer la somme de la série entière
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - 2n + 5) x^n$$

Exercice 7.82 ★

1. *Écrire le DSE de* $x^k e^x$ *et en déduire un algorithme de calcul de* $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n) \frac{x^n}{n!}$ *lorsque* P *est un polynôme.*
2. *Calculer la somme de la série entière :*
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+1)}{n!} x^n$$

Exercice 7.83 ★

Convergence et calcul de la somme des séries :

1. $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$
2. $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)2^n}$

Exercice 7.84 ★ ***Classique***

Calculer la somme de la série $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$

Exercice 7.85 ★ ***Minettes 2016***

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres réelles et complexes de* A.
2. A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *? Sur* $\mathbb{C}$ *?*
3. *On pose* $t_n = \mathrm{Tr}(An)$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n>0} t_n z^n$ *? Exprimer sa somme sur l'intervalle de convergence avec des fonctions usuelles*

7.0.9 Applications des séries entières

Exercice 7.86 ★ **Écrit banque PT**

Soit (a_n) *la suite donnée par*

$$\begin{cases} a_0 & = 1 \\ a_1 & = 1 \\ a_{n+1} & = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2 \end{cases}.$$

1. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.
2. *Déterminer le rayon de convergence* R *de* $\sum a_n x^n$.
3. *Pour tout* $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, *on pose* $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
   (a) *Montrer que* S *est solution sur* $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ *de l'équation différentielle*
   $$(1-x)y' - (1+2x)y = 0.$$
   (b) *Exprimer* S *à l'aide de fonctions usuelles.*

Exercice 7.87 ★

On note $f(x) = \arcsin^2(x)$.

1. *Trouver une relation simple entre* f'' *et* f'.
2. *Développer* f *en série entière au voisinage de* 0.

Exercice 7.88 ★

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \ : y' - 2xy = 1$$

1. *Montrer qu'il existe une solution de* (E) *développable en série entière et vérifiant* $y(0) = 0$.
2. *En déduire que* $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Exercice 7.89 ★ **Mines**

On donne trois réels a_0, a_1, a_2 *et on définit la suite* (a_n) *par*

$$\forall n \geqslant 3 \ , a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

1. *Montrer sans calculer* a_n *qu'il existe* $\mathrm{A}, k > 0$ *tels que*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leqslant \mathrm{A} k^n$$
2. *En déduire que la série entière* $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *a un rayon de convergence* $\mathrm{R} > 0$.
3. *Calculer* a_n.

Exercice 7.90 ★

On note a_n *le nombre d'arbres binaires à* n *noeuds. Montrer que* $a_0 = 1$ *et* $\forall n \geqslant 1$,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$$

Calculer ensuite a_n.

Exercice 7.91 ★

Quelles sont les solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) : \quad x y''(x) - y(x) = 1?$$

Exercice 7.92 ★ **Oral CCP MP**

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. *Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.*
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. *Est-ce que toutes les solutions de* $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ *sur* $]0;1[$ *sont développables en série entière à l'origine ?*

Exercice 7.93 ★ **Oral CCP MP**

1. *Montrer que la série* $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ *converge.*

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. *Donner le développement en série entière en 0 de* $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ *en précisant le rayon de convergence.*
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. *En déduire le développement en série entière en 0 de* $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ *ainsi que son rayon de convergence.*
4. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Exercice 7.94 ★★ **Centrale 2000**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose :*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^{2n} \, \mathrm{d}t.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. *Montrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

sRMS 2012 349 X ESPCI PC

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t^2}\cos(tx) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (xt)^{2k}}{(2k)!} e^{-t^2}.$$

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Exercice 7.95 ★ ***Les séries entières pour prouver la régulatité d'une fonction***

sRMS 2008 984 TPE PSI

Montrer que la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

sRMS 2014 768 Mines Ponts PC

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.96 ★ ***Une inégalité***

Utiliser le développement en série entière de e^x pour montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $p! > \left(\frac{p}{e}\right)^p$.

sRMS 2009 400 X ESPCI PC

Exercice 7.97 ★★ **e *est irrationnel***

Utiliser le développement en série entière de e^{-x} pour montrer que le réel e n'est pas rationnel.

sRMS 2009 989 Centrale PSI

7.1 Séries entières

7.1.1 Questions théoriques

Exercice 7.98 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : formule intégrale de Cauchy

Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R.

1. *Montrer que $\forall r \in]0, R[, \quad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})dt$.*
2. *Soit $g_n : z \mapsto z^n$. Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < r$, montrer que $g_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{g_n(re^{it})}{re^{it}-z}dt$.*
3. *Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < r < R$, montrer que $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}dt$.*

sRMS 2014 767 Mines Ponts PC

Exercice 7.99 ★ ***X ESPCI PC 2012***

sRMS 2015 749 Mines Ponts PC

Mots-clés : série entière de somme nulle sur le cercle critique

Soit D le disque fermé unité et $F : D \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière de rayon de convergence 1. On suppose que F est nulle sur le cercle unité et que $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x,y) \in D^2, \quad |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |F(x) - F(y)| \leqslant \varepsilon$. Montrer que F est nulle.

Exercice 7.100 ★ ***X ESPCI PC 2012 , ENS PC 2015***

Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$, $(b_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que le rayon de convergence de la série entière de terme général $b_n x^n$ est égal à 1, que la série de terme général b_n est divergente, et que $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

1. *Montrer que le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ est égal à 1.*
2. *Déterminer la limite de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ quand $x \to 1^-$.*
3. *Montrer que $\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}$ tend vers ℓ quand $x \to 1^-$.*

Exercice 7.101 ★ ***TPE PSI 2008***

Mots-clés : rayons de convergence comparés de $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série de terme général a_n diverge. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\frac{a_n}{S_n} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$. Comparer les rayons de convergence des séries entières de termes généraux $a_n z^n$ et $S_n z^n$.

Exercice 7.102 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Mots-clés : rayons de convergence comparés de $\sum a_n x^n$ et $\sum S_n x^n$

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $f : z \mapsto \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_0 + \cdots + a_n$. Que dire du rayon de $\sum_{n\geqslant 0} S_n z^n$?

Exercice 7.103 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : rayons de convergence comparés de $\sum a_n x^n$ et $\sum P(n) a_n x^n$

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière de terme général $a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $P(n) a_n x^n$?

Exercice 7.104 ★ ***Centrale PSI 2009***

Mots-clés : rayons de convergence comparés de $\sum a_n x^n$ et $\sum \sin(a_n) x^n$

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$ où $a_n = \lfloor \pi^n \rfloor$.*
2. *Désormais (a_n) est une suite quelconque de réels. On note R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et R' celui de la série de terme général $\sin(a_n) x^n$. Montrer que $R' \geqslant R$ avec égalité si $R > 1$.*
3. *Trouver une suite (a_n) telle que $R' = 2R$. Déterminer les valeurs prises par $\frac{R'}{R}$.*

Exercice 7.105 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Mots-clés : rayons de convergence comparés de $\sum a_n x^n$ et $\sum \sqrt{a_n} x^n$

Soient $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n} x^n$. On suppose que f et g ont pour rayons de convergence respectifs R et R' non nuls. Quel est le lien entre R et R' ?

Exercice 7.106 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

Mots-clés : rayons de convergence comparés de $\sum a_n x^n$, $\sum a_{2n} x^n$ et $\sum a_{2n+1} x^n$

Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, que $\sum a_{2n} z^n$ a un rayon de convergence $R_1 > 0$ et que $\sum a_{2n+1} z^n$ a un rayon de convergence $R_2 > 0$. Exprimer R en fonction de R_1 et R_2.

Exercice 7.107 ★ *CCP PSI 2008*

sRMS 2015 378 X ENS PSI

Mots-clés : transformée de Laplace d'une fonction entière

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *bornée.*

1. *Montrer que la série entière de terme général* $\frac{a_n x^n}{n!}$ *a un rayon de convergence infini. On note* f *sa somme.*
2. *Si* $t>1$, *montrer que* $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-tx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{t^{n+1}}$.

Exercice 7.108 ★ *X ESPCI PC 2013*

Mots-clés : théorème de Liouville

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $f: z\in\mathbb{C}\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$. *On suppose que le rayon de convergence de* f *est égal à* $+\infty$ *et que* f *est bornée sur* $\mathbb{C}$. *Montrer que* f *est constante.*

Exercice 7.109 ★ *CCP PC 2006*

Mots-clés : théorème de Liouville

Soit $\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence infini et de somme* f.

1. *Montrer que pour* $p\in\mathbb{N}$ *et* $r\in\mathbb{R}_+$, *on a* $\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t=2\pi a_p r^p$.
2. *On suppose* f *bornée sur* $\mathbb{C}$. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{M}>0$ *tel que* $\forall r\in\mathbb{R}_+^*$ $|a_p|\leqslant\frac{\mathrm{M}}{r^p}$. *En déduire que* f *est une fonction constante.*

   sRMS 2015 379 X ENS PSI
3. *On suppose qu'il existe des réels* $a>0$ *et* $b>0$, *et un entier naturel non nul* q *tels que :* $\forall z\in\mathbb{C},\quad |f(z)|\leqslant a|z|^q+b$. *Montrer que* f *est une fonction polynomiale.*
4. *On suppose que* $\forall z\in\mathbb{C},\quad |f(z)|\leqslant\exp(\mathrm{Re}\,z)$. *Montrer qu'il existe* $\mathrm{K}\in\mathbb{C}$ *tel que* $\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=\mathrm{K}\exp(z)$.

Exercice 7.110 ★ *CCP PC 2012*

Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$ *et* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dérivable telle que* $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=f(ax)$.

1. *Montrer que* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$.
2. *Exprimer* $f^{(n)}$ *en fonction de* f. *En déduire* $f^{(n)}(0)$.
3. *Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général* $\frac{1}{n!}a^{n(n-1)/2}x^n$.

   sRMS 2015 1009 ENSAM PSI
4. *On suppose* $a\in]0,1[$.
   (a) *Soit* $g: x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}a^{n(n-1)/2}x^n$. *Montrer que* g *est définie, de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$, *et vérifie* $\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=g(ax)$.
   (b) *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *telle que* $f(0)=0$ *et* $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=f(ax)$. *Montrer que* f *est nulle.*
   (c) *Déterminer l'ensemble des* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dérivables telles que* $\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=f(ax)$.

Exercice 7.111 ★ *Mines Ponts PC 2014*

Soient $r\in\mathbb{R}_+^*$ *et* E_r *l'ensemble des* $f:\ ]-r,r[\to\mathbb{R}$ *somme d'une série entière. Si* $f\in\mathrm{E}_r$, *soit* $\mathrm{T}(f): x\in]-r,r[\mapsto\int_0^x\frac{f(t)}{x+t}\mathrm{d}t$.

sRMS 2013 334 X ESPCI PC

1. *Montrer que* T *est un endomorphisme de* E_r.
2. *Déterminer les valeurs propres de* T.

Exercice 7.112 ★ *X ENS PSI 2015*

Mots-clés : théorème d'Abel de convergence radiale

Soient $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $\mathrm{S}_a: x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

1. *On suppose que la série de terme général* a_n *est convergente de somme* $\mathrm{A}\neq 0$.
   (a) *Montrer que* $\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$ *est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.*
   (b) *Soit* $g: x\in]-1,1[\mapsto\frac{\mathrm{S}_a(x)}{1-x}$. *Montrer que* g *est développable en série entière et en déduire, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *la valeur de* $g^{(n)}(0)$.
   (c) *Montrer que* $g(x)\sim_{1^-}\frac{\mathrm{A}}{1-x}$ *et en déduire* $\lim_{x\to 1^-}\mathrm{S}_a(x)$.
2. *On suppose ici que la suite* a *est positive, telle que la série entière* $\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$ *soit de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et la série de terme général* a_n *soit divergente. Que peut-on dire de* $\lim_{x\to 1^-}\mathrm{S}_a(x)$ *?*
3. *Si, pour tout* $n\in\mathbb{N},\quad a_n=(-1)^n$, *montrer que* $\lim_{x\to 1^-}\mathrm{S}_a(x)$ *est finie.*
4. *Énoncer le résultat démontré dans cet exercice.*

Exercice 7.113 ★ *X ENS PSI 2015*

Mots-clés : fonctions absolument monotones, théorème de Bernstein

1. *Soit* $f\in\mathscr{C}^\infty(]-a,a[,\mathbb{R})$ *paire telle que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et pour tout* $x\in]-a,a[,\quad f^{2n}(x)\geqslant 0$.
   (a) *Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* n *pour la fonction* f *sur l'intervalle de bornes 0 et* $x\in]-a,a[$ *; on note* $r_n(x)$ *le reste.*
   (b) *Soit* $(x,b)\in]0,a[^2$ *tel que* $x<b$. *Montrer, pour* n *pair,* $r_n(x)\leqslant(\frac{x}{b})^{n+1}r_n(b)$. *En déduire que pour tout* $x\in]-a,a[,\quad r_n(x)\to 0$ *quand* $n\to+\infty$, *puis que* f *est développable en série entière.*
2. *Soit* $g\in\mathscr{C}^\infty(]-a,a[,\mathbb{R})$ *telle que pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et pour tout* $x\in]-a,a[,\quad g^{2n}(x)\geqslant 0$. *Montrer que* g *est développable en série entière.*

Exercice 7.114 ★ *ENSAM PSI 2015*

Soit $(a_n)\in(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ *avec* $a_1\geqslant 1$. *On pose* $\mathrm{P}_n: x\mapsto\sum_{k=1}^{n}a_k x^k$.

1. *Montrer qu'il existe un unique* $x_n\in[0,1]$ *tel que* $\mathrm{P}_n(x_n)=1$.
2. *Montrer que la suite* (x_n) *converge. On note* ℓ *sa limite.*
3. *Soient* $\mathrm{S}: x\mapsto\sum_{n\geqslant 1}^{+\infty}a_n x^n$ *et* R *le rayon de convergence de cette série. Montrer que :*
   (i) $\ell=0\Rightarrow\mathrm{R}=0$ *;*
   (ii) $\ell>0\Rightarrow\mathrm{R}\geqslant\ell$ *;*
   (iii) $\ell<\mathrm{R}\Rightarrow\mathrm{S}(\ell)=1$.
4. *Déterminer* R *et* ℓ *lorsque* $a_n=\frac{1}{n}$.

Exercice 7.115 ★ *X ESPCI PC 2013*

Mots-clés : développement en série entière et polynôme caractéristique

Soient E *un* $\mathbb{C}$*–espace vectoriel de dimension* n *et* $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Montrer que, pour tout* t *assez petit, on a* $\exp(\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{Tr}(f^k)\frac{t^k}{k})=\det(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}-tf)^{-1}$.

7.1.2 Étude de séries entières particulières

Exercice 7.116 ★ **X ESPCI PC 2009**

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $n^k z^n$.

Exercice 7.117 ★ **Mines Ponts PSI 2007**

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels convergeant respectivement vers a et b. On suppose a et b strictement positifs. Soit (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = a_n u_{n+1} + b_n u_n$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$ est supérieur ou égal à la racine positive de $b\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} - 1$.

sRMS 2015 1047 CCP PC

Exercice 7.118 ★ **Centrale PC 2013**

Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$?

Exercice 7.119 ★ **X ESPCI PC 2009**

sRMS 2010 1080 CCP PC

1. *Factoriser $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - (2\operatorname{ch} a)\mathrm{X} + 1$ sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.*
2. *Décomposer $\frac{1}{\mathrm{P}(\mathrm{X})}$ en éléments simples.*
3. *Développer en série entière en zéro la fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{P}(x)}$. Donner son rayon de convergence.*

sRMS 2011 1146 CCP PC

Exercice 7.120 ★ **CCP PSI 2010**

Soient $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ et $g : t \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{te^{-nt}}{\ln n}$. Déterminer les domaines de définition de f et de g. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7.121 ★ **CCP PSI 2011**

Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a)x^n$.

Exercice 7.122 ★ **CCP PSI 2010**

1. *Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^2+1}$ est convergente.*
2. *Soit $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$. Montrer que $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1,1[$.*
3. *Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.*

sRMS 2017 1434 TPE PC

Exercice 7.123 ★ **X ESPCI PC 2013**

Rayon de convergence de $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

Exercice 7.124 ★ **X ESPCI PC 2013**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2k}\right)$ et $a_0 = 1$.

1. *Étudier la convergence et la limite éventuelle de (a_n).*
2. *Soit $f : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n$. Déterminer le rayon de convergence de f. Trouver une équation différentielle vérifiée par f.*

Exercice 7.125 ★ **ENSAM PSI 2013**

Déterminer le rayon de convergence de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} x^n$.

7.1.3 Calculs de sommes : le coefficient est une fraction rationnelle et cas s'y ramenant

Exercice 7.126 ★ **CCP PSI 2007**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(1-x)^n}{n} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

1. *Déterminer le domaine de définition de $\mathrm{S}(x)$.*
2. *Calculer $\mathrm{S}(x)$.*

Exercice 7.127 ★ **CCP PC 2015**

1. *Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.*
2. *Calculer lorsque c'est possible $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2n+1}$.*

Exercice 7.128 ★ **CCP PC 2010**

Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général $\frac{\cos(2n\pi/3)}{n} x^n$.

Exercice 7.129 ★ **CCP PC 2011 , Centrale PC 2015**

Mots-clés : fonction dilogarithme

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Soit $\mathrm{T} : t \mapsto]-\infty, 1[\setminus \{0\} \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{t}$.

1. *Montrer que T se prolonge par continuité en zéro et que $\forall t \in]-1,1[, \quad \mathrm{T}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$. Soit $\mathrm{L} : x \mapsto \int_0^x \mathrm{T}(t)\,\mathrm{d}t$.*
2. *Montrer que T est intégrable sur $[0,1[$ et que L est dérivable sur $]-1,1[$. Calculer L'.*
3. *Montrer que $\forall x \in [-1,1], \quad \mathrm{L}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.*
4. *En déduire que $\forall x \in [-1,1], \quad \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = \frac{\mathrm{L}(x^2)}{2}$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.*
5. *Montrer que $\forall x \in]0,1[, \quad \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x)\ln(1-x)$. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.*

Exercice 7.130 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Résoudre : $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

Exercice 7.131 ★ **TPE PC 2017**

On pose $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n$.

1. *Déterminer le rayon de convergence de S.*
2. *Montrer que pour $\forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{S}(x) = 9\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)x^n - 21\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.*
3. *En déduire les solutions de $\mathrm{S}(x) = 0$.*

Exercice 7.132 ★ **CCP PSI 2013**

1. *Déterminer le rayon de convergence de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.*
2. *Montrer que, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.*
3. *Montrer que $\pi = 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^n$.*

4. *Estimer l'erreur commise en approchant π par la somme partielle d'ordre N de la série précédente.*

Exercice 7.133 ★ ***TPE EIVP PSI 2013***

Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(2n-1)2^n}$.

Exercice 7.134 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$. *Déterminer le domaine de convergence ainsi que la somme de cette série entière.*

Exercice 7.135 ★ ***Mines Ponts PSI 2015***

Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

Exercice 7.136 ★ ***CCP PSI 2015***

Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{3n}{n+2} x^n$.

Exercice 7.137 ★ ***CCP PSI 2015***

Rayon de convergence et somme de $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{n} x^{2n}$.

7.1.4 Calculs de sommes : le coefficient est une intégrale

Exercice 7.138 ★ ***CCP PSI 2008***

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} \mathrm{d}t$. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général* $a_n x^n$ *et calculer sa somme.*

Exercice 7.139 ★ ***Mines Ponts PC 2013***

1. *Calculer, pour* $(p,q) \in \mathbb{N}^2$: $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q \mathrm{d}t$.
2. *Rayon de convergence et somme de* $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$.

Exercice 7.140 ★ ***Centrale PSI 2014***

Pour $n \geqslant 0$, *on pose* $a_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin(nt) \mathrm{d}t$.

1. *Calculer* a_0, a_1 *et* a_2.
2. *Pour* $x \in]-1,1[$, *calculer* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. *Déterminer le rayon de convergence de* $f(x)$.
4. *Valeur de* a_n ?

Exercice 7.141 ★ ***Centrale PC 2014***

Mots-clés : intégrales de Wallis

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \mathrm{d}t$.

1. *Montrer, pour* $n \geqslant 2$, *que* $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.
2. *Montrer, pour* $n \in \mathbb{N}$, *que* $\frac{1}{n+1} \leqslant W_n \leqslant \frac{\pi}{2}$.
3. *Déterminer le rayon de convergence de* $\sum_{n\geqslant 0} W_n x^n$.
4. *Calculer la somme de cette série entière en utilisant (a) puis en utilisant* $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos t}$.

Exercice 7.142 ★ ***Mines Ponts PSI 2015***

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/4} \tan^n t \mathrm{d}t\right) x^n$.

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* f.
2. *Exprimer* f *à l'aide de fonctions usuelles.*

Exercice 7.143 ★ ***Mines Ponts PC 2015***

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Justifier l'existence de* $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^n t}$.
2. *Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de* $x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$.

7.1.5 Calcul de sommes : autres cas

Exercice 7.144 ★ ***X ESPCI PC 2009***

Mots-clés : série génératrice exponentielle des involutions

Soit I_n *le nombre d'involutions de* $\{1,\dots,n\}$.

1. *Calculer* I_1 *et* I_2. *Exprimer, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *le nombre* I_{n+2} *en fonction de* I_{n+1} *et de* I_n.
2. *On pose* $I_0 = 1$. *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$. *Montrer que le rayon de convergence* R *de* f *est non nul.*
3. *Trouver une équation différentielle vérifiée par* f *sur* $]-R,R[$ *et la résoudre.*
4. *Déterminer* R.

Exercice 7.145 ★ ***Mines Ponts PC 2014***

Mots-clés : série génératrice exponentielle des involutions

Soit $(I_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $I_0 = I_1 = 1$ *et, pour* $n \geqslant 1$, $\quad I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$. *Soit* $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

1. *Montrer que le rayon de convergence* R *de* f *est* $\geqslant 1$.
2. *Déterminer une équation différentielle vérifiée par* f.
3. *Déterminer* R *et donner une expression de* I_n.

Exercice 7.146 ★ ***CCP PC 2011 , CCP PC 2012 , CCP PC 2013***

Mots-clés : série génératrice exponentielle des dérangements

Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

1. *Calculer* d_2 *et* d_3. *Montrer que* $\forall n \geqslant 2, \quad \frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$.
2. *Trouver le rayon de convergence* R *de la série entière de terme général* $\frac{d_n}{n!} x^n$. *Si* $x \in]-R,R[$, *on pose* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.
3. *Montrer que* $\forall x \in]-R,R[, \quad (1-x)S'(x) = xS(x)$.
4. *En déduire une expression de* S. *Exprimer* d_n *en fonction de* n.

Exercice 7.147 ★ ***Centrale PC 2013***

Mots-clés : séries génératrices exponentielle et ordinaire des nombres de Fibonacci

Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ *définie par* $F_0 = F_1 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. *Exprimer, pour* $n \in \mathbb{N}$, F_n *en fonction de* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *et* $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
2. *Nature des séries de termes généraux* F_n, $\frac{(-1)^n}{F_n}$ *et* $\frac{1}{F_n}$?

3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières de termes généraux $F_n x^n$, $\frac{F_n x^n}{n!}$ et $\frac{(-1)^n x^n}{F_n F_{n+1}}$.
4. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n F_{n+2} - (F_{n+1})^2 = (-1)^n$. En déduire une expression simple de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}$.
   L'énoncé d'origine définissait S comme la fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}}$, sans variable x dans l'expression. Je ne sais pas calculer la somme de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{F_n F_{n+1}} x^n$.

Exercice 7.148 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Mots-clés : série génératrice ordinaire des nombres de Catalan
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$. Donner une expression simple de f.

Exercice 7.149 ★ **Centrale PC 2015**

Mots-clés : formule de Dobinski, nombres de Bell, série entière génératrice exponentielle des nombres de partitions
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant n!$.
2. Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} u_n \frac{x^n}{n!}$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence de f est $\geqslant 1$.

   (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre. Résoudre cette équation et en déduire une expression de u_n.

Exercice 7.150 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $u_n x^n$.

Exercice 7.151 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Calculer $\sum_{p=0}^{n} \binom{2p}{p}\binom{2n-2p}{n-p}$. On pourra utiliser $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

Exercice 7.152 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

1. Soit $s : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} t^n$. Déterminer le rayon de convergence R de s.
2. Montrer que, sur $]-R, R[$, s vérifie l'équation $(1-4t)s'(t) = 2s(t)$. En déduire s.

Exercice 7.153 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Soit $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} x^k$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f. Trouver une équation différentielle vérifiée par f ; en déduire f.

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.

Exercice 7.154 ★ **CCP PC 2010**

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la limite de $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(2n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(2n)$.
3. Montrer que la série de terme général $(-1)^{n+1} \frac{S_n}{2n+1}$ est convergente. On note S sa somme
4. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} S_n x^{2n}$. Montrer que f est définie sur $]-1, 1[$ et que
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x^2) f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2} + x \arctan x.$$
5. Calculer S.

Exercice 7.155 ★ **RMS 2008 985 Télécom Sud Paris PSI**

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière de terme général $\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

Exercice 7.156 ★ **ENSAM PSI 2010 , Centrale PC 2013**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$.
3. Calculer sa somme $S(z)$ pour $|z| < R$. En déduire une expression de u_n.

Exercice 7.157 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \binom{2n}{n} x^n$. Déterminer le rayon de convergence de f. Donner une expression simple de f.

Exercice 7.158 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soient $(a, d) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a(a+d)\cdots(a+nd)}$. Déterminer le rayon de convergence de f ; calculer f.

Exercice 7.159 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2a_{n-1}}{n+1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant a_n \leqslant 2^n$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de f .
3. Donner une expression simple de f.

Exercice 7.160 ★ **CCP PSI 2013**

Convergence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-5n+1}{n!} x^n$.

Exercice 7.161 ★ **X ESPCI PC 2014**

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$.

Exercice 7.162 ★ **X ESPCI PC 2014**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in]0, 1[\mapsto \sum_{k=0}^{n} x^{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}$. Montrer que (f_n) converge simplement et déterminer sa limite.

Exercice 7.163 ★ **Mines Ponts PC 2014**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, a_n le cardinal de l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 3p+2q$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est strictement positif. Donner une expression simple de f.

Exercice 7.164 ★ **Centrale PSI 2014**

Soient (u_n) et (v_n) les suites complexes définies par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - v_n, \\ v_{n+1} &= u_n - 2v_n. \end{cases}$$

Soient $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence de u et de v et calculer leur somme.

Exercice 7.165 ★ **Centrale PSI 2014**

Soit a_n le coefficient de X^n dans $(1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)^n$.

1. Montrer que $a_n \leqslant 3^n$.
2. Montrer que les coefficients de X^{n+1} et de X^{n-1} sont égaux.

3. Trouver une relation de récurrence entre les a_n. En déduire une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
4. Déterminer alors une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 7.166 ★ **Centrale PC 2014**

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(n+2)n!}$?

Exercice 7.167 ★ **CCP PSI 2014**

Soit (a_n) la suite réelle définie par $a_n = 1$ si $n = 3p$, $a_n = 2$ si $n = 3p+1$ et $a_n = 3$ si $n = 3p+2$. Rayon de convergence et somme de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 7.168 ★ **CCP PSI 2014**

Soit (a_n) la suite définie par $a_n = 4$ si n est pair, $a_n = 3$ si n est impair. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 7.169 ★ **CCP PSI 2014**

Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1. Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 4^{n+1} n!$ pour tout n.
2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que f est solution de l'équation $y' = y^2$ sur un intervalle à préciser. En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 7.170 ★ **Centrale PC 2015**

Mots-clés : constante d'Euler

1. Montrer la convergence de la suite de terme général $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. On note γ sa limite.

2. Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-2\lfloor n/2\rfloor}{n(n+1)}$.
3. Rayon de convergence et expression simple de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-2\lfloor n/2\rfloor}{n(n+1)} x^n$.

7.1.6 Étude sur le cercle critique

Exercice 7.171 ★ **Mines Ponts PSI 2007**

On étudie la série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n})$. Préciser le rayon de convergence, le domaine de définition de la somme puis en donner un équivalent en 1.

Exercice 7.172 ★ **Mines Ponts PSI 2007**

Déterminer le le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 1} a_n x^n$ avec $a_k = \int_k^{2k} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$. Que se passe-t-il sur le bord du disque de convergence ?

Exercice 7.173 ★ **Centrale PC 2009**

On pose $u_n = \ln(\frac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})$ pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n x^n$.
2. Étudier la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 7.174 ★ **Centrale PC 2010**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^p}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de f ainsi que la limite de $f(x)$ quand $x \to \mathrm{R}^-$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to \mathrm{R}^-$. Indication. Utiliser $\varphi_x : t \mapsto x^{t^p}$.

Exercice 7.175 ★ **CCP PC 2006 , CCP PC 2011 , 2013 1019 CCP PSI**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n \mathrm{d}t$.

1. Calculer a_0 et a_1. Déterminer la limite de (a_n).
2. (a) Étudier la monotonie de la suite (a_n). En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
   (b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2}$. En déduire la valeur de cette somme.
3. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \frac{1}{2n+1}$. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
   (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

Exercice 7.176 ★ **Mines Ponts PC 2013**

Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n \mathrm{d}t$.

1. Nature de la série de terme général a_n ? Nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$?
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 7.177 ★ **X ESPCI PC 2013**

Mots-clés : coupure d'une série entière, frontière naturelle d'une série entière, points singuliers d'une série entière

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n!}$.

1. Montrer que le rayon de convergence de f est $\geqslant 1$.

2. Soit $w \in \mathbb{C}$ de module 1. Montrer qu'il n'existe pas de voisinage de w sur lequel f se prolonge continûment.

Exercice 7.178 ★ **Mines Ponts PSI 2013 , Mines Ponts PC 2014**

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n) x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que la suite de terme général $\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ a une limite dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f en 1^-.
4. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 7.179 ★ **Centrale PSI 2014**

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1 - \frac{1}{n}) x^n$.

1. Déterminer les rayons de convergence de f et de g.
2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
3. Trouver une relation entre $(1 - x) f(x)$ et $g(x)$.
4. Montrer que f est continue sur $[-1, 1[$ et trouver des équivalents de f et g en 1.

Exercice 7.180 ★ **Centrale PC 2013**

1. Expliciter la suite (a_n) telle que, au voisinage de 0 : $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
2. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $a_n \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$. En déduire un équivalent quand x tend vers 1^- de $f : x \mapsto \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 7.181 ★ **CCP PC 2013**

Soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t}$.

1. Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite. Déterminer la limite de (v_n).
2. Trouver la limite de $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3.
3. En étudiant $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.
4. Trouver le rayon de convergence R de $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} v_n x^n$. Étudier la convergence de la série entière en $\pm$R.

Exercice 7.182 ★ **CCP PC 2014**

1. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. Montrer, pour $t \in]-1, 1[$, que $\arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. Déterminer le domaine de définition de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}}$.

Exercice 7.183 ★ **X ESPCI PC 2015**

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$.

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n z^{2n}$.
2. Montrer que $u_n \to 0$ mais que la série de terme général u_n diverge.

Exercice 7.184 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \sim n$. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Montrer que $f(x)$ est équivalente à $\frac{1}{(1-x)^2}$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 7.185 ★ **Mines Ponts PSI 2015**

1. Trouver un équivalent de $u_n = 1! + \cdots + n!$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{u_n}$.
3. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand $x \to \mathrm{R}^-$.

Exercice 7.186 ★ **Mines Ponts PC 2015**

Mots-clés : somme des chiffres de l'écriture décimale de n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $s(n)$ le nombre de chiffres de n. Soit $\mathrm{S} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de S.
2. La série de terme général $\frac{s(n)}{n(n+1)}$ est-elle convergente ?

7.1.7 Développement en série entière

Exercice 7.187 ★ **Mines Ponts PC 2009**

Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \sin(\frac{1}{3} \arcsin x)$.

Exercice 7.188 ★ **CCP PSI 2010**

La fonction $f : x \mapsto \ln(6 - 5x + x^2)$ est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ? Si tel est le cas, donner son développement.

Exercice 7.189 ★ **CCP PC 2010**

Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \frac{2x-1}{(2+x-x^2)^2}$.

Exercice 7.190 ★ **CCP PC 2007**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) \mathrm{d}t$.

1. Étudier la parité de f. Si $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f'(x) + 2x f(x) = 1$.
2. Donner un équivalent simple de f en zéro.
3. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro.
4. Déterminer la limite de $2x \exp(-x^2) \int_0^{x-1} \exp(t^2) \mathrm{d}t$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 7.191 ★ **TPE EIVP PSI 2013**

Soit $f : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable et donner une équation différentielle vérifiée par f.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 ; donner ce développement.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)(n-k)!k!} x^{2n+1}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 7.192 ★ CCP PC 2012 , CCP PC 2013

Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{e^{x^2}-1}{x}$ prolongée par $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable en zéro. Préciser $f'(0)$.
2. Donner un développement limité à l'ordre cinq en zéro de f, f^3 et f^5.
3. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de zéro, et que f est strictement croissante.
4. Vérifier que f est un $\mathscr{C}^\infty$–difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et que f^{-1} est impaire.
5. Donner un développement limité à l'ordre cinq en zéro de $x \mapsto (f^{-1}(x))^5$.

Exercice 7.193 ★ X ESPCI PC 2013

Mots-clés : nombres de Bernoulli, série génératrice exponentielle des nombres de Bernoulli

Soit $f : t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
3. Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 7.194 ★ Centrale PSI 2013 , Mines Ponts PSI 2014 , Mines Ponts PSI 2015

Soit $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$.

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera sur un intervalle que l'on précisera également.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Expliciter les coefficients ainsi que le rayon de convergence.

Exercice 7.195 ★ Centrale PSI 2015

1. Soit E l'ensemble des réels a strictement positifs tels que arcsin soit développable en série entière sur $]-a, a[$. Montrer que E est non vide et possède un plus grand élément α que l'on déterminera. Soit $f = \arcsin^2$.
2. Montrer que f est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.
3. Trouver une équation différentielle dont f' est solution et en déduire le développement en série entière de f sur $]-\alpha, \alpha[$.

Exercice 7.196 ★ TPE EIVP PSI 2013 , Centrale PC 2015 , Centrale PC 2015

Montrer de de deux façons que $f : x \mapsto e^x \cos x$ est développable en série entière. Déterminer les coefficients de son développement.

Exercice 7.197 ★ X ESPCI PC 2014 , Mines Ponts PC 2015

Soit $f : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln|1-y|}{y} \mathrm{d}y$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ? Si oui, quel est son rayon de convergence ?
3. Calculer $f(1)$.
4. La fonction f est-elle dérivable ?

Exercice 7.198 ★ RMS 2014 1267 Écoles des Mines PSI

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n}{(2n)!}$ est un réel strictement négatif.

Exercice 7.199 ★ Mines Ponts PSI 2014

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ et $g = \exp \circ f$. Déterminer l'ensemble de définition de g et montrer que g est développable en série entière sur un voisinage de 0.

Exercice 7.200 ★ Centrale PSI 2014

1. Donner le développement en série entière de $f(x) = (1+x)^{-1/2}$ et préciser son rayon de convergence.
2. Donner le rayon de convergence, puis une expression simple de la somme de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n)!}$.

Exercice 7.201 ★ CCP PSI 2014

Mots-clés : développement en série entière d'une fonction de Bessel

Donner le développement en série entière de $x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \cos t) \mathrm{d}t$.

Exercice 7.202 ★ Centrale PC 2015

Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ est développable en série entière.

Exercice 7.203 ★ Centrale PC 2015

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que le rayon de convergence de cette série entière est $\geqslant 1$.

Exercice 7.204 ★ CCP PSI 2015

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1} - \frac{2}{x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$. Montrer que l'on définit ainsi deux fonctions sur $\mathbb{R}^*$ prolongeables en applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.